Τετάρτη 18/1/06

• Υπολογισμός του $\nabla^2\Phi$

$$\int \nabla^2\varphi \, dV \cong \nabla^2\Phi \; h_1 h_2 h_3 \, dq_1 dq_2 dq_3$$

$$\overset{\text{Gauss}}{=} \left(\partial_i \Phi\right) n_i \, dS$$

$$= \underbrace{\frac{1}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial q_3} h_1 h_2 dq_1 dq_2}_{q_3+\delta q_3} - \underbrace{\frac{1}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3} h_1 h_2 dq_1 d_2}_{q_3} + \cdots$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial q_3}\right) + \cdots \right] dq_1 dq_2 dq_3$$

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1} + \cdots\right)$$

με κυκλ.
εναλλαγή δεικτών

• Πρόβλημα Stokes

$\bigcirc \rightarrow \vec{v}$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\nabla p}{\mu} = \nabla^2\vec{u} \\ \text{ϗ } \nabla\cdot\vec{u} = 0 \end{array}\right\} \cdots \quad p = \frac{3}{2}a \, \frac{\vec{v}\cdot\vec{x}}{r^3}$$

$$\vec{\omega} = \frac{3a}{2}\,\frac{\vec{v}\times\vec{x}}{r^3}$$

$$\vec{u} = \vec{\nabla}\times\left(\frac{\psi(r,\theta)\,\hat{\varphi}}{r\sin\theta}\right)$$

$$\vec{F} = \int_S \left(\sigma_{r\theta}\, \hat{e}_\theta + \sigma_{rr}\, \hat{e}_r \right) dS \qquad \text{αφού } F_i = \int \sigma_{ij} n_j dS$$

αλλά $\hat{n} = \hat{r}$

$$F_r = \int \sigma_{rr}\, dS$$

$$F_\theta = \int \sigma_{r\theta}\, dS$$

όμως $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\sigma_{rr} = -p + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} \qquad \text{με } \hat{x} \parallel \hat{r}$$

$$\sigma_{r\theta} = +\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \qquad \text{με } \hat{x} \parallel \hat{r} \quad y \parallel \hat{\theta}$$

$$\sigma_{rr} = -p + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$\sigma_{r\theta} = \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right)$$

$$\left.\begin{aligned} \psi(r,\theta) &= f(r)\sin^2\theta \\ f(r) &= V\left(\frac{3ar}{4} - \frac{a^3}{4r} \right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial u_r}{\partial r} = 0$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{3}{2}\mu \frac{V\sin\theta}{a} \qquad \sigma_{rr} = -\frac{3a}{2}\mu \frac{V\cos\theta}{r^2}$$

$$\sigma_{r\theta}\Big|_{r=a} = \frac{3}{2}\mu \frac{V\sin\theta}{a} \qquad \sigma_{rr}\Big|_{r=a} = \frac{-3\mu}{2} \frac{V\cos\theta}{a}$$

$$\vec{F} = \frac{3\mu V}{2a} \int \Big(\underbrace{\sin\theta \overset{\text{από ιξώδες}}{\hat{e}_\theta} - \cos\theta \overset{\text{από πίεση}}{\hat{e}_r}}_{-\hat{x}} \Big) \sin\theta\, d\theta\, 2\pi = \left(-6\mu V \pi a \right)$$

• μελέτη ορθότητας προσέγγισης.

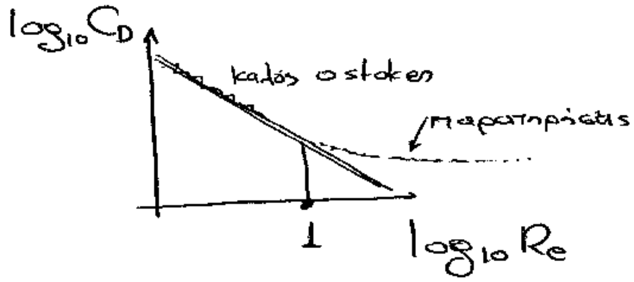
$$\rho\left(\vec{u}\cdot\nabla\right)\vec{u} = -\nabla p + \mu\nabla^2\vec{u}$$

$$\left[\rho\frac{V^2}{2a}\right] \qquad \left[\frac{\mu V}{(2a)^2}\right]$$

έχουμε αγνοήσει ποσότητες $\dfrac{[\rho V^2/2a]}{[\mu V/(2a)^2]} = \dfrac{2Va}{\nu} = Re$ αριθμός Reynolds.

• συντελεστής αντίστασης

$$C_D = \frac{F}{\left(\frac{1}{2}\rho V^2\right)\left(\pi a^2\right)} = \frac{24}{Re}$$



• Η τριβή του Stokes είναι κατώτερο φράγμα

$-\vec{F}\cdot\vec{V} = \Phi$ ανάλωση σε θερμότητα.

$$= 2\mu\int_V e_{ij}e_{ij}\,dV$$

Θα δείξουμε ότι $\Phi \geqslant \Phi_{Stokes}$

Έστω δύο λύσεις $\nabla\cdot\vec{u}=0$, $\nabla\cdot\vec{u}'=0$. $\quad \vec{u}=\vec{u}'\big|_{σφαίρα}$

$\vec{u}$: Stokesian

$\vec{u}'$: όχι Stokesian

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \qquad \frac{\nabla p}{\mu} = \nabla^2 \vec{u} \qquad \text{για τη Stokesian}$$

$$e_{ij}' = e_{ij} + (e_{ij}' - e_{ij})$$

$$\Phi' = 2\mu \int e_{ij}' e_{ij}' \, dV = \Phi + \overbrace{2\mu \int (e_{ij}' - e_{ij})(e_{ij}' - e_{ij}) \, dV}^{\text{θετικός όρος}}$$

$$+ 2\mu 2 \int e_{ij} (e_{ij}' - e_{ij}) \, dV$$

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$$

$$\text{το τελ. συμπλήρωμα} = 2 \int (\sigma_{ij} + p\delta_{ij})(e_{ij}' - e_{ij}) \, dV$$

$$= 2 \int \sigma_{ij} (e_{ij}' - e_{ij}) \, dV + 2 \int p (e_{ii}' - e_{ii}) \, dV$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u}' = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$$

$$= 2 \int \sigma_{ij} \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dV$$

$$= 2 \int \left[\sigma_{ij} \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \sigma_{ji} \left(\frac{\partial u_j'}{\partial x_i} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] dV$$

$$= 4 \int \sigma_{ij} \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dV$$

$$= \underbrace{4 \int_{\text{επιφ}}^{\infty} (u_i' - u_i) \sigma_{ij} \, dS \, n_j}_{=0} - 4 \int \underbrace{\cancel{\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}}}_{0 \text{ (Stokesian)}} (u_i' - u_i)$$

• έστω κύβος  η περιγεγρ. σφαίρα $R_\pi = L/\sqrt{2}$

Η ανάλωση κατά την κίνηση $-\vec{F}\cdot\vec{V}$

u^* : Stokesian ροή εκτός σφαίρας.

και $\vec{V}$ μεταξύ σφαίρας και κύβου.

$$\Phi^* \geq \Phi$$

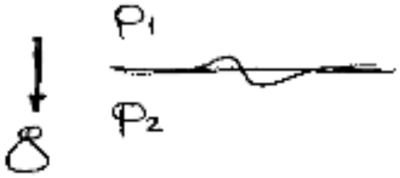
$$\Phi^* = 2\mu\int e^*_{ij} e^*_{ij}\, dV = 2\mu \int_{\text{εκτός σφαίρας}} e^*_{ij} e^*_{ij} + O(\text{μεταξύ σφαίρας και κύβου}) = 6\pi\mu a V^2 = 6\pi\mu \frac{L}{\sqrt{2}} V^2$$

όμοια $\quad 6\pi\mu \frac{L}{2} V^2 \leq -\vec{F}\cdot\vec{U} \leq 6\pi\mu \frac{L}{\sqrt{2}} U^2$

• Αντίστοιχα: Τι συμβαίνει αν προσθέσουμε και σκόνης σωματίδια.

* <u>Αστάθεια</u>

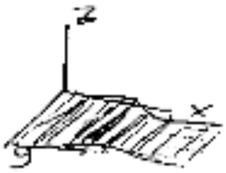
κύματα δημιουργούμενα από πνέοντα άνεμο.



$$\rho_{(i)} \frac{\partial \vec{u}^{(i)}}{\partial t} + \left(\vec{u}^{(i)} \cdot \nabla\right) \vec{u}^{(i)} = -\nabla p^{(i)} + \rho_{(i)} \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{u}^{(i)}$$

για τα 2 ρευστά $i=1,2$

Έστω η διαχ. επιφάνεια $\zeta(x,y,t)$



$$W = \frac{D\zeta}{Dt} \quad (=u_z)$$

$$= \frac{\partial \zeta}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\zeta$$

Θα αγνοήσουμε το ιξώδες ($\mu=0$) κ $\nabla\cdot\vec{u}^{(i)}=0$ (αγνοώ τα ηχητ κύματα)

Έστω μικρές κινήσεις $\zeta_x, \zeta_y \ll 1$

με μικρές ταχύτητες

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla p + \rho \vec{g} \quad \text{(για κάθε μέσο)}$$

αν αρχ. $\vec{\omega}=0$ θα είναι πάντα $\vec{\omega}=0$

Έτσι $\vec{u} = \nabla\phi$ με $\nabla^2\phi = 0$

Στην επιφάνεια $p_1 = p_2 \Big|_{z=\zeta(x,y,t)}$

$$W_1 = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \cancel{u_1 \frac{\partial \zeta}{\partial x}} + \cancel{v_1 \frac{\partial \zeta}{\partial y}}$$

$$\parallel$$

$$W_2 = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \cancel{u_2 \frac{\partial \zeta}{\partial x}} + \cancel{v_2 \frac{\partial \zeta}{\partial y}}$$

αγνοούνται ως 2ης τάξης

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}\bigg|_{z=\zeta(x,y,t)}$$

Bernouli $\overset{+\partial\Phi/\partial t}{P/\rho + gz + \frac{1}{2}|u|^2} = $ σταθερή.

$$|u|^2 = O(2)$$

$$P_1 = P_0 - \rho_1 g z \quad \text{υδροστατική}$$

$$P_2 = P_0 - \rho_2 g z$$

μη υδροστατική

Έτσι $\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + \left(P_0 - \rho_1 g z + p'\right)/\rho_1 + gz = $ σταθερό $= 0$

$$\rho_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + \frac{P_0 + p'}{\rho_1} = 0$$