Τρίτη 29/11/2005 (Π. Ιωάννου)

Νέο αντικείμενο: Μηχανική Συνεχών Μέσων

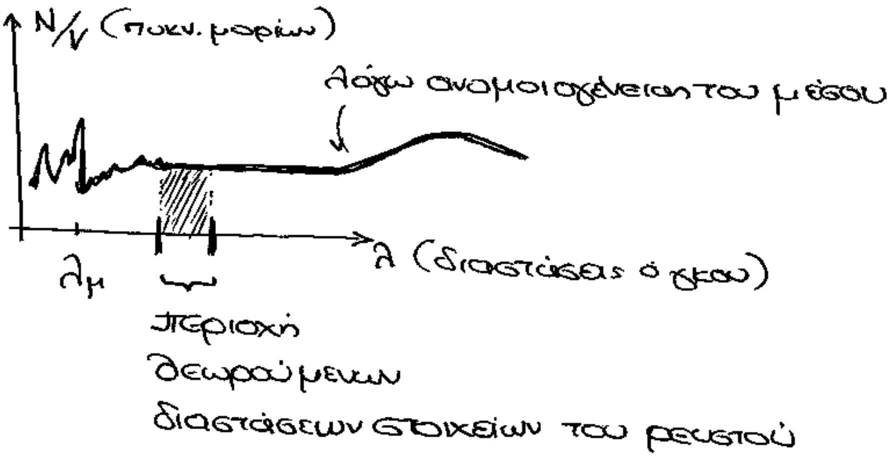
- Βιβλιογραφία: (α) Fluid Dynamics (Landau, Lifshitz) Pergamon
  (b) " " (Batchelor) CUP

- Έννοια του συνεχούς μέσου (παραδείγματα - στερεά, υγρά, αέρια)

ρευστό = συνεχές μέσο (δεν ασχολούμαστε με την ατομική δομή)

→ λ (χαρακτηριστικές διαστάσεις ρευστού) $\gg$ λ_μ (διαστάσεις μοριακών δυνάμεων)

→



για παράδειγμα ένα τέτοιο στοιχείο ρευστού μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχει διαστάσεις $(1\mu)^3$ που περιλαμβάνει 10^{10} μόρια νερού ή 10^7 μόρια αέρα.

? πόσο μικρό μέγεθος μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει ένα τέτοιο στοιχείο; [Απ: απόκλιση από τη μέση κατάσταση $= 1/\sqrt{N} < 10\% \Rightarrow N \simeq 100$]
$\Rightarrow \lambda \simeq$ μερικά Å

• Στη συνέχεια θα αγνοήσουμε τη μοριακή δομή και θα περιγράφουμε το μέσο ως συνεχές:

Θα χρησιμοποιούμε τα πεδία

$\rho(\vec{x},t)$	πυκνότητα
$u(\vec{x},t)$	ταχύτητα ρευστού (όχι μορίων)
$T(\vec{x},t)$	θερμοκρασία
$p(\vec{x},t)$	πίεση
$S(\vec{x},t)$	εντροπία

• Το ρευστό μπορεί να αντισταθεί σε εξωτερικές δυνάμεις (εν αντιθέσει προς ένα στερεό) να αλλάξει ο όγκος του δίχως να κινηθεί.

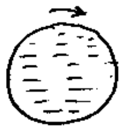
π.χ. 

Συγκρίνοντας τους λόγους

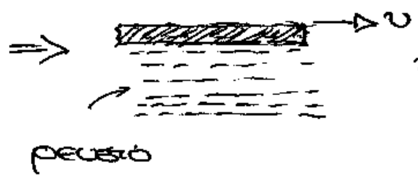
$$\frac{\tau \text{ (χαρακτ. χρόνος αναδιάταξης μορίων)}}{T \text{ (χρόνος αναδιάταξης λόγω εξωτ. δύναμης)}} \quad \begin{matrix} \gg 1 & \text{στερεό} \\ \ll 1 & \text{ρευστό} \end{matrix}$$

Η σχέση εφαρμοζόμενης δύναμης και ταχύτητας ρευστού κατατάσσει τα ρευστά σε παχύρευστα και νευτώνεια. (αυτό που γνωρίζουμε από την εμπειρία μας)

• Ιξώδες



στρέφονται μια σφαίρα γεμάτη με νερό αρχικά ακίνητο το νερό θα τεθεί σε περιστροφή που τελικά θα το θέσουν σε σταθερή γωνιακή ταχύτητα



θα μεταφερθεί ορμή στα κάτω στρώματα

$F = \mu \upsilon / H$ (για να επιτευχθεί στα θερή ταχύτητα)

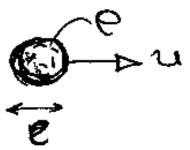
$\mu = 0.01$ Pois (νερό)

$\mu = 1.8 \times 10^{-4}$ Pois (αέρα) $\rightarrow$ g/cm/s

$\nu = \mu/\rho \simeq$ ίσο για όλα τα ρευστά

• χρήσιμη η αδιαστατικοποίηση

στα ρευστά αδιάστατος αριθμός = αριθμός Reynolds: $\mathcal{R}$



χαρακτ. χρόνος $t \simeq \ell/u$

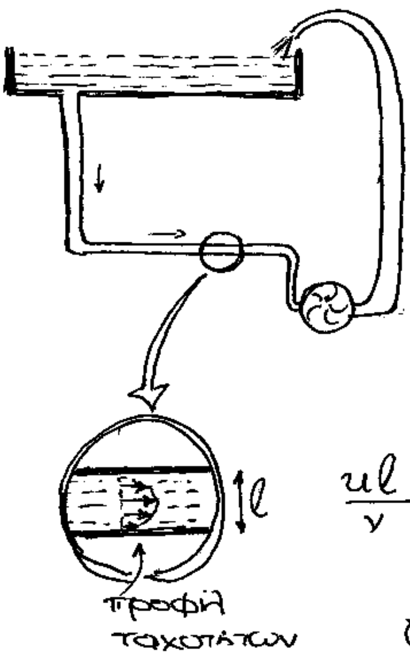
αδραν. δύναμη $\rho \ell^3 \frac{u^2}{\ell} \sim \rho \ell^2 u^2$

δύναμη ιξώδους $\underbrace{\mu \frac{u}{\ell} \ell^2}_{dF = \mu \frac{\partial u}{\partial x} dA} \sim \mu \ell u$

$$\mathcal{R} = \frac{\rho \ell^2 u^2}{\mu \ell u} = \frac{\rho}{\mu} \ell u = \frac{\ell u}{\nu}$$

ν ← κινημ. ιξώδες

• Συζήτηση για τη διάταξη του Reynolds (1890's)



$\frac{u\ell}{\nu}$ = Reynolds

για μικρά R   στρωτή ροή $\longrightarrow$
ενδιάμεσα R   ανάδευση
μεγάλα R   τυρβώδης

$R_{critical} = 1800$ (αλλάζει με τον εξωτερικό θόρυβο)

• Παρατηρήσεις του Kline (1960) έδειξαν ότι η τυρβώδης κατάσταση έχει δομή και δεν είναι ομογενής και ισοτροπική (όπως σε ένα αέριο). Μάλιστα η δομή αυτή είναι καθολική (universal)

• Παράλληλα οι μετεωρολόγοι είχαν παρατηρήσεις τυρβώδους ροής στην ατμόσφαιρα από το 1870-1880. και βλέπαν συγκεκριμένες δομές (κυκλώνες)

• Ο Rossby (1930) άρχισε να περιγράφει τις δομές αυτές και την εξέλιξή τους ως σύμφωνες (coherent) καταστάσεις.

• Fluid Mechanics (Prandtl) Dover

Βιβλίο που περιγράφει και εξηγεί φαινόμενα.

• Εξίσωση συνέχειας (ισχύει στην περίπτωση του ensemble fluid)

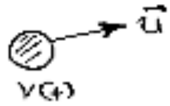
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u}) = 0$$

ή $$\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} + \vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0 \qquad \left(\text{αφού } \frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\rho\right)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \text{ρυθμός μεταβολής όγκου}$$

• Νόμος Νεύτωνα για ρευστό

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho\vec{u}\,dV = \vec{F}_{\text{εξωτ}} = \vec{F}_{\text{πεδίων}} + \vec{F}_{\text{εσωτ. πιέσεις}}$$



π.χ. για βαρύτητα

$$-\int \rho\vec{\nabla}\phi\,dV$$

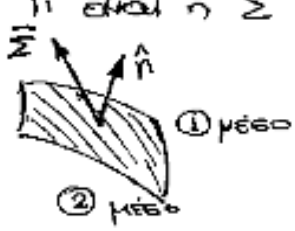
π.χ. επιφανειακές δυνάμεις

$$\vec{\Sigma}(\hat{n},\vec{x},t)$$

κάθετη στην επιφάνεια

$$= -\int_{V(t)} \rho\vec{\nabla}\phi\,dV + \int_{S(t)} \vec{\Sigma}(\hat{n},\vec{x},t)\,dS$$

• Τι είναι η $\vec{\Sigma}$?



$\vec{\Sigma}$ ασκείται από το (1) στο (2) μέσο

$$\vec{\Sigma}(\hat{n},\vec{x},t) = -\vec{\Sigma}(-\hat{n},\vec{x},t)$$ 3ος νόμος Νεύτωνα

Cauchy, Fresnel έδειξε ότι $\Sigma_i = \sigma_{ij}(\vec{x},t)\,\hat{n}_j$ (σ_{ij}: τανυστής τάσης)

Απόδειξη των Cauchy-Fresnel για την κατασκευή των $\vec{\Sigma}$:

αδραν. δυνάμεις / δυνάμεις πεδίων / επιφ. δυνάμεις

$$\int dV \ldots \xrightarrow{r\to 0} r^3 \qquad \int dV \ldots \xrightarrow{r\to 0} r^3 \qquad \int ds\, \vec{\Sigma}$$

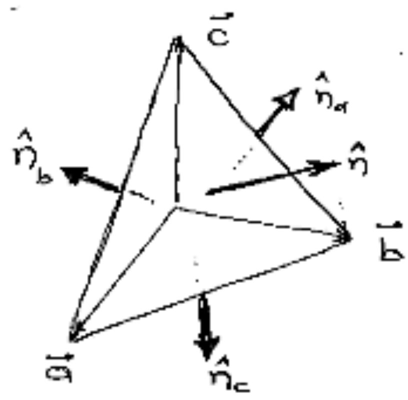
$$\Sigma_i(\hat{n},\vec{x},t) = \Sigma_i(\hat{n},\vec{x}_0,t) + (\vec{x}-\vec{x}_0)_j \left.\frac{\partial \Sigma_i}{\partial x_j}\right|_{\vec{x}_0} + \ldots$$

$$\int ds\, \vec{\Sigma} = \int ds\left(\underbrace{\Sigma_i(\hat{n},\vec{x}_0,t)}_{\substack{\downarrow\, r\to 0 \\ r^2}} + (\vec{x}-\vec{x}_0)_j \frac{\partial \Sigma_i}{\partial x_j} \ldots\right)$$

r^2 (λόγω ανισορροπ. με τους άλλους όρους δυνάμεων)

$\Rightarrow\ = 0$

Από την ανάλυση του μηδενικού αυτού όρου σ'ένα τετράεδρο



$$\vec{\Sigma}(\hat{n})dA_n + \vec{\Sigma}(-\hat{a})dA_a + \vec{\Sigma}(-\hat{c})dA_c + \vec{\Sigma}(-\hat{b})dA_b = 0$$

$$\vec{\Sigma}(\hat{n}) = \vec{\Sigma}(\hat{a})\frac{dA_a}{dA_n} + \vec{\Sigma}(\hat{b})\frac{dA_b}{dA_n} + \vec{\Sigma}(\hat{c})\frac{dA_c}{dA_n}$$

$$= \vec{\Sigma}(\hat{a})\,\hat{n}\cdot\hat{a} + \vec{\Sigma}(\hat{b})\,\hat{n}\cdot\hat{b} + \vec{\Sigma}(\hat{c})\,\hat{n}\cdot\hat{c}$$

$$\Sigma_i(\hat{n}) = \left(\Sigma_i(\hat{a})\hat{a}_j + \Sigma_i(\hat{b})\hat{b}_j + \Sigma_i(\hat{c})\hat{c}_j\right)\hat{n}_j = \sigma_{ij} n_j$$

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho u_i \, dV = + \int_{V(t)} \rho F_i \, dV + \int_{S(t)} \sigma_{ij} n_j \, dS$$

$$\parallel$$

$$\int_{V(t)} \rho \frac{du_i}{dt} \, dV = \int_{V(t)} \rho F_i \, dV + \int_{V(t)} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \, dV$$

παρακολουθώντας το ρευστό

$V(t) \to 0$: $\quad \rho \dfrac{du_i}{dt} = \rho F_i + \dfrac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$

ΑΣΚΗΣΗ:

(1) $\displaystyle\int_{\text{σφαίρα}} n_i n_j \, dS = ?$

(2) $\displaystyle\int_{\text{σφαίρα}} n_i n_j n_k n_l \, dS = ?$

(3) δ_{ij} είναι τανυστής ισότροπος

(4) ε_{ijk} " " "

(5) Δεν υπάρχει ισότροπος τανυστής τάξης 1

(6) δ_{ij} ο μόνος ισότροπος τάξης 2

• Υδροστατική $(\vec{u} = 0)$

$\sigma_{ij} = -p\,\delta_{ij}$ (ισοτροπική πίεση) Θα δειχθεί παρακάτω

• Έστω δυο ορθοκανονικά συστήματα Σ, Σ'

$\vec{x} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}'$

$x' = x(\hat{i}\cdot\hat{i}') + y(\hat{j}\cdot\hat{i}') + z(\hat{k}\cdot\hat{i}')$

γενικά $x'_i = a_{ij} x_j$

$x_j = x'_i a_{ij}$

διάνυσμα ξ_i όταν $\xi'_i = a_{ij}\xi_j$ σε στροφές

τανυστής T_{ij} " $T'_{ij} = a_{ik} a_{jl} T_{kl}$ σε στροφές

σαν να ήταν γινόμενο διανυσμάτων