Τετάρτη 30/11/05

• Θεώρημα Cauchy (επανάληψη)

Έστω κινούμενο ρευστό σε κάποιου είδους ισορροπία.

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho \overset{\text{κάποια εκτατική ποσότητα βαθμωτή}}{a(\vec{x},t)}\, dV = \int_{V(t)} b(\vec{x},t)\, dV + \underbrace{\int_{\Sigma(t)} c(\vec{x},t)\, dS}$$

η μεταβολή οφείλεται σε δύο βαθμωτές ποσότητες μια όγκου και μια επιφανειακή

$$\text{Θ.Cauchy: } C(\vec{x},t,\hat{n}) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{υπάρχει κατάλληλο διάνυσμα}}}{\vec{c}}\cdot\hat{n} = \underbrace{c(x,e_i)}_{c_i} n_i$$

μέσω της ανάλυσης σε τετράεδρο (βλ. προηγούμενο μάθημα)

Έτσι στο συγκεκριμένο πρόβλημα

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\vec{u}\,dV = \int_V \rho\vec{f}\,dV + \int_\Sigma \vec{\Sigma}\,dS$$

$$\Sigma_i(\hat{n}) = \Sigma_{ij}(\vec{x},e_i)\,n_j$$

• Βασική σχέση στη μηχανική των ρευστών

$$\Sigma_i(\hat{n}) = \sigma_{ij}\, n_j$$

$$\rho\frac{du_i}{dt} = \rho f_i + \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

κατά την κίνηση

όπου $\frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$

- Ισορροπία $\Leftrightarrow \vec{u}=0 \Leftrightarrow \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$

- Ισχύει ότι σ: συμμετρικός τανυστής

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_V \rho(\vec{r}\times\vec{u})_i\, dV}_{\text{στροφορμή}} = \int_V (\vec{r}\times\rho\vec{f})_i\, dV + \underbrace{\int_S \varepsilon_{ijk}\, x_j\, \sigma_{kl}\, n_l\, dS}_{\int_V \varepsilon_{ijk}\, r_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l}\, dV}$$

$$\text{στροφορμή} = 0$$

Έτσι περνώνται το d/dt εντός της ολοκλήρωσης

$$\int_V \varepsilon_{ijk}\, x_j\, \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l}\, dV = \int_S \varepsilon_{ijk}\, x_j\, \sigma_{kl}\, dS\, n_l = \int_V \varepsilon_{ijk}\, dV \frac{\partial}{\partial x_l}(x_j \sigma_{kl})$$

$$= \int \varepsilon_{ijk}\left(\delta_{lj}\,\sigma_{kl} + \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l}\, x_j\right) dV$$

αυτός ο όρος
εξισορροπείται
από τον όρο της
δύναμης $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = -\rho f_i$

Συνεπώς $0 = \int \varepsilon_{ijk}\, \sigma_{kl}\, dV$

$\rightarrow \sigma_{kl} = -\sigma_{lk}$ (συμμετρικός)

- Σε κατάσταση ηρεμίας $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$

Ο σ είναι ένας συμμετρικός πίνακας με 6 ανεξάρτητα στοιχεία.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ & & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

Διαγωνιοποιώντας τον $\quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1' & & 0 \\ & \sigma_2' & \\ 0 & & \sigma_3' \end{pmatrix}$

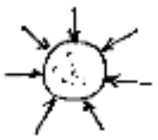
ίχνος του αρχ. πίνακα

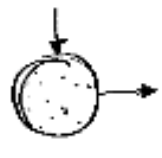
$$= \begin{pmatrix} \frac{\sigma_{ii}}{3} & & 0 \\ & \frac{\sigma_{ii}}{3} & \\ 0 & & \frac{\sigma_{ii}}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_1' - \frac{\sigma_{ii}}{3} & & 0 \\ & \sigma_2' - \frac{\sigma_{ii}}{3} & \\ 0 & & \sigma_3' - \frac{\sigma_{ii}}{3} \end{pmatrix}$$

$= \frac{\sigma_{nn}}{3}\delta_{ij} \; +$ υπόλοιπο το οποίο θα πρέπει να ισούται με μηδέν.

$\downarrow$

ισότροπες δυνάμεις





κάποιες θετικές
κάποιες αρνητικές

αφού όμως είναι ρευστό αυτό δεν δέχεται τέτοιες δυνάμεις παραμόρφωσης γιατί αλλιώς θα ρεύσει

• Σωματικά σε ηρεμία

$$\rho\vec{F} = \vec{\nabla} p \qquad \left(\text{αφού } \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_j}\delta_{ij} = -\nabla_i p\right)$$

• Υδροστατική ισορροπία

$\vec{\nabla} p \perp$ στην επιφάνεια σταθ. πίεσης

$\Rightarrow \vec{F} \perp$ επιφ. σταθ. πίεσης

$$\vec{\nabla}\times(\rho\vec{F}) = \vec{\nabla}\times\vec{\nabla} p = 0$$

αν $\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi$

$$\vec{\nabla}\rho \times \vec{\nabla}\phi = 0 \Rightarrow$$

ισόπυκνες παράλληλες με ισοδυναμικές επιφάνειες. (δηλαδή επιφάνειες σταθ. ϕ = επιφάνειες σταθ. ρ)

$$\phi = \phi(\rho)$$

Επίσης: $-\rho\nabla\phi = \nabla p \Rightarrow p = p(\phi)$ ή $p(\rho)$

$$-\rho\nabla\phi\cdot d\vec{x} = \nabla p\cdot d\vec{x}$$

$$-\rho\, d\phi = dp \Rightarrow$$

$$dp/d\phi = -\rho$$

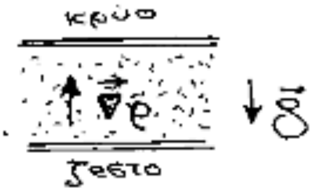
Έτσι σε μια ήρεμη ατμόσφαιρα

$$\frac{dp}{dz} = -g\rho$$

(α) έστω $\rho \simeq$ σταθ (ωκεανός)

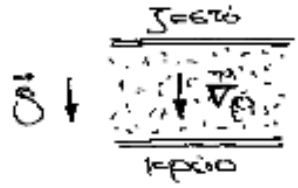
(β) έστω $p = \rho R T$ (αέριο)

$$p = p_0 e^{-z/H} \qquad H = \frac{RT}{g} \simeq 8\text{km}$$ (για ατμόσφαιρα)

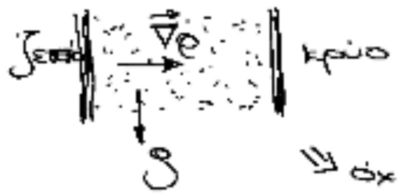
• 

ασταθής

$$\left.\begin{array}{l}\vec{\nabla}\rho \times \vec{\nabla}\phi = 0 \\ \vec{\nabla}\phi = -\vec{g}\end{array}\right\} \vec{\nabla}\rho \parallel \vec{g}$$



ευσταθής



$\Downarrow$ όχι ηρεμία

• αστέρι

$$\left.\begin{array}{l}\nabla^2\phi = 4\pi G\rho \\ \parallel \\ -\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{\nabla}p}{\rho}\right)\end{array}\right\} \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{\nabla}p}{\rho}\right) = -4\pi G\rho$$

με πολυτροπικές εξισώσεις

$$p = K\rho^{1+1/n}$$

$$n \geq 0$$

$$n = 0 \Leftrightarrow \rho = \text{σταθ.}$$

Ψάχνοντας για σφ. συμμετρικές λύσεις $\rho(r)$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dp}{dr}\right) = -4\pi G\rho \quad \text{(εξίσωση Lane-Emden)}$$

Άσκηση: Να λυθεί για $n=0$ η παραπάνω εξίσωση.

- Αρχή Αρχιμήδη

έστω ένα ρευστό σε ένα δυναμικό φ.

Αν η μάζα ◯ ήταν από το ίδιο υγρό

$$-\rho\nabla\phi = \nabla p$$

$$\underbrace{-\int_S p\hat{n}\,dS}_{\substack{\parallel \\ \text{δύναμη} \\ \text{στην εξωτ. επιφάνεια}}} = -\int_V \vec{\nabla} p\, dV = \underbrace{\rho\int \vec{\nabla}\phi\, dV}_{\substack{\text{βάρος} \\ \text{εκτοπιζόμενου υγρού}}}$$

- Έστω περιστρεφόμενο δοχείο

$$\phi = gz - \frac{1}{2}\Omega^2(x^2+y^2)$$

και έστω μεταβλητή πυκνότητα

> **Άσκηση**
>
> ▶ Ένα σώμα με πυκνότητα όση η μέση πυκνότητα σε κάποιο σημείο του ρευστού θα ισορροπεί σε οποιοδήποτε σημείο εκτός του άξονα?

- Συζήτηση για τανυστές

$$\sigma_{ij} = f\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$$ για λόγους γαλιλαϊκής συμμετρίας

- 

$$\int_S \Sigma_i n_i\, dS = \int_S \sigma_{ij} n_j n_i\, dS = \sigma_{ij}\int n_i n_j\, dS$$

$$\hat{n} = \hat{z}\cos\theta + \hat{x}\sin\theta\cos\phi + \hat{y}\sin\theta\sin\phi$$

$$\int = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sin\theta \underset{\substack{\| \\ 1}}{R^2} \; n_i n_j$$

π.χ. $i=j=1$ $\quad \int = \frac{2\pi}{2} \int_0^{\pi} \sin^3\Theta \, d\theta = \pi(-)\int_0^{\pi} (1-\cos^2\theta)\, d(\cos\theta)$

$$= -\pi \int_1^{-1} dx (1-x^2)$$

$$= \pi\left(2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{4\pi}{3}$$

$i=1, j=2 \quad \int = 0$

παράλληλα $\int n_i n_j \, dS = \delta_{ij} A \quad \left(A = \frac{4\pi}{3}\right)$

από το ίχνος

$$4\pi = \int |\hat{n}|^2 dS = 3A$$

$$A = \frac{4\pi}{3}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{μέση}\perp\text{δύναμη}}}{\frac{\int \Sigma_i n_i \, dS}{4\pi\varepsilon^2}} = \frac{4\pi/3 \; \varepsilon^2}{4\pi\varepsilon^2} \sigma_{ii} = \underbrace{\frac{1}{3} Tr(\sigma)}$$

$\Rightarrow p =$ μέση κάθετη δύναμη