Τρίτη 13/12

• Για ένα νευτώνειο ρευστό

$$\sigma_{ij} = -(\underbrace{p_e}_{\text{equilibrium}} - \underbrace{k}_{\frac{a+2\beta}{3}\ \text{bulk viscosity}}\vec{\nabla}\cdot\vec{u})\delta_{ij} + 2\underbrace{\mu}_{\text{shear viscosity}} \overbrace{\left[e_{ij} - \frac{1}{3}\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\,\delta_{ij}\right]}^{\text{άιχνο συμμετρικό μέρος}}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

shear viscosity
(ιξώδες ολίσθησης;)

$$\kappa > \mu > 0$$

$\kappa/\mu \in [1,100]$ πειραματικά

η μέση πίεση σε μια επιφάνεια ρευστού 

$$= \frac{\int_S \varepsilon^2 n_i n_j \sigma_{ij}\, d\sigma}{4\pi\varepsilon^2}$$

$$= \frac{\sigma_{ii}}{3} = -p_{mech}$$

η ασκούμενη πίεση σε μετρητική συσκευή

$$p_{mech} - p_e = -k\,\vec{\nabla}\cdot\vec{u}$$

- $\rho \frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial p_e}{\partial x_i} + (\kappa + \frac{\mu}{3})\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) + \mu \nabla^2 u_i + \rho g_i$ (2)

εξ. NS

- ο τελεστής $\nabla^2 \vec{u}$ αλλάζει μορφή ανάλογα με το σύστημα συντεταγμένων

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{u}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) - \vec{\nabla}^2\vec{u}$$

Μπορεί όμως να υπολογιστεί από την παραπάνω ταυτότητα.

Επίσης ο όρος $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}$ σε άλλες συντεταγμένες απαιτεί την ταυτότητα

$$(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} = \vec{\omega}\times\vec{u} + \vec{\nabla}\left(\frac{\vec{u}^2}{2}\right)$$

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla}\times\vec{u}$$

- $\frac{d\rho}{dt} + \rho\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0$ εξίσωση συνέχειας. (1)

- $p = p(\rho, T)$ οι 3 εξισώσεις οδηγούν σε λύση του συστήματος

- $u_i \cdot$(εξίσωση NS) $\Rightarrow$

$$\rho \frac{d}{dt}\left(|\vec{u}|^2/2\right) = -u_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i u_i \quad (*_1)$$

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\left(\frac{1}{2}|\vec{u}|^2 + e\right)dV = \int_S \sigma_{ij} n_j u_i \, dS + \int_V \rho f_i u_i \, dV + \int_V \rho Q \, dV + \int_S K_i n_i \, dS$$

$e \to C_v T$ (εσωτ. ενέργεια)

ροή θερμ.

$$\vec{K}_i\left(e, T, \frac{\partial T}{\partial x_j}\right) = K_{ij}\frac{\partial T}{\partial x_j} \quad \text{(παραματικά)}$$

$$K_{ij} = -k\,\delta_{ij}$$

$$\vec{K}_i = -k\frac{\partial T}{\partial x_i} \quad \text{(Newtonian cooling)}$$

$$\frac{d}{dt}(\text{ενέργεια}) = \int \frac{\partial}{\partial x_j}\overbrace{(u_i\sigma_{ij})}^{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\sigma_{ij} + u_i\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}} dV + \int \rho f_i u_i dV$$

$$+ \int \rho Q\, dV + \underbrace{\int k\frac{\partial T}{\partial x_i} n_i\, dS}_{\int k\nabla^2 T\, dV}$$

$\rho\, dV =$ σταθερό $\Rightarrow$

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{|\vec{u}|^2}{2} + e\right) = u_i\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \sigma_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \rho f_i u_i + \rho Q + k\nabla^2 T$$

αφαιρώντας την $(*_1)$

$$\rho\frac{de}{dt} = \sigma_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \rho Q + k\nabla^2 T$$

$$\rho\frac{de}{dt} = \rho c_v\frac{dT}{dt}, \qquad \sigma_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \sigma_{ij}e_{ij}$$

λόγω συμμετρικότητας του σ_{ij}

$$\sigma_{ij} = -\left(p_e - k\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right)\delta_{ij} + 2\mu\left(e_{ij} - \tfrac{1}{3}\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\;\delta_{ij}\right)$$

$$\sigma_{ij}e_{ij} = -p_e(\nabla\cdot\vec{u}) + k(\vec{\nabla}\cdot\vec{u})^2 + 2\mu\left(\quad\right)\Big[\left(\quad\right) + \underbrace{\tfrac{1}{3}\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\,\delta_{ij}}_{=0}\Big]$$

(ίχνος άιχνου μέρους)

$$= -p_e(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) + k(\vec{\nabla}\cdot\vec{u})^2 + 2\mu\underbrace{\left(\quad\right)}_{e_{ij} - \frac{1}{3}\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\,\delta_{ij}}^2$$

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} = \underbrace{-p_e\,\vec{\nabla}\cdot\vec{u}}_{\text{αντιστρεπτό έργο}} + k(\vec{\nabla}\cdot\vec{u})^2 + 2\mu\left(\quad\right)^2 + \rho Q + k\nabla^2 T \qquad (3)$$

- (1) (2) (3) + $p(\rho, T)$ + συνοριακές συνθήκες

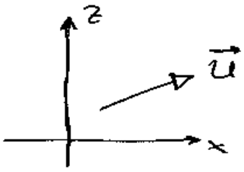
  → κλειστό σύστημα + $\vec{u} = 0$ στα σύνορα

- Στις 2-D το σύστημα των εξισώσεων αυτών έχει λύση για όλους τους χρόνους. Στις 3D δεν υπάρχει σχετική απόδειξη.

(*) $\rho = \text{σταθερό} \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0$

Ψάχνω για λύσεις ηρεμίας $\vec{u}(t,\vec{x})$

ειδικά για $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} = 0$ (δεν αλλάζει η ταχύτητα κατά την κίνηση)



$$\vec{u} = \left(u(\cancel{x},y,z,t),0,0\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} \Rightarrow p(x,z,t)$$

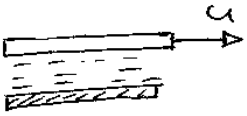
$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho_0 g \Rightarrow p = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{σταθερό}}}{p_0} - g\rho_0 z + p'(x,t)$$

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \mu \nabla_\perp^2 u$$

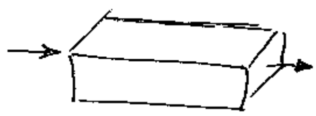
$$\Rightarrow \partial p'/\partial x = G(t) \quad \text{όχι εξάρτηση του } x.$$

$$\Rightarrow p' = G(t)\,x$$

παραδείγματα



$\Rightarrow G(t) = 0$



διαφορά πίεσης $G(t) = \text{σταθ.}$

στις φλέβες $G(t) \neq 0$

Έστω G = σταθερό $\partial u/\partial t = 0$

$$\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = G$$

π.χ. σε άπειρες πλάκες με διαφορά πίεσης με $u(z)$

$$u = \frac{G}{\mu}\frac{z^2/L^2}{2} + A\frac{z}{L} + B$$

$$u(0) = 0 \qquad u(L) = 0$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$B = 0 \qquad A = -\frac{G}{2\mu}$$

$$u = \frac{G}{2\mu}\left(\frac{z}{L}\right)\left(\frac{z}{L} - 1\right) \quad \text{παραβολική}$$

$$u_{max} = \frac{G}{8\mu}$$

ολική ροή $\int \vec{u} \cdot d\vec{A} = \sim L^4$

όταν γίνει τυρβώδης $\sim L^2$