Τρίτη 10/1/06

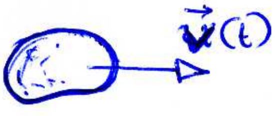
Έστω αστρόβιλο, ιδανικό ρευστό

- Σχόλιο:

Στο σύνορο μπορούμε να έχουμε ασυνέχεια εφαπτομενικής ταχύτητας ⇒ στροβιλισμός ⇒ διάχυση στροβιλισμού

Εμείς εδώ ξεχνάμε τον στροβιλισμό αυτό.

- Έστω τυχαίο σώμα κινούμενο σε ρευστό με $\nu \simeq 0$



(1) $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ ασυμπίεστο

(2) $\nabla \times \vec{u} = 0$

(3) $\vec{u} \cdot \hat{n} \big|_{\text{σύνορο}} = \vec{v} \cdot \hat{n} \big|_{\text{σύνορο}}$

(4) $|\vec{u}| \to 0$ μακριά

Έτσι $(2) \Rightarrow \vec{u} = \nabla \phi$, $(1) \Rightarrow \nabla^2 \phi = 0$

$$\Rightarrow \phi = C + \frac{q}{r} + d_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r} + c_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{1}{r}\right) + \ldots$$

(πλήρης ανάπτυξη)

$\int \vec{u} \cdot \hat{n} \, dS = 4\pi q$ (δεν υπάρχει) $\Rightarrow q = 0$

για σφαίρα $d_i \sim v_i$ (η ροή προσαρμόζεται αυτομάτως στην ταχύτητα της σφαίρας)

$$\phi = \vec{V} \cdot \vec{\Phi} \qquad n_i \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_i} = n_\alpha$$

ο υπολογισμός οδηγεί σε $\phi = \frac{\overset{\substack{\text{ακτ. σφαίρας} \\ \downarrow}}{a^3}}{2} V_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r}\right)$

Η κιν. ενέργεια του ρευστού

$$T = \frac{1}{2} \rho_0 \, m_{\alpha\beta} V_\alpha V_\beta$$

Αν το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα δεν ασκείται δύναμη στο σώμα

$$T_{\text{ρευστό}} = \frac{1}{2} \rho \int_{V_{\text{εκτός σώματος}}} |u|^2 dV = \frac{\rho}{2} \int \nabla\phi \cdot \nabla\phi \, dV$$

$$= \rho/2 \int \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) dV - \frac{\rho}{2} \int \phi \cancelto{0}{\nabla^2 \phi} \, dV$$

$$= \underbrace{\frac{\rho}{2} \int_{S_\infty \text{ σύνορο ρευστού}} \phi \frac{\partial \phi}{\partial x_i} n_i \, dS}_{\begin{bmatrix} \phi \sim C + O(1/r^2) \\ \partial\phi/\partial x \sim O(1/r^3) \\ S \sim O(r^2) \end{bmatrix} \to 0} - \frac{\rho}{2} \int_{S_{\text{σφαίρας}}} \phi \frac{\partial \phi}{\partial x_i} n_i \, dS$$

$$T = -\frac{\rho}{2}\int_{S_{\text{σώμα}}} \phi\, u_i n_i\, dS = -\frac{\rho}{2}\int_{S'} \phi\, v_i n_i\, dS'$$

$$= -\frac{\rho}{2} v_i v_\alpha \int \Phi_\alpha n_i\, dS' = \frac{1}{2} m_{i\alpha} v_i v_\alpha$$

$$m_{i\alpha} \equiv -\rho \int \Phi_\alpha n_i\, dS \quad \text{συμ.τανυστής}$$

υπολογίζω το $\displaystyle\int_{\text{σώμα}} (\Phi_\alpha n_i - \Phi_i n_\alpha)\, dS'$

$$= \int \left(\Phi_\alpha n_\beta \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_\beta} - \Phi_i n_\beta \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_\beta}\right) dS$$

$$= \underbrace{\int_{S_\infty}}_{0} - \underbrace{\int \frac{\partial}{\partial x_\beta}(\quad)\, dV}_{0} = 0 \Rightarrow \text{συμμετρικό}$$

0 (λόγω του ότι $\nabla^2 \Phi_\alpha = 0$)

- $$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m_{i\alpha} v_i v_\alpha - \vec{F}\cdot\vec{x}$$

$$p_k = m v_k + m_{ik} v_i$$

αν υπάρχει εξωτερική δύναμη

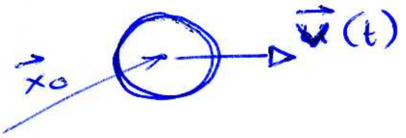
$$m\dot{\vec{v}} + \underbrace{M \cdot \dot{\vec{v}}}_{m_{i\alpha}\dot{v}_\alpha} = \vec{F}$$

Η συνολική δύναμη από πίεση είναι 0

$$\vec{F} = -\int_{\text{σύνορο}} p\,\hat{n}\,dS$$

από Bernoulli

$$p - p_0 = -\rho\left[\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|u|^2 - \vec{g}\cdot\vec{x}\right]$$



$$\phi = V_\alpha(t)\,\Phi_\alpha(\vec{x}-\vec{x}_0)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \dot{V}_\alpha \Phi_\alpha - V_\alpha \frac{\partial}{\partial x_i}\Phi_\alpha V_i$$

Έτσι $$F_i = -\rho\underbrace{\int_{\text{σύνορο}}\left(\dot{V}_\alpha \Phi_\alpha n_i\right)dS}_{m_{\alpha i}\dot{V}_\alpha} +$$

$$+\rho\int V_\alpha V_\beta \frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial x_\beta}\, n_i\, dS$$

$$-\frac{\rho}{2}\int u_\alpha u_\alpha n_i\, dS + \rho\underbrace{\int g_\alpha x_\alpha n_i\, dS}_{\text{άνωση (να υπολογιστεί)}}$$

$$\frac{1}{2}\int_S u_\alpha u_\alpha n_i\, dS = \frac{1}{2}\int_{S_\infty} \overset{\nearrow 0}{} - \int u_\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i}\, dV$$

|| αστρόβιλο

$$-\int u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}\, dV = -\int_{S_\infty} u_\alpha u_i n_\alpha\, dS$$

$$+\int_S u_\alpha u_i n_\alpha\, dS$$

Επομένως $\int_{S'} V_\alpha V_\beta \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_\beta} n_i \, dS - \int u_\alpha u_i n_\alpha \, dS$

$$= \int_S V_\alpha V_\beta \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_\beta} n_i \, dS - \int V_\alpha n_\alpha u_i \, dS$$

$$u_i = V_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_i}$$

$$= \int_S \left(V_\alpha V_\beta \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_\beta} n_i - V_\beta V_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_i} n_\beta \right) dS$$

$$= V_\alpha V_\beta \underbrace{\int_S \left(\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_\beta} n_i - \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_i} n_\beta \right) dS}_{\int_{S_\infty} \to 0 \; - \int \left(\frac{\partial^2 \Phi_\alpha}{\partial x_i \partial x_\beta} - \frac{\partial^2 \Phi_\alpha}{\partial x_i \partial x_\beta} \right) dV = 0}$$

- Έστω ασυμπίεστο ρευστό με μεγάλο ιξώδες

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{u} \qquad \nu = \mu / \rho$$

$\rho =$ σταθερό

$$\frac{\nabla p}{\rho} = \nu \nabla^2 \vec{u} \quad , \quad \nabla \cdot \vec{u} = 0$$

$\vec{u} = \vec{V}(t)$ στο σύνορο του σώματος

→ Η δύναμη θα ήταν $F_i = A_{ij} V_j(t)$

→ Η κίνηση είναι αντιστρεπτή στο χρόνο

• υπολογισμός δύναμης σε σφαίρα

$\rho =$ σταθερό

$\nabla^2 p = 0$

$\nabla^2 \vec{\omega} = 0$

+ συνοριακή συνθήκη $\vec{u} = \vec{V}(t)$ στο σώμα

$\vec{u} \to 0$ μακριά

$\vec{\omega}$: αξονικό διάνυσμα

για σφαίρα όλα τα πεδία εξαρτώνται από $f(r), \vec{x}, \vec{V}$

$$p/\mu = V_i x_i f(r) = C V_i \frac{\partial}{\partial x_i}(1/r)$$

$$\vec{\omega} = \vec{V} \times \vec{x}\, g(r) = C\, \vec{V} \times \vec{\nabla}(1/r)$$

(να δειχθεί ότι οι σταθερές είναι ίδιες.)*