Τετάρτη 21/12

- $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$ εισάγεται προκειμένου να απαληφθεί η p που είναι εσωτερική δύναμη (όπως η τάση στο εκκρεμές)

- $\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{\omega}}{\rho}\right) = \frac{\vec{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \vec{u}$

Οι καμπύλες στροβιλισμού συμπαρασύρονται από το ρευστό. (όπως το μαγν. πεδίο στο πλάσμα)

$$\frac{\vec{\omega}(0)}{\rho(0)} = \varepsilon \, \delta\vec{\ell}(0) \implies \frac{\vec{\omega}(t)}{\rho(0)} = \varepsilon \, \delta\vec{\ell}(t)$$

Σε 2-D ροή $\vec{\omega} =$ σταθερό.

- Στην Lagrangian περιγραφή: $\vec{X}_0(\sigma) = \vec{X}(\sigma, 0)$

$$\downarrow t$$

$$\vec{X}(\sigma, t)$$

$$\vec{u}\left(\vec{x}(\sigma, t)\right) = \left.\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right|_{\sigma}$$

$\delta\vec{\ell}_0 = \varepsilon \frac{\partial \vec{x}_0}{\partial \sigma}$ για $t=0$

$\delta\vec{\ell} = \varepsilon \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}$ για $t \neq 0$

Έτσι $$\frac{\vec{\omega}(\vec{x}, t)}{\rho(\vec{x}, t)} = \left|\frac{\vec{\omega}_0}{\rho_0}\right| \frac{\partial \vec{X}/\partial \sigma}{\left|\partial \vec{X}_0/\partial \sigma\right|}$$

$$\vec{X} = \vec{X}(\vec{X}_0) \qquad \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial X_{0i}} \frac{\partial X_{0j}}{\partial \sigma}$$

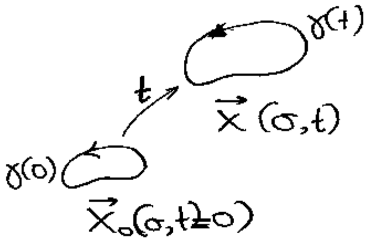
$$\frac{\vec{\omega}(\vec{x},t)}{\rho(\vec{x},t)} = \frac{\omega_0}{\rho_0} \underbrace{\frac{\delta l_{0j}}{|\delta \vec{l}_0|}}_{\text{μοναδιαίο στην κατεύθυνση της στροβιλότητας}} \frac{\partial \vec{x}}{\partial X_{0j}}$$

$$= \frac{\vec{\omega}_0}{\rho_0} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{X}_0} = \frac{\vec{\omega}_0}{\rho_0} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{X}_0} \vec{x}$$

λύση του Cauchy

• Θεώρημα Kelvin (ισοδύναμη απόδειξη)

έστω μια καμπύλη



κυκλοφορία

$$C(t) = \oint_{\gamma(t)} \vec{u} \cdot d\vec{x}$$

$$\dot{C} = 0$$

αφού $\dot{C} = \frac{d}{dt}\left(\oint_\sigma \frac{\partial x_i}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial \sigma} d\sigma\right)$

$$= \oint_\gamma \frac{du_i}{dt} dx_i + \oint \frac{\partial x_i}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial \sigma} u_i\right) d\sigma$$

$$\left[\oint \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{u_i u_i}{2} d\sigma = 0\right]$$

$$\dot{C} = \oint_{\gamma(t)} \frac{du_i}{dt} dx_i$$

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial_i p}{\rho} + f_i + \nu \nabla^2 u_i \qquad \text{(δυναμική)}$$

$$\dot{G} = -\oint_{\gamma(t)} \frac{\partial_i P}{\varrho} dx_i + \oint_{\gamma(t)} f_i dx_i + \nu \int \nabla^2 u_i \, dx_i$$

$$\frac{\nabla p}{\varrho} = \nabla \int \frac{dp}{\varrho(p)}$$ αν $p(\varrho)$ βαροτροπικό ρευστό.

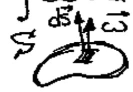
→ $\oint \frac{\partial_i P}{\varrho} dx_i = \oint \vec{\nabla} [\ ] \cdot d\vec{x} = 0$

→ $\oint f_i dx_i = 0$ (συντηρητικό εξωτ. πεδίο)

→ αν επιπλέον $\nu = 0$

$$\dot{G} = 0$$

Επιπλέον $G = \int_S \vec{\omega} \cdot d\vec{S}$



* Έτσι· αν $t=0$ $\vec{\omega}=0 \Rightarrow \vec{\omega}=0$ για πάντα.

*

$\int \vec{\omega} \cdot d\vec{S}$

γρ. στροβιλισμού

η ροή του στροβιλισμού εγκάρσια παραμένει σταθερή·

η ροή επί του επιπέδου του σωλήνα θα είναι πάντα 0.

⇒ ο σωλήνας θα μεταφερθεί

- Αν $\vec{\omega}=0 \Rightarrow \vec{u}=\vec{\nabla}\phi$ potential flow

- Αν εφαρμόσω πίεση στιγμιαία σε ακιν. ρευστό

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} = -\frac{\vec{\nabla}p}{\rho} + \nu \nabla^2\vec{u}$$

έστω $p=\pi(\vec{x})\delta(t-t_0)$

$$\int_{0^-}^{0^+}\frac{\partial u}{\partial t}dt + \cancel{\int_{0^-}^{0^+}(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\,dt}_{\,0} = -\frac{\vec{\nabla}\pi}{\rho} + \cancel{\int_{0^-}^{0^+}\nu\nabla^2\vec{u}\,dt}$$

$$\vec{u}(0^+) - 0 = -\frac{\vec{\nabla}\pi}{\rho}$$

$$\phi = -\frac{\pi}{\rho}\,\Theta(t-t_0)$$

ο όρος $\nabla^2\vec{u}$ γίνεται σημαντικός
στα άκρα του σώματος
που κινείται εντός του
ρευστού όπως στις
άκρες φορτισμένου αγωγού
$\vec{E}\rightarrow\infty$

- αν κινώ ένα σώμα μέσα σε ρευστό με συχνότητα ω με διαστάσεις L, και πλάτος a

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\simeq u\,\frac{u}{a} \qquad \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\vec{u} \simeq \frac{u^2}{\ell} \ll \frac{\partial\vec{u}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} = -\frac{\nabla p}{\rho} \Rightarrow \frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t}=0 \Rightarrow \vec{\omega}=0$$

• Θεώρημα Bernoulli

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\omega}\times\vec{u} + \frac{1}{2}\nabla|\vec{u}|^2 = -\nabla\int\frac{dp}{\rho} \quad \text{με } p(\rho)$$

$$-\vec{\nabla}(\vec{g}\cdot\vec{x}) \quad (\text{σε βαρύτητα})$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\omega}\times\vec{u} = -\vec{\nabla} H$$

συνάρτηση Bernouli

→ στάσιμη ροή $\partial\vec{u}/\partial t = 0 \Rightarrow \vec{\omega}\times\vec{u} = -\vec{\nabla}H$

$$\vec{\omega}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{u}) = 0$$

$$\vec{u}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{u}) = 0$$

οι γραμμές στροβιλισμού και ροής είναι γραμμές σταθερού H.

→ αν επιπλέον $\vec{\omega}=0 \Rightarrow H =$ σταθερό παντού

→ αν $\vec{u} = \vec{\nabla}\varphi$ και όχι στάσιμη

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\varphi + \cancel{\vec{\omega}\times\vec{u}}^{\,0} = -\nabla H$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + H = \text{σταθερό παντού}$$

• σφαίρα κινούμενη $\vec{V}$ σε ομογενές ρευστό και $\nu=0$

$$\vec{u}=\vec{\nabla}\phi \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{u}=0. \text{ (ασυμπίεστο)}$$

$$\nabla^2\phi=0$$

για $r=a$ (στην επιφάνεια) $\quad \vec{u}\cdot\vec{n}=\vec{V}\cdot\vec{n}$

$\vec{u}\to 0$ (όταν $|\vec{x}|\to\infty$)

αν $\vec{u}(t)$ ακαριαία θα αλλάξει και το ϕ

Έστω λύσεις $1/r$, $\partial_i 1/r$, $\partial_i\partial_j 1/r$, ...

$$\phi = C + \frac{\alpha}{r} + c_i\partial_i\left(\frac{1}{r}\right) + \sigma_{ij}\partial_{ij}\left(\frac{1}{r}\right)+\cdots$$

▶ για $\phi=\frac{\alpha}{r}$ $\quad \vec{u}=-\frac{\alpha\vec{r}}{r^3}$ τότε $\int\vec{u}\cdot d\vec{S}=-\alpha 4\pi$

⇒ απορρίπτεται αυτός ο όρος ότι σχήμα και να είχε αυτό το σώμα

$$\phi=\vec{V}\cdot\vec{\Phi}$$

$$\vec{\Phi}:\ \nabla^2\vec{\Phi}=0$$

$$\vec{u}=\frac{\partial\phi}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}(V_\alpha\Phi_\alpha)=V_\alpha\frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial x_i}$$

$$\vec{u}\cdot\hat{n}=\vec{V}\cdot\hat{n} \quad \ldots$$

$$\phi=C+\vec{V}\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{r}$$

$$\phi = C + \lambda \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r}$$ (αυτή είναι η λύση για τη σφαίρα)

$$\vec{\nabla} 1/r = -1/r^2 \, \hat{r}$$

$$\phi = C - \lambda \frac{\vec{V} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

$$u_\alpha = \partial_\alpha \phi = -\frac{\lambda V_i}{r^3} + \frac{3 V_i x_i x_\alpha}{r^5}$$

$$= -\frac{\lambda}{r^5}\left(\vec{V} r^2 \; 3(\vec{r} \cdot \vec{V})\vec{r}\right)$$

$$\vec{u}\Big|_{\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha} = -\frac{\lambda}{R^5}\left(\vec{V} R^2 - 3 R^2 V \cos\phi \; \hat{n}\right)$$

$$\vec{u} \cdot \hat{n} = -\frac{\lambda}{R^5} \underbrace{(\vec{V} \cdot \hat{n})}_{\cos\phi} \left(R^2 - 3 R^2 \cos\phi\right)$$

$$= \vec{V} \cdot \hat{n}$$

$$\phi = C + \frac{R^3}{2} \vec{V} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r}\right)$$

- Όταν έχω δυναμική ροή δεν υπάρχει αντίσταση.