Τρίτη 6/12/2005

• Υπενθύμιση: νόμος του Νεύτωνα $\rho\frac{du_i}{dt} = \rho f_i + \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}$

– όπου $\vec{u}(\vec{x},t)$ πεδίο ταχυτήτων

– όπου $\frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} u_i$

• Στην ισορροπία $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$ (ισοτροπία)

• Απαιτείται ακόμη μια σχέση $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{λόγω ροής}}}{d_{ij}}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$

όταν δεν έχουμε ισορροπία.

d_{ij} δεν περιμένουμε να εξαρτάται από την ταχύτητα την ίδια λόγω γαλιλαϊκής συμμετρίας

• Ο Νεύτων με πειράματα  έδειξε αυτή την εξάρτηση.

• Επίσης με το πείραμα  στο τέλος το υγρό περιστρέφεται σαν στερεό σώμα οπότε η ταχύτητα αυτή καθ' εαυτή δεν "δημιουργεί" δύναμη.

• Ποιά η συνάρτηση $d_{ij}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$?

• Θεώρημα ΚΗ, για Α : 3x3 tr(A) det(A)

χαρακτ. πολυώνυμο $\lambda^3 - \mathrm{I}\lambda^2 + \mathrm{II}\lambda - \mathrm{III} = 0$

που επιλύεται από τον Α. I, II, III αναλλοίωτα σε στροφές

• Stokes. Βάση του Θ. ΚΗ

αν $A_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$

$$d_{ij} = \lambda(\mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III})\,\mathbf{I} + \mu(\mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III})\,\mathbf{A} + \nu(\mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III})\,\mathbf{A}^2$$

(μέχρι τετραγωνικός ως προς A)

από παρατηρήσεις d_{ij} γραμμικό ως προς $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$

όπως και ο νόμος του Ohm $\vec{J} = \sigma \vec{E}$

(Θεωρία Green-Kubo) 60'-70'

Έτσι $d_{ij} = A_{ijkl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}$ (Navier)

με A_{ijkl} (τοπικό και στιγμιαίο)

Νευτώνειο υλικό: αν υπάρχει τέτοια σχέση $d - \frac{\partial u}{\partial x}$, ισοτροπία, τοπική & στιγμιαία

• Η παραπάνω σχέση πρέπει να είναι ισοτροπική ⇒

$$A_{ijkl} : \text{ισοτροπικός τανυστής} = \alpha\,\delta_{ij}\delta_{kl} + \beta\,\delta_{ik}\delta_{jl} + \gamma\,\delta_{il}\delta_{kj}$$

για να είναι σ_{ij} ισοτροπικός ⇒ $\beta = \gamma$

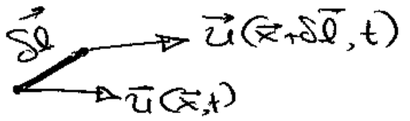
$$d_{ij} = A_{ijkl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l} = \alpha\underbrace{\frac{\partial u_k}{\partial x_k}}_{\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\,=\,\mathrm{trace}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)}\delta_{ij} + \beta\underbrace{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}_{\text{μόνο το συμμ. κομμάτι λόγω διατήρ. στροφορμής}}$$

• Συνολικά $$\sigma_{ij} = -\underset{\substack{\uparrow \\ \text{(equilibrium)}}}{p_e}\delta_{ij} + \alpha(\vec{\nabla}\cdot\vec{u})\delta_{ij} + 2\beta \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}}{e_{ij}}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \overset{\substack{\text{συμμετρικό} \\ \downarrow}}{e_{ij}} + \underbrace{\text{αντισυμμετρικό μέρος}}_{\xi_{ij}}$$

φυσ. νόημα:

έστω ένα μικρό "νήμα" ρευστού



$$\frac{d\,\vec{\delta l}}{dt} = \vec{u}(\vec{x}+\vec{\delta l},t) - \vec{u}(\vec{x},t)$$

$$= \delta l_i \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i}$$ κατευθ. παράγωγος του $\vec{u}$ στην κατεύθυνση $\vec{\delta l}$.

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\delta l_1 \\ \delta l_2 \\ \delta l_3\end{pmatrix} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)\begin{pmatrix}\delta l_1 \\ \delta l_2 \\ \delta l_3\end{pmatrix} = A(\vec{x},t)\begin{pmatrix}\delta l_1 \\ \delta l_2 \\ \delta l_3\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\vec{\delta l}^2) = \vec{\delta l}\cdot\frac{d}{dt}\vec{\delta l} = \delta l_i\, A_{ij}\, \delta l_j = e_{ij}\,\delta l_i\,\delta l_j$$

αφού $\delta l_i\, \xi_{ij}\, \delta l_j = 0$

Η διεύθυνση μέγιστου ρυθμού μεγέθυνσης του δl είναι αυτή του ιδιοανύσματος του e με τη μέγιστη ιδιοτιμή. ($\vec{E}^{(1)}$)

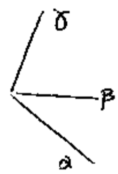
$$e_{ij}\, E_j^{(1)} = \lambda_1 E_i^{(1)}$$
$$e_{ij}\, E_j^{(2)} = \lambda_2 E_i^{(2)} \qquad \lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$$
$$e_{ij}\, E_j^{(3)} = \lambda_3 E_i^{(3)}$$

• Έστω $x_i = \delta l_i$

$$\dot{x}_i = A_{ij}x_j = e_{ij}x_j = \frac{\partial}{\partial x_i}\overbrace{\left(\frac{1}{2}x_\alpha e_{\alpha\beta}x_\beta\right)}^{\Phi}$$

$$\dot{\vec{x}} = \vec{\nabla}\Phi$$

• $e_{ij} = \frac{1}{3}\underset{\vec{\nabla}\cdot\vec{u}}{\underset{\parallel}{e_{kk}}}\,\delta_{ij} + \left(e_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}e_{kk}\right)$



με $\alpha+\beta+\gamma=0$ (μηδ. ίχνους)

τα 3 ιδιοανύσματά του

• Ένα σφαιρικό στοιχείο ρευστού

λόγω $\vec{\nabla}\cdot\vec{u} < 0$

• Τι είναι το αντισυμμετρικό μέρος ξ_{ij}?

$$\xi_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \xi_{12} & \xi_{13} \\ -\xi_{12} & 0 & \xi_{23} \\ -\xi_{13} & -\xi_{23} & 0 \end{pmatrix} = \Xi$$

$$\xi_{ij} = -\varepsilon_{ijk}\Omega_k$$

$$\Omega_k = (\omega_1, \omega_2, +\omega_3) = (-\xi_{23}, \xi_{13}, -\xi_{12})$$

$$\Xi = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

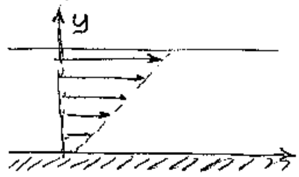
$$\frac{d}{dt}\delta l_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\delta l_j = \underbrace{e_{ij}\delta l_j}_{\delta u_i^{(S)}} + \underbrace{\xi_{ij}\delta l_j}_{\delta u_i^{(A)}}$$

$$\delta u_i^{(A)} = -\varepsilon_{ijk}\,\omega_k\,\delta l_j = +\vec{\omega}\times\vec{\delta l}$$

Το Ξ οδηγεί σε περιστροφή του νήματος.

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}\times\vec{u}$$

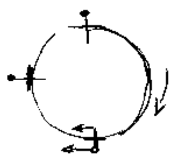
• Παράδειγμα 1



$\vec{u} = \alpha y\,\hat{x}$

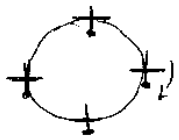
έχει στροβιλισμό (αν τοποθετήσουμε μια φτερωτή εντός του πεδίου θα περιστραφεί)

• Παράδειγμα 2



$u_\theta = \Omega r$

ενώ σε $u_\theta = \alpha / r$



δεν θα άλλαζε ο προσανατολισμός

• Επιστροφή στις εξισώσεις κίνησης (Navier-Stokes)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u}) = 0 \quad \text{(εξ. συνέχειας)}$$

θεωρούμε σταθερό

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})u_i\right) = \rho f_i \underbrace{- \frac{\partial p_e}{\partial x_i} + \alpha\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) + \beta\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u})\right)}_{\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}}$$

$= \rho f_i + \Sigma_i$

$$\vec{\Sigma} = -\vec{\nabla} p + (\overbrace{\alpha+\beta}^{\kappa}) \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) + \vec{\beta}\, \nabla^2 \vec{u}$$

κ (σημαντικός σε περίπτωση συμπιεστότητας)

β μεγάλες συχνότητες (π.χ. υπέρηχοι)

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \rho\vec{f} + \vec{\Sigma} \quad \text{(εξίσωση Navier-Stokes)}$$

Αν $p_e(\rho)$: εξ. N-S + εξ. συνέχειας → κλειστό σύστημα.

Αν $p_e(\rho,T)$: χρειαζόμαστε 1 επιπλέον εξίσωση (εξίσωση ενέργειας)

• Παράδειγμα: ηχητικά κύματα.

Έστω άπειρο (όχι εωφοριακής ευνάφειας) ρευστό

όχι απώλεια $\kappa = \beta = 0$

όχι εξωτ. δυνάμεις $\vec{f} = \vec{0}$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \vec{\nabla}\cdot\vec{u} + \vec{u}\cdot\nabla\rho = 0$$

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\vec{u}\right) = -\vec{\nabla} p_e = -\frac{dp_e}{d\rho}\vec{\nabla}\rho$$

Έστω ομογενές ρευστό με ρ_0 (σταθερό) + διαταραχή ρ'

αρχικά ακίνητο $\vec{u}$ (διαταραχή ταχύτητας)

Εξισώσεις εξέλιξης διαταραχών

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + (\rho_0 + \rho')\vec{\nabla}\cdot\vec{u} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\rho' = 0$$

$$(\rho_0+\rho')\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\vec{u}\right) = -\left.\frac{dp_e}{d\rho}\right|_{\rho_0+\rho'} \nabla\rho'$$

Πετάμε όρους ανώτερης τάξης

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\left.\frac{dp_e}{d\rho}\right|_{\rho_0} \vec{\nabla}\rho' = -c^2 \vec{\nabla}\rho'$$

$$c \equiv \sqrt{\left.\frac{dp_e}{d\rho}\right|_{\rho_0}}$$ ταχύτητα ήχου

$$\vec{\omega} \equiv \vec{\nabla}\times\vec{u} \Rightarrow \vec{\omega} = \text{σταθερό} \Rightarrow \vec{u} = \nabla\phi$$

$$\left.\begin{aligned} \rho_0 \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\right) &= -c^2 \nabla^2 \rho' \\ &\parallel \\ \rho_0 \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) &= -\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} \end{aligned}\right\} \quad \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \rho' = 0$$

κυματική εξίσωση.

$$\rho' = \int \rho'_0(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \underset{c|\vec{k}|}{\underset{\parallel}{\omega}} t)}\, d^3k$$