$\boxed{19.10.2005}$

1) Θ. Μηχανική (Χατζηιωάννου), σημ. Feynmann στη Μηχ1 intern
2) Στοιχεία Θεωρητικής Μηχανικής
3) Landau ★★★
4) Goldstein
5) Sommerfeld: Mechanics ★★★ τόμος os Hydrodynamics
6) Saletan & Cromer: Mechanics ★★★ ιδ. για θεωρητικούς
↳ Theoretical Mechanics υπάρχει στον τομέα
7) Arnold ★★★★ Mathematical Methods of Classical Mechanics
8) Kibble ★★ Μηχανική ΘΕΔΒ ή τελ. έκδ. στα Αγγλικά
9) Synger & Griffith ★★ εισαγωγικό
10) Feynmann lectures on Physics

3ος N.N.: Δυναμική σημείων → δυναμική εκτεταμένων σωμ. (αίτιο εισαγωγής 3ου N.N.) δηλ. ένα σώμα δεν μπορεί να έχει "αυτοδύναμη"

$\boxed{m\ddot{\vec{x}} = -\vec{\nabla}V}$ καρτεσιανά συστήματα και αδρανειακά συστήματα (2ος N.N.)

Δεν αποτελεί ορισμό των δυνάμεων, αλλά τις θεωρεί δεδομένες!

Ορίζω $\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}m|\dot{\vec{x}}|^2}$ Λαγκρανζιανή

Ο 2ος N.N. δεν είναι αναλλοίωτος, ισχύει μόνο σε καρτεσιανά συστήματα.

Προσπαθούμε να βρούμε αν μπορεί ο 2ος N.N. να μετασχηματιστεί ώστε να είναι αναλλοίωτος. Ορίζω λοιπόν την Λαγκρανζιανή:

$$\mathcal{L}(\vec{x},\dot{\vec{x}},t) = \frac{1}{2}m|\dot{\vec{x}}|^2 - V(\vec{x},t)$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0} \Leftrightarrow \boxed{m\ddot{\vec{x}} = -\vec{\nabla}V} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}}$$ ορίζοντας $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}$ γενικευμένη ορμή

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = \frac{1}{2}m\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}(\dot{x}_\beta \dot{x}_\beta) = m\dot{x}_\beta \delta^\beta_i = m\dot{x}_i$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \frac{\partial V}{\partial x_i}$$ άρα ισχύουν οι εξ. Euler-Lagrange

→ Έστω πολικές συν/νες: $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $\theta = \tan^{-1}\frac{x_2}{x_1}$

τότε οι εξισώσεις κίνησης για οποιεσδήποτε νέες συντεταγμένες $x_i \to q_i(x_i,t)$ γίνονται

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0}$$ ΣΕ ΟΠΟΙΟΔΗΠΟΤΕ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝ/ΝΩΝ

π.χ. $(x_1, x_2) \to (r,\theta)$ ή $(x_1,x_2) \to (r, \theta - \omega t)$

Η φύση λοιπόν, ακολουθεί κάποιον άλλον νόμο που είναι βαθύτερος από αυτόν του Newton!

Αντιστρεπτός μτσχ. $x_i(q_i,t) \leftrightarrow q_i(x_i,t)$

$$\dot{q}_i = \frac{d}{dt}q_i(x_\beta,t) = \frac{\partial q_i}{\partial x_\beta}\dot{x}_\beta + \frac{\partial q_i}{\partial t}$$

Επομένως $\mathcal{L}(x_i,\dot{x}_i,t) = \mathcal{L}\left(x_i(q,t), \frac{\partial x_i}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta + \frac{\partial x_i}{\partial t}, t\right)$

δηλαδή και πάλι $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$ είναι συνάρτηση της γενικευμένης συντεταγμένης, της χρονικής παραγώγου της και του χρόνου.

π.χ. πολικές συν/νες $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$

ή $\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{x}_1 \ \dot{x}_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}$

ή $\mathcal{L} = \langle \dot{x} | M | \dot{x} \rangle = (\dot{x}_1 \ \dot{x}_2) \begin{pmatrix} m/2 & 0 \\ 0 & m/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \langle \dot{x} | M \dot{x} \rangle$

η $\tilde{\mathcal{L}}(\dot{r}, \dot{\theta}, r)$ γίνεται $\frac{m}{2} (\dot{r} \ \dot{\theta}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \tilde{\mathcal{L}}(\dot{r}, \dot{\theta}, r)$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0.$$ Υπολογίζουμε το

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}(q, \dot{q}, t)}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{q}_a} \cdot \frac{\partial \dot{q}_a}{\partial \dot{x}_i}$$

$$\dot{q}_a = \frac{\partial q_a}{\partial x_\beta} \dot{x}_\beta + \frac{\partial q_a}{\partial t} \quad \text{οπότε} \quad \frac{\partial \dot{q}_a}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial q_a}{\partial x_i}$$

άρα $$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{q}_a} \frac{\partial q_a}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial x_i} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial q_a} \cdot \frac{\partial q_a}{\partial x_i} + \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{q}_a} \cdot \frac{\partial \dot{q}_a}{\partial x_i}$$

οπότε $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{q}_a} \frac{\partial q_a}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial q_a} \frac{\partial q_a}{\partial x_i} - \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{q}_a} \frac{\partial \dot{q}_a}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_a}\right)\frac{\partial q_a}{\partial x_i} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_a}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_a}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_a}\frac{\partial q_a}{\partial x_i}$$

$$- \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_a}\frac{\partial \dot{q}_a}{\partial x_i} = 0$$

θα δείξω ότι $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_a}{\partial x_i}\right) = \left.\frac{\partial \dot{q}_a}{\partial x_i}\right|_{\dot{x}=ct}$ (*)

$$\dot{q}_a = \frac{\partial q_a}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial q_a}{\partial t}$$

άρα $\frac{\partial \dot{q}_a}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 q_a}{\partial x_j \partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial^2 q_a}{\partial x_j \partial t} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_a}{\partial x_j}\right)$

ΠΡΟΣΟΧΗ στις ολικές + μερικές παραγώγους : δεν εναλάσσονται! Π.χ. (*) μπορεί να μην ισχύει σε κάποια ιδιάζουσα περίπτωση.

Τελικά έχουμε $\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_a}\right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_a}\right]\frac{\partial q_a}{\partial x_i} = 0$

$\frac{\partial q_a}{\partial x_i}$: Ιακωβιανός πίνακας J

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_a}\right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_a} = V^T$ ανάστροφο διάνυσμα.

$V^T J = 0$ άρα πρέπει $\det J \neq 0$ δηλαδή ο μετασχηματισμός να είναι αναστρέψιμος

$V^T J J^{-1} = 0 \Rightarrow V^T = 0$ επομένως ισχύουν οι εξισώσεις Euler-Lagrange:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_a}\right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_a} = 0}$$

ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΗ ΜΟΡΦΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΙΝΗΣΗΣ