22.11.2005

Εξίσωση έλικας : ο ευκολότερος τρόπος είναι σε κυλινδρικές συντεταγμένες $\left(r=a,\ \theta,\ z=\frac{h}{2\pi}\theta\right)$ είναι καμπύλη και γι' αυτό έχει μόνο μία παράμετρο. Η παράμετρος αυτή είναι το θ και το βήμα της έλικας h.

Στην περίπτωση της ελικοειδούς κατανομής μάζας η λαγκρανζιανή του σωματιδίου θα είναι

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}m\left[\dot r^2+r^2\dot\theta^2+\dot z^2\right]-V\left(r,\ z-\frac{h}{2\pi}\theta\right)$$ ώστε αυτή η

λαγκρανζιανή να έχει ελικοειδή συμμετρία. Για μετασχηματισμό

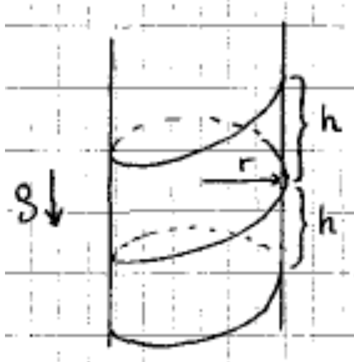
$$\left\{\begin{array}{ll} Z(\varepsilon)=z+\varepsilon, & K_z=1 \\ \Theta(\varepsilon)=\theta+\varepsilon\frac{2\pi}{h}, & K_\theta=\frac{2\pi}{h} \end{array}\right\}$$

έχουμε συμμετρία.

Διατηρούμενη ποσότητα: $\quad p_z K_z + p_\theta K_\theta = ct$

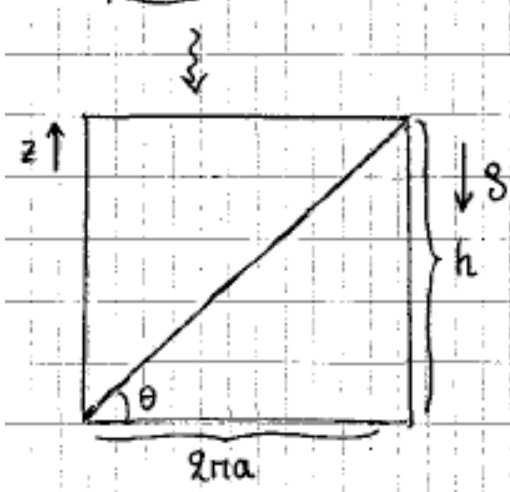
όπου $p_z=m\dot z$ και $p_\theta=mr^2\dot\theta$ η στροφορμή

δηλαδή η ποσότητα $\ P_z+\frac{2\pi}{h}L_z\ $ διατηρείται (L_z: στροφορμή ως προς τον z-άξονα).



Αν "κόψουμε" τον κύλινδρο σε μία παράλληλη του z άξονα η έλικα γίνεται ευθεία! Επομένως σωματίδιο που κινείται πάνω στην έλικα σε βαρυτικό πεδίο έχει επιτάχυνση $g\cdot\sin\theta$ (βλ. σχήμα)

$$g\sin\theta=g\frac{h}{\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}}\qquad (r=a)$$



Η λαγκρανζιανή του σωματιδίου είναι

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}m\left[a^2\dot\theta^2+\frac{h^2}{(2\pi)^2}\dot\theta^2\right]-mg\frac{h}{2\pi}\theta$$

ή $$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\left[a^2+\frac{h^2}{4\pi^2}\right]\dot\theta^2-\frac{gh}{2\pi}\theta$$

και οι εξισώσεις κίνησης είναι: $\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\theta} = \left(a^2+\dfrac{h^2}{4\pi^2}\right)\dot\theta \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -\dfrac{gh}{2\pi}\end{array}\right\}\ \ddot\theta = -\dfrac{gh}{2\pi\left(a^2+\dfrac{h^2}{4\pi^2}\right)}$

$\rightarrow \ddot\theta = -\dfrac{gh}{2\pi a^2 + h^2/2\pi}$ σταθερή επιτάχυνση

και $\ddot z = -g\dfrac{h^2}{4\pi^2 a^2+h^2}$

Εδώ γράψαμε τη λαγκρανζιανή σωματιδίου που δεν είναι ελεύθερο: επιβάλαμε την εξίσωση της έλικας στη λαγκρανζιανή του ελεύθερου σωματιδίου και βρήκαμε το σωστό αποτέλεσμα. Κατά πόσον όμως αυτή η διαδικασία είναι σωστή;
Έχουμε θέσει έναν δεσμό. Αυτή η αντιμετώπιση είναι φαινομενολογική: στη φύση δεν υπάρχουν δεσμοί, αν η χάντρα έχει αρκετή ορμή θα σπάσει το ελικοειδές σύρμα και θα ξεφύγει. Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε ότι υπάρχει ένα δυναμικό ελατηρίου (με K πολύ μεγάλο) που κρατάει το σωμάτιο στην ελικοειδή τροχιά:

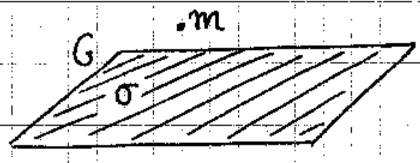
$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}m\left[\dot r^2+r^2\dot\theta^2+\dot z^2\right] - mgz - \frac{1}{2}K\left(z-\frac{h}{2\pi}\theta\right)^2$$

Αν $K\to\infty$ η $\mathcal{L}'$ (και αντιστοίχως οι εξισώσεις κίνησης) είναι απολύτως ισοδύναμη με τη $\mathcal{L}$, δηλαδή με τη λαγκρανζιανή στην οποία θεωρήσαμε το δεσμό. Συνεπώς αν $K\to\infty$ το σωμάτιο δεν ξεφεύγει από την έλικα, αν το σωμάτιο έχει πεπερασμένη ενέργεια.
Ουσιαστικά όταν $K\to\infty$, $z\to\frac{h}{2\pi}\theta$ έτσι ώστε ο τελευταίος όρος της $\mathcal{L}'$ να γίνεται ένας σταθερός όρος.

Επιστρέφουμε στο πρόβλημα της βαρυτικής ύλης κατανεμημένης σε άπειρο επίπεδο. Ποια είναι τότε η λαγκρανζιανή σωματιδίου;

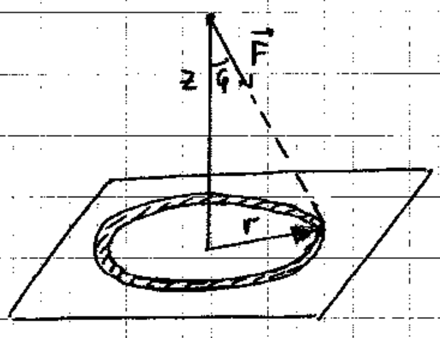
$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m(\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}) - m(2\pi G\sigma)|z|$ δεν υπάρχει αναλλοιότητα σε μεταθέσεις στον άξονα z.

σ: επιφανειακή πυκνότητα μάζας



Το δυναμικό εξάγεται και από το νόμο του Gauss και με ολοκλήρωση.

Αναλόγως στην περίπτωση του κυλίνδρου το δυναμικό είναι ανάλογο του $\ln\frac{a}{r}$, α: μία σταθερά.



$dm = 2\pi\sigma r dr$ μάζα δακτυλίου πάχους dr

Η δύναμη λόγω συμμετρίας είναι στον άξονα z

$$F\cos\varphi = -\frac{G\sigma r d\theta dr}{(r^2+z^2)^{3/2}} z$$ (δύναμη στο z από στοιχείο μάζας πάνω στον δακτύλιο)

Άρα η δύναμη από τον δακτύλιο είναι

$$F_{dr} = -2\pi G\sigma z \frac{r dr}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$ και η ολική δύναμη από ολόκληρο το επίπεδο είναι

$$F = \int_0^\infty (-2\pi G\sigma z)\frac{d(r^2+z^2)}{2(r^2+z^2)^{3/2}} = -2\pi G\sigma z\left[-\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}\right]_0^\infty$$

άρα $F = -2\pi G\sigma\frac{z}{\sqrt{z^2}} = -2\pi G\sigma\cdot \mathrm{sgn}(z)$

και $-\frac{dV}{dz} = F = -2\pi G\sigma \,\mathrm{sgn}(z) \Rightarrow \boxed{V = 2\pi G\sigma z}$

* Πώς μπορώ να βγάλω το ίδιο αποτέλεσμα ολοκληρώνοντας το δυναμικό από στοιχειώδη μάζα dm: $\Phi_\delta = -\frac{G r dr 2\pi\sigma}{\sqrt{r^2+z^2}}$;

Σημ. στην επόμενη διάλεξη θα μιλήσουμε για πολυπολικές ροπές.

Επιστρέφουμε στο τελευταίο πρόβλημα της προηγούμενης διάλεξης.

$$L = \frac{1}{2}\sum_i m_i |\dot{\vec{x}}^{(i)}|^2 - \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} V\left(|\vec{x}^{(i)} - \vec{x}^{(j)}|\right)$$

$$\vec{X}^{(i)}(\varepsilon) = \vec{x}^{(i)} + \varepsilon \vec{V}\cdot t$$

Τώρα θα δείξουμε ότι και στην περίπτωση που ο μετασχηματισμός επάγει μετασχηματισμό βαθμονόμησης στην L έχουμε και πάλι διατηρούμενη ποσότητα.

Έστω μετασχηματισμός $\begin{cases} Q_i(\varepsilon) = q_i + \varepsilon K_i(q,t) \\ T = t \end{cases}$

Βρήκαμε $L_\varepsilon = L\left(Q(\varepsilon), \dot{Q}(\varepsilon), t\right)$ και επίσης ότι

$$\left.\frac{\partial L_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{dt}\left(p_i K_i\right)$$

Αν δεν υπάρχει μεταβολή σε τάξη ε τότε $\left.\frac{\partial L_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0$ και η

ποσότητα $p_i K_i$ διατηρείται. Τώρα βρίσκουμε ότι μπορεί να επάγεται στη L ένας μετασχημός βαθμονόμησης:

$$\left.\frac{\partial L_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{dt}G = \frac{d}{dt}\left(K_i p_i\right)$$

και στην περίπτωση που εξετάσαμε στην προηγούμενη διάλεξη $G = \sum m_i \vec{x}^{(i)}\cdot\vec{V}$. Τώρα λοιπόν διατηρείται η ποσότητα:

$p_i K_i - G$. Ο μετασχηματισμός του Γαλιλαίου λοιπόν αποτελεί <u>ημισυμμετρία</u>.

Είναι λοιπόν $\vec{K}^{(i)} = \vec{V}t$ και $\sum_i \vec{V}\cdot\vec{p}^{(i)}\cdot t - \vec{V}\sum_i m_i \vec{x}^{(i)}$

είναι η διατηρούμενη ποσότητα.

$\rightarrow \quad \vec{V}\left[t\sum_i \vec{p}^{\,(i)} - M\vec{X}\right] = ct$

όπου $\quad M = \sum_i m_i \quad$ και $\quad \vec{X} = \dfrac{\sum_i m_i \vec{x}^{(i)}}{M}$ διάνυσμα κέντρου μάζας

άρα $\quad t\,\vec{P}^{ολ} - M\vec{X} \rightarrow$ διατηρείται , $\quad \vec{P}^{ολ}$: ολική ορμή.

Η ολική ορμή διατηρείται, άρα το κέντρο μάζας εκτελεί ομαλή κίνηση.

Άρα διατηρούνται: $\left.\begin{array}{ll} \vec{P}_{ολ} & \text{(3 συνιστώσες)} \\ \vec{L}_{ολ} & \text{(3 συνιστώσες)} \\ M\vec{X}_{KM} - \vec{P}_{ολ} t & \text{(3 συνιστώσες)} \end{array}\right\}$ διατήρηση 9 ποσοτήτων

$\rightarrow$ Η 10η ποσότητα που διατηρείται είναι η ενέργεια.

Θεωρώ έναν χωροχρονικό μετασχηματισμό $\begin{cases} Q_i = q_i + \varepsilon K_i(q,t) \\ T = t + \varepsilon \tau(q,t) \end{cases}$

$$S_\varepsilon = \int_{T_1}^{T_2} L\left(Q, \frac{dQ}{dT}, T\right) dT \quad \text{και} \quad S_0 = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q, \frac{dq}{dt}, t\right) dt$$

Συμμετρία έχω όταν $\quad S_\varepsilon - S_0 = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$.

$\rightarrow Q = Q(q, \varepsilon, t)$: με ανάλογο τρόπο όπως στην απόδειξη του Θ. Liouville μπορώ να κάνω την ολοκλήρωση στον αρχικό χώρο.

$$\int_{T_1}^{T_2} L\left(Q, \frac{dQ}{dT}, T\right) dT = \int_{t_1}^{t_2} L\left(Q, \frac{dQ}{dt}\cdot\frac{dt}{dT}, T(t,\varepsilon)\right) \frac{dT}{dt}\cdot dt$$

$\dfrac{dT}{dt} = 1 + \varepsilon\dot{\tau} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dt}{dT} = \dfrac{1}{1+\varepsilon\dot{\tau}} \simeq 1 - \varepsilon\dot{\tau}$ οπότε είναι

$$\frac{dQ_i}{dT} = (\dot{q}_i + \varepsilon\dot{K}_i)(1 - \varepsilon\dot{\tau}) = \dot{q}_i + \varepsilon\left(\dot{K}_i - \dot{\tau}\dot{q}_i\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$S_\varepsilon = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\left(q_i+\varepsilon K_i,\ \dot q_i + \varepsilon(\dot K_i - \dot\tau \dot q_i),\ t+\varepsilon\tau\right)(1+\varepsilon\dot\tau)\,dt$$

και αναπτύσσω αυτήν την ποσότητα κατά Taylor:

$$S_\varepsilon = S_0 + \varepsilon \underbrace{\int_{t_1}^{t_2}\left[\dot\tau \mathcal{L}(q,\dot q,t) + K_i\frac{\partial\mathcal L}{\partial q_i} + p_i(\dot K_i - \dot\tau\dot q_i) + \frac{\partial \mathcal L}{\partial t}\tau\right]dt} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Η Noether παρατήρησε ότι αυτό είναι χρονική παράγωγος

$\frac{\partial \mathcal L}{\partial q_i} = \dot p_i$ και εμφανίζονται οι όροι $K_i\dot p_i$, $\dot K_i p_i$: $K_i\dot p_i + \dot K_i p_i = \frac{d}{dt}(K_i p_i)$

$$\left\{\begin{array}{l} S_\varepsilon = S_0 + \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(K_i p_i)\,dt + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ \text{Συμμετρία: ο όρος τάξης } \varepsilon \text{ μηδενίζεται οπότε} \\ \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(K_i p_i)\,dt = 0 \Rightarrow K_i p_i(t_2) = K_i p_i(t_1) \end{array}\right\}$$

Διατήρηση του $K_i p_i$ αν δεν είχαμε τους υπόλοιπους όρους

Τώρα με τους υπόλοιπους όρους: $\dot\tau \mathcal L + \frac{\partial \mathcal L}{\partial t}\tau - \dot\tau \dot q_i p_i$

$$\frac{d}{dt}(\mathcal L\tau) = \mathcal L\dot\tau + \frac{d\mathcal L}{dt}\tau = \mathcal L\dot\tau + \frac{\partial \mathcal L}{\partial t}\tau + \frac{\partial \mathcal L}{\partial q_i}\dot q_i \tau + \frac{\partial \mathcal L}{\partial \dot q_i}\ddot q_i \tau$$

$$= \mathcal L\dot\tau + \tau \dot p_i \dot q_i + \tau p_i \ddot q_i + \frac{\partial \mathcal L}{\partial t}\tau$$

Άρα $\dot\tau \mathcal L + \frac{\partial \mathcal L}{\partial t}\tau - \dot\tau \dot q_i p_i = \frac{d}{dt}(\mathcal L\tau) - \tau\dot p_i \dot q_i - \tau p_i \ddot q_i - \dot\tau \dot q_i p_i =$

$= \frac{d}{dt}(\mathcal L\tau) - \frac{d}{dt}(\tau p_i \dot q_i)$ οπότε δείξαμε ότι

$\left.\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left[K_i p_i - \tau E\right] dt$ αν ορίσω την ενέργεια

$\boxed{E = p_i \dot q_i - \mathcal L}$ Στασιμότητα δράσης γύρω από τη φυσική τροχιά: η ποσότητα $\boxed{\sum_i K_i p_i - E\tau}$ διατηρείται.

Αυτό είναι το γενικευμένο θεώρημα της Noether για την περίπτωση του γενικότερου μετασχηματισμού

$$\begin{cases} Q_i = q_i + \varepsilon K_i(q,t) \\ T = t + \varepsilon \tau(q,\varepsilon) \end{cases}$$

Ειδική περίπτωση: $\tau = 1 \rightarrow \begin{cases} Q_i = q_i \\ T = t + \varepsilon \end{cases}$ δηλαδή $K_i = 0$

οπότε η ποσότητα που διατηρείται είναι η ενέργεια.