ΦΩΚΙΩΝΟΣ Τ. ΧΑΤΖΗΙΩΑΝΝΟΥ
ΤΑΚΤΙΚΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

ΤΕΥΧΟΣ Ι

ΝΕΥΤΩΝΕΙΟΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

ΑΘΗΝΑΙ 1973

Π Ρ Ο Λ Ο Γ Ο Σ

Τό παρόν σύντομον έγχειρίδιον βοήθημα Θεωρητικῆς Μηχανικῆς ἀποτελεῖ ἐπιμέλειαν σημειώσεων ἐκ τῶν παραδόσεων τάς ὁποίας προσέφερα εἰς τούς φοιτητάς τοῦ Φυσικοῦ, Μαθηματικοῦ καί Χημικοῦ τμήματος τοῦ Πανεπιστημίου 'Αθηνῶν.

Κατεβλήθη προσπάθεια διά τήν πληρότητα τῆς ὕλης καί ἠκολουθήθη μεθοδολογία τονίζουσα τάς βασικάς γενικάς ἀρχάς τῆς Μηχανικῆς. Αἱ ἀσκήσεις αἱ ὁποῖαι παρατίθενται εἰς τό τέλος ἑκάστου Κεφαλαίου προσκαλοῦν τήν συνεργασίαν καί αὐτενέργειαν τῶν σπουδαστῶν πρός καλυτέραν ἐμπέδωσιν καί συμπλήρωσιν τῆς ὕλης.

Εὐχαριστῶ τούς βοηθούς τῆς Ἕδρας τῆς Μηχανικῆς, καθώς καί ὅλους τούς μαθητάς μου, οἱ ὁποῖοι συνέβαλον εἰς τήν διαμόρφωσιν τῆς φυσιογνωμίας τοῦ μαθήματος καί ἐβοήθησαν εἰς τήν ἐπιμέλειαν τῶν σημειώσεων, ὥστε νά ἀποτολμηθῆ τό παρόν.

'Εν 'Αθήναις, 'Οκτώβριος 1971

ΦΩΚΙΩΝ ΧΑΤΖΗΙΩΑΝΝΟΥ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΤΕΥΧΟΣ I

" ΝΕΥΤΩΝΕΙΟΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗ "

" Τότε γάρ οἰόμεθα γιγνώσκειν ἕκαστον, ὅταν τά αἴτια γνωρίσωμεν τά πρῶτα καί τάς ἀρχάς τάς πρώτας καί μέχρι τῶν στοιχείων – δῆλον ὅτι καί τῆς περί φύσεως ἐπιστήμης πειρατέον διορίσασθαι πρῶτον τά περί τάς ἀρχάς."

Ἀριστοτέλους Φυσικῆς

ΕΙΣΑΓΩΓΗ.

Τό ἀντικείμενον τῆς Μηχανικῆς εἶναι ἡ μελέτη τῆς κινήσεως τῶν ὑλικῶν σωμάτων ἐν τῷ χώρῳ καί τῷ χρόνῳ.

Ὁ τρισδιάστατος φυσικός χῶρος εἰς τόν ὁποῖον ζῶμεν, πιστεύομεν ὅτι εἶναι Εὐκλείδειος, δηλαδή ἰσχύει εἰς τόν φυσικόν χῶρον τό θεώρημα τοῦ Πυθαγόρα. Τοῦτο ἐπιβεβαιοῦται διά μετρήσεως τῶν ἀποστάσεων διά φυσικῶν μονάδων μήκους. Ὁ χῶρος εἶναι ἰσότροπος καί ὁμογενής.

Ὁ χρόνος εἶναι ἕν μονοδιάστατον συνεχές ἐπιπρόσθετον τοῦ χώρου. Μετρᾶται διά φυσικῆς τινος μονάδος μετρήσεως, π.χ.

τῇ βοηθείᾳ περιοδικῶν φαινομένων. Ὁ χρόνος εἶναι ὁμογενής ὡς πρός χρονικήν μετάθεσιν, ὅπως καί ἡ Εὐκλείδειος εὐθεῖα ὡς πρός μετάθεσιν ἐν τῷ χώρῳ. Τοῦτο ἐκφράζει τό χρονικῶς ἀναλλοίωτον τῶν φυσικῶν νόμων* .

Λόγῳ τῆς ὁμογενείας τοῦ χώρου, ἡ θέσις ἑκάστου ὑλικοῦ σημείου, ὁρίζεται μόνον σχετικῶς πρός ἄλλα ὑλικά σημεῖα, τά ὁποῖα ὁρίζουν οὕτως "ἕν σύστημα ἀναφορᾶς". Καθ'ὅμοιον τρόπον ἕν χρονόμετρον ὁρίζει ἕν σύστημα ἀναφορᾶς διά τόν "ἐντοπισμόν" τῶν φαινομένων ἐν τῷ χρόνῳ.

Κατά τόν Ἀριστοτέλην, ὁ χῶρος καί ὁ χρόνος εἶναι ἀπόλυτοι. "Ἐντός τοῦ ἀπολύτου χώρου ἕκαστον ἐλεύθερον ὑλικόν σημεῖον παραμένει ἀκίνητον εἰς μίαν θέσιν". Τήν κίνησιν τῶν σωμάτων περιγράφομεν δι'ἑνός συστήματος ἀναφορᾶς ἀκλονήτως συνδεδεμένου μετά τοῦ ἀπολύτου χώρου.

Νέα θεμελίωσις τῆς Μηχανικῆς γίνεται ὑπό τοῦ Γαλιλαίου (Galileo-Galilei 1564-1642). Ὁ χῶρος εἶναι τώρα σχετικός.

Ὑπάρχουν ἄπειρα ἀδρανειακά συστήματα ἀναφορᾶς, κινούμενα μεταξύ των μέ σταθεράς σχετικάς ταχύτητας, ὅλα ἰσοδύναμα

---

* Πράγματι, εἶναι σχεδόν ἀδιανόητος ἡ ἔννοια φυσικοῦ νόμου, ὁ ὁποῖος μεταβάλλεται μετά τοῦ χρόνου.

διά τήν περιγραφήν τῶν νόμων τῆς μηχανικῆς. Οὕτω, ὁ φυσικός χῶρος τοῦ Γαλιλαίου ἔχει μεγαλυτέραν συμμετρίαν. Ἐπί πλέον τῆς ὁμογενείας του, συμμετρίας εἰς μετάθεσιν, παραμένει ἀναλλοίωτος καί εἰς ἰσοταχῆ κίνησιν.

Ἀδρανειακά ἤ συστήματα Γαλιλαίου καλοῦνται τά συστήματα ἀναφορᾶς ὡς πρός τά ὁποῖα τά ἐλεύθερα ὑλικά σημεῖα κινοῦνται εὐθυγράμμως καί ἰσοταχῶς. Ἡ ὕπαρξις ἀδρανειακῶν συστημάτων ἀναφορᾶς δέν ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῆς γεωμετρίας τοῦ χωροχρόνου, ἀλλά ἐκφράζει βασικήν δυναμικήν ἰδιότητα τοῦ φυσικοῦ κόσμου. Συγκεκριμμένα ἀποτελεῖ μίαν ἰσοδύναμον ἔκφρασιν τοῦ γνωστοῦ νόμου τῆς ἀδρανείας.

Πιστεύομεν ὅτι εἰς τήν φύσιν ὑπάρχει ἕν τοὐλάχιστον ἀδρανειακόν σύστημα ἀναφορᾶς, π.χ. (κατά προσέγγισιν) τό σύστημα ἀναφορᾶς τῶν ἀπλανῶν ἀστέρων. Πᾶν σύστημα ἀναφορᾶς κινούμενον εὐθυγράμμως καί ἰσοταχῶς ὡς πρός τοῦτο εἶναι ὁμοίως ἀδρανειακόν. Οὕτω ὑπάρχουν ἄπειρα ἀδρανειακά συστήματα ἀναφορᾶς.

Ὁ χῶρος καί ὁ χρόνος τῆς Κλασσικῆς Μηχανικῆς τοῦ Γαλιλαίου-Νεύτωνος θεωροῦνται ἀνεξάρτητα Εὐκλείδεια συνεχῆ. Ὁ Einstein μᾶς ἔφερε μίαν νέαν εἰκόνα. Χῶρος καί χρόνος δέν εἶναι πλέον ἀνεξάρτητα μεταξύ των ἀλλά ἀποτελοῦν ἕνα ἑνιαῖον ψευδοευκλείδειον συνεχές. Ἡ φυσική γεωμετρία τοῦ χωροχρόνου εἶναι τώρα διάφορος. 'Αντί τῶν δύο ἀναλλοιώτων ἀποστάσεων $|\vec{\Delta x}|$, $|\Delta t|$ ἔχομεν μίαν ἀναλλοίωτον σχέσιν $(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2/c^2$, ὅπου c ἡ ταχύτης διαδόσεως τοῦ φωτός. 'Ως θά εἴδομεν βραδύτερον, ἡ Μηχανική τοῦ Νεύτωνος λαμβάνεται ὡς ὅριον τῆς Μηχανικῆς τοῦ Einstein ὅταν αἱ ταχύτητες $\vec{v}$ τῶν σωματίων εἶναι ἀμεληταί ὡς πρός τήν ταχύτητα τοῦ φωτός, $\frac{v}{c} \to 0$.

Οὕτω, π.χ. δι'ὅλα τά χημικά, βιολογικά φαινόμενα καί τάς πλείστας καθημερινάς τεχνολογικάς ἐφαρμογάς ἐπί τοῦ πλανήτου μας (μέ μερικάς ἐξαιρέσεις εἰς τήν διάδοσιν τῶν ἠλεκτρομαγνητικῶν κυμάτων, τήν πυρηνικήν ἐνέργειαν κλπ.), ἡ μηχανική τοῦ Νεύτωνος ἀποτελεῖ ἀκόμη ἀρίστην προσέγγισιν.

Τό κύριον μέρος τῶν ἀκολούθων μαθημάτων ἀφιεροῦται εἰς τήν Νευτώνειον Μηχανικήν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

"ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΝΟΜΟΙ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ"

1.1. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΤΟΥ ΓΑΛΙΛΑΙΟΥ.

Θεωρήσωμεν δύο ἀδρανειακά συστήματα ἀναφορᾶς X, X'. Αἱ θέσεις τῶν χωροχρονικῶν γεγονότων ὡς πρός ταῦτα εἶναι ἀντιστοίχως αἱ συντεταγμέναι (x,y,z,t), (x',y',z',t') ἤ $(\vec{x},t)$, $(\vec{x}',t')$.

Αἱ συντεταγμέναι αὗται συνδέονται διά τῶν σχέσεων :

$$\vec{x}' = R\vec{x} + \vec{c} + \vec{v}t, \qquad t' = t + t_o, \tag{1.1-1}$$

ὅπου $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ ἡ ἐν τῷ χώρῳ μετάθεσις τοῦ X ὡς πρός τό X' κατά τήν χρονικήν στιγμήν $t = 0$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ἡ σχετική ταχύτης τοῦ X' ὡς πρός τό X, t_o ἡ χρονικήν μετάθεσις τοῦ X' ὡς πρός τό X καί

$$R = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$ ὁ πίναξ ὁ χαρακτηρίζων τήν περιστροφήν τοῦ X' ὡς πρός τό X. Ὁ πίναξ περιστροφῆς περιγράφεται διά τριῶν παραμέτρων (ἄσκ. 1).

Ἐκκινοῦντες ἐξ ἑνός ἀδρανειακοῦ συστήματος διά μεταβολῆς τῶν δέκα ἀνωτέρω περιγραφέντων παραμέτρων, δυνάμεθα νά καταλήξωμεν εἰς τυχόν ἀδρανειακόν σύστημα.

Οἱ μετασχηματισμοί συντεταγμένων (1.1-1) καλοῦνται καί μετασχηματισμοί Γαλιλαίου. Προφανῶς σύνθεσις δύο μετασχηματισμῶν Γαλιλαίου ἀποτελεῖ ἐπίσης μετασχηματισμόν Γαλιλαίου, ἑκάστου δέ μετασχηματισμοῦ ὑπάρχει καί ὁ ἀντίστροφος. Οὕτω τό δεκαπαραμετρικόν σύνολον τῶν ἀνωτέρω μετασχηματισμῶν ἀποτελεῖ ὁμάδα, τήν καλουμένην ὁμάδα μετασχηματισμῶν τοῦ Γαλιλαίου (ἄσκ. 2).

1.2. ΝΟΜΟΙ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

Οἱ νόμοι τῆς Μηχανικῆς διέπουν τήν κίνησιν τῶν ὑλικῶν σημείων ἐν τῷ χώρῳ καί τῷ χρόνῳ ὡς πρός ἕν σύστημα ἀναφορᾶς. Ἡ κίνησις αὕτη $\vec{r} = \vec{r}(t)$ δύναται νά θεωρηθῇ ὡς μία διαδοχή χωροχρονικῶν γεγονότων $(\vec{r}, t)$.

α) Νόμος τῆς ἀδρανείας - δυναμική τοῦ ἐλευθέρου ὑλικοῦ σημείου.

Ἡ δυναμική τῆς κινήσεως ἑνός ἐλευθέρου ὑλικοῦ σημείου ὡς πρός ἀδρανειακόν σύστημα ἀναφορᾶς, περιλαμβάνεται εἰς τόν ὁρισμόν τοῦ ἀδρανειακοῦ συστήματος, ἤτοι : $\vec{r}(t) = \vec{v}_o t + \vec{r}_o$. Ἡ ταχύτης τοῦ ὑλικοῦ σημείου εἶναι σταθερά : $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_o$. Ἡ ἐπιτάχυνσις αὐτοῦ $\vec{\gamma} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$, ὡς καί ὅλαι αἱ $\frac{d^n\vec{r}}{dt^n}$, $(n > 2)$ παράγωγοι τῆς θέσεως μηδενίζονται. Οὕτω ἡ κινητική κατάστασις ἐλευθέρου ὑλικοῦ σημείου χαρακτηρίζεται πλήρως ἐκ τῆς θέσεως καί τῆς ταχύτητος αὐτοῦ εἴς τινα χρονικήν στιγμήν, ἤτοι ἐκ δύο παραμέτρων.

Ὁ δυναμικός νόμος (νόμος τῆς ἀδρανείας),

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 0 \quad , \qquad (1\text{-}2\text{-}1)$$

ὅστις διέπει τήν κίνησιν ἐλευθέρου ὑλικοῦ σημείου εἶναι προφανῶς ἀναλλοίωτος ὡς πρός τούς μετασχηματισμούς Γαλιλαίου (ἄσκ. 5).

β) Δυνάμεις - ὁ θεμελιώδης νόμος τῆς Μηχανικῆς.

Τά αἴτια τῆς μεταβολῆς τῆς κινητικῆς καταστάσεως ὑλικοῦ σημείου καλοῦμεν γενικῶς δυνάμεις. Ὁ θεμελιώδης νόμος τῆς Μηχανικῆς εἶναι ὁ νόμος ὁ περιγράφων τήν χρονικήν ἐξέλιξιν τῆς κινητικῆς καταστάσεως τῶν ὑλικῶν σημείων συναρτήσει τῶν δυνάμεων. Διά τήν εὕρεσιν τούτου θά θεωρήσωμεν δυνάμεις ἐντοπισμένας ἐν τῷ χώρῳ καί τῷ χρόνῳ. Ἔστω μία τοιαύτη δύναμις $\vec{F} = \vec{F}(t)$ ὥστε $\vec{F}(t) = 0$ διά $t < t_1$ καί $t > t_2$. Ὑλικόν σημεῖον ἐλεύθερον διά $t < t_1$ ἀφίεται ἐλεύθερον διά $t > t_2$ μετά τήν ἐνέργειαν τῆς δυνάμεως. Ἡ δύναμις ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα τήν μεταβολήν τῆς κινητικῆς καταστάσεως αὐτοῦ. Ἐπιθυμοῦμεν νά ἐκφράσωμεν ὑπό μορφήν διαφορικῆς ἐξισώσεως τήν σχέσιν δυνάμεως καί μεταβολῆς τῆς κινητικῆς καταστάσεως. Ἐπειδή αἱ καταστάσεις τῶν ἐλευθέρων ὑλικῶν σημείων καθορίζονται ἐκ δύο παραμέτρων, $\vec{x}$ καί $\vec{v}$, εἰς μίαν χρονικήν στιγμήν, διά νά ἔχωμεν μονοσήμαντον καί αἰτιατήν σύνδεσιν τῆς ἀρχικῆς $(t < t_1)$ μετά τῆς τελικῆς

$(t > t_2)$ καταστάσεως τοῦ ὑλικοῦ σημείου θά πρέπει ἡ διαφορική ἐξίσωσις νά εἶναι δευτέρας τάξεως ὡς πρός τόν χρόνον. Αὕτη θά ἔχῃ γενικῶς τήν μορφήν :

$$F(x,v,t) = A(x,v)\,\frac{d^2x}{dt^2} + B(x,v)\,\frac{dx}{dt} + C(x,v)$$

ἤ

$$F(x,v,t) = A(x,v)\,\frac{d^2x}{dt^2} + D(x,v),$$

ὅπου χάριν ἁπλότητος ἐθεωρήσαμεν χῶρον μιᾶς διαστάσεως.

Ἀλλά ἐκ τοῦ νόμου τῆς ἀδρανείας διά $F = 0$ πρέπει $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$. Ἄρα $D(x,v) = 0$, καί $F(x,v,t) = A(x,v)\frac{d^2x}{dt^2}$.

Διά νά εἶναι ὁ ἀνωτέρω νόμος ἀναλλοίωτος ὡς πρός τάς μεταθέσεις, πρέπει τό A νά εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ x. Ἄρα

$$F(x,v,t) = A(v)\,\frac{d^2x}{dt^2}$$

Ἐάν περαιτέρω ἀπαιτηθῇ ὅπως ὁ δυναμικός οὗτος νόμος εἶναι ἀναλλοίωτος ὡς πρός τούς γενικωτέρους μετασχηματισμούς Γαλιλαίου*, ἤτοι ὑπακούει εἰς τήν σχετικότητα τοῦ Γαλιλαίου,

* Ὡς θά ἴδωμεν ἡ ἀπαίτησις ὅπως ὁ δυναμικός νόμος εἶναι ἀναλλοίωτος ὡς πρός τούς μετασχηματισμούς Lorentz μᾶς δίδει τήν δυναμικήν τοῦ ὑλικοῦ σημείου τῆς εἰδικῆς θεωρίας τῆς σχετικότητος.

τότε τό A εἶναι σταθερόν (ἄσκ. 6).

Τήν σταθεράν ταύτην A, καλοῦμεν ἀδρανειακήν μᾶζαν m τοῦ ὑλικοῦ σημείου καί εἶναι προφανές ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὅτι αὕτη εἶναι ἀναλλοίωτος ὡς πρός τούς μετασχηματισμούς Γαλιλαίου.

Ὁ οὕτω διαμορφωθείς νόμος

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \qquad (1.2\text{-}2)$$

καλεῖται καί 2ος Νόμος τοῦ Νεύτωνος.

Οἱ μετασχηματισμοί Γαλιλαίου, ὡς ἀφίοντες ἀναλλοιώτους τούς νόμους τοῦ Νεύτωνος καλοῦνται καί συμμετρίαι τῶν νόμων τούτων.

Ὁριζομένης τῆς μάζης ἑνός συγκεκριμμένου ὑλικοῦ σωματίου (π.χ. τοῦ πρωτονίου) ὡς μονάδος, ὁ δεύτερος νόμος τοῦ Νεύτωνος μᾶς παρέχει τό μέτρον τῆς δυνάμεως.

Ἡ ἀδρανειακή μᾶζα m_α δέν πρέπει νά συγχέεται μέ τήν βαρεῖαν μᾶζαν m_β ἡ ὁποία εἶναι πηγή τῶν δυνάμεων βαρύτητος -ὅπως τό ἠλεκτρικόν φορτίον εἶναι πηγή τοῦ ἠλεκτροστατικοῦ πεδίου. Ἡ δύναμις τήν ὁποίαν ἀσκεῖ τό πεδίον βαρύτητος $\vec{B}$ ἐπί ὑλικοῦ σημείου βαρείας μάζης m_β εἶναι :

$$\vec{F} = m_\beta \vec{B} \qquad (1.2\text{-}3)$$

Τά πειράματα τοῦ Eötvos ἔδειξαν ὅτι ὁ λόγος $\frac{m_\beta}{m_\alpha}$ τῆς βαρείας μάζης πρός τήν μᾶζαν ἀδρανείας εἶναι παγκόσμιος σταθερά, ἀνεξάρτητος τῆς φύσεως τῶν σωμάτων. Τοῦτο ἀποτελεῖ τήν περίφημον ἀρχήν τῆς ἰσοδυναμίας. Βάσει τῶν (1.2-2), (1.2-3)καί τῆς ἀρχῆς τῆς ἰσοδυναμίας, ἕπεται ὅτι :

"τά πεδία βαρύτητος εἶναι τοπικῶς ἰσοδύναμα πρός πεδία ἐπιταχύνσεως" ὀφειλόμενα π.χ. εἰς μή ἀδρανειακά συστήματα ἀναφορᾶς (βλ.§ 1.3 καί ἄσκ. 9).

Ἡ ἀρχή τῆς ἰσοδυναμίας ἐπιβεβαιοῦται μέ ἐκπληκτικήν ἀκρίβειαν καί ἀποτελεῖ τό θεμέλιον τῆς θεωρίας τῆς Βαρύτητος (τῆς Γενικῆς Θεωρίας τῆς Σχετικότητος). Εἰς τήν μᾶζαν ἀδρανείας πρέπει φυσικά νά περιληφθῇ ὁλόκληρον τό ἐνεργειακόν περιεχόμενον $m_\alpha = \frac{E_{o\lambda}}{c^2}$, συμφώνως πρός τήν θεωρίαν τῆς σχετικότητος.

γ) Τρίτος νόμος τοῦ Νεύτωνος ἤ νόμος "δράσεως-ἀντιδράσεως".

Εἰς τήν Μηχανικήν θεωροῦμεν ὅτι αἱ δυνάμεις ὀφείλονται εἰς τήν ἀλληλεπίδρασιν τῶν ὑλικῶν σημείων. Ἔστω δύο ὑλικά σημεῖα 1 καί 2 μαζῶν m_1 καί m_2 ἀντιστοίχως, εὑρισκόμενα μακράν τῆς ἐπιδράσεως ἄλλων ὑλικῶν σημείων. Τό ὑλικόν σημεῖον 1, ἀσκεῖ ἐπί τοῦ 2 δύναμιν $\vec{F}_{12}$ καί ὑφίσταται ἐκ τοῦ 2 δύναμιν $\vec{F}_{21}$. Κατά τόν Νεύτωνα (3ος νόμος) :

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \qquad (1.2\text{-}4)$$

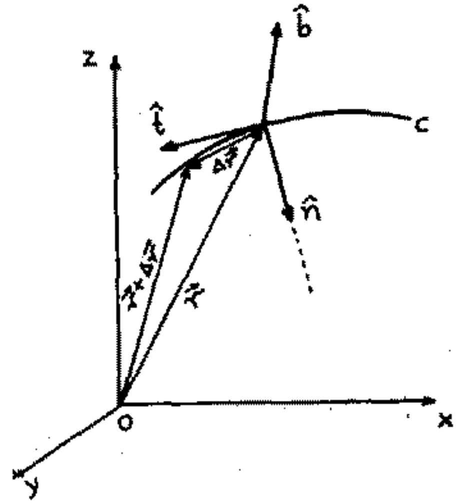
δηλ. ἡ δρᾶσις εἶναι ἴση καί ἀντίθετος τῆς ἀντιδράσεως. Θά ἐπανέλθωμεν εἰς τόν νόμον τοῦτον ὅταν διατυπώσωμεν τήν ἔννοιαν τοῦ κέντρου μάζης καί ἐξετάσωμεν τήν κίνησιν αὐτοῦ.

Ὁ 3ος νόμος μᾶς παρέχει μίαν πρόσθετον δυνατότητα μετρήσεως μαζῶν. Ἐκ τῆς (1.2-2) καί (1.2-4) ἔχομεν :

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{|\vec{\gamma}_2|}{|\vec{\gamma}_1|} .$$

Ὥστε δυνάμεθα νά συγκρίνωμεν μάζας m_1, m_2 μετροῦντες τάς ἀντιστοίχους ἐπιταχύνσεις ($\vec{\gamma}_1$, $\vec{\gamma}_2$) ἐξ ἀμοιβαίας ἀλληλεπιδράσεως.

1.3. ΣΤΙΓΜΙΑΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ



Σχ. 1.3-1.
Γεωμετρική ἐποπτεία τοῦ τριέδρου Frenet.

Ἔστω ὑλικόν σημεῖον μάζης m κινούμενον μέ ἐξίσωσιν $\vec{r} = \vec{r}(t)$ ὡς πρός ἀδρανειακόν τι σύστημα ἀναφορᾶς OXYZ. Ἡ ταχύτης αὐτοῦ $\vec{v}(t)$ εἶναι :

$$\vec{v}(t) \equiv \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = v\hat{t} \qquad (1.3\text{-}1)$$

ὅπου $\hat{t}$ μοναδιαῖον διάνυσμα ($|\hat{t}| = 1$) ἐφαπτόμενον τῆς τροχιᾶς τοῦ σημείου εἰς τήν ἑκάστοτε θέσιν αὐτοῦ, Σχ. 1.3-1.

Ἡ ἐπιτάχυνσις $\vec{\gamma}(t)$ εἶναι :

$$\vec{\gamma}(t) \equiv \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{t} + v\frac{d\hat{t}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{t} + v^2\frac{d\hat{t}}{ds} \qquad (1.3\text{-}2)$$

Τό διάνυσμα $\frac{d\hat{t}}{ds}$ εἶναι κάθετον ἐπί τοῦ $\hat{t}$ διότι :

$$\hat{t}.\frac{d\hat{t}}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}\hat{t}^2\right) = 0$$

Τό μοναδιαῖον διάνυσμα $\hat{n}$ κατά τήν διεύθυνσιν τοῦ $\frac{d\hat{t}}{ds}$ εἶναι :

$$\hat{n} = \frac{d\hat{t}}{ds} \Big/ \left|\frac{d\hat{t}}{ds}\right| \quad .$$

Ὡς γνωστόν ἐκ τῆς διαφορικῆς Γεωμετρίας τό $\left|\frac{d\hat{t}}{ds}\right|$ καλεῖται καμπυλότης καί συμβολίζεται διά k . Οὕτω ἡ (1.3-2) γράφεται :

$$\vec{\gamma}(t) = \frac{dv}{dt}\hat{t} + v^2k\hat{n} = \frac{dv}{dt}\hat{t} + \frac{v^2}{\rho}\hat{n} \quad , \qquad (1.3\text{-}3)$$

ὅπου $\rho = \frac{1}{k}$ ἡ ἀκτίς καμπυλότητος. Ἡ ἐπιτάχυνσις,δηλαδή, ἀναλύεται εἰς δύο συνιστώσας, τήν ἐπιτρόχιον ($\frac{dv}{dt}$) $\hat{t}$, ἐφαπτομένην τῆς τροχιᾶς καί τήν κεντρομόλον $\frac{v^2}{\rho}\hat{n}$, κάθετον ἐπί τήν τροχιάν.

Ὁρίζοντες καί ἕν τρίτον μοναδιαῖον διάνυσμα $\vec{b} \equiv \hat{t} \times \hat{n}$ ἔχομεν ἕν τρισορθογώνιον σύστημα ἀξόνων $(\hat{t},\hat{n},\hat{b})$, τό γνωστόν τρίεδρον τοῦ Frenet εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς τροχιᾶς, ἤτοι

δι' ἑκάστην χρονικήν στιγμήν.

Καλοῦμεν στιγμιαῖον ἀδρανειακόν σύστημα ἀναφορᾶς, διά τινα χρονικήν στιγμήν t , ἐκεῖνο ἐκ τῶν ἀκινήτων ὡς πρός τό OXYZ ἀδρανειακῶν συστημάτων ἀναφορᾶς, τοῦ ὁποίου οἱ ἄξονες ταυτίζονται μετά τοῦ ἀνωτέρω ὁρισθέντος τριέδρου τοῦ Frenet.

Ὡς πρός τό στιγμιαῖον ἀδρανειακόν σύστημα ἀναφορᾶς, ὁ 2ος νόμος τοῦ Νεύτωνος ἐκφράζεται ὡς :

$$\vec{F} = m\vec{\gamma}(t) = m\frac{dv}{dt}\hat{t} + \frac{mv^2}{\rho}\hat{n} \quad . \qquad (1,3\text{-}4)$$

Ἀ δ ρ α ν ε ι α κ ά σ υ σ τ ή μ α τ α ἀ ν α φ ο ρ ᾶ ς σ τ ι γ μ ι α ί α ς ἠ ρ ε μ ί α ς.

Διά τινα χρονικήν στιγμήν t_1 τό ὑλικόν σημεῖον διερχόμενον διά τῆς θέσεως $\vec{r}_1(t_1)$ ἔχει ταχύτητα $\vec{v}(t_1) = \vec{v}_1$. Θεωρήσωμεν ἕν ἀδρανειακόν σύστημα Σ_1 κινούμενον μέ ταχύτητα $\vec{v}_1$ ὡς πρός τό ἀδρανειακόν OXYZ. Τότε διά $t = t_1$ τό ὑλικόν σημεῖον ἠρεμεῖ ὡς πρός Σ_1. Κατ'ἐπέκτασιν δυνάμεθα νά θεωρήσωμεν ἀδρανειακά συστήματα ταχύτητος $\vec{v}(t)$ διά κάθε t. Τά ἀδρανειακά ταῦτα συστήματα ἀναφορᾶς χαρακτηρίζονται,βάσει τῶν ἀνωτέρω, ὡς ἀδρανειακά συστήματα στιγμιαίας ἠρεμίας.

Εἰς ὅλα τά ἀνωτέρω συστήματα ἡ ἐπιτάχυνσις ἑνός ὑλικοῦ σημείου παραμένει ἡ αὐτή (ἄσκ. 8). Διά τήν ἀλλαγήν τῆς ἐπιταχύνσεως πρέπει νά ἀναφερθῶμεν εἰς μή ἀδρανειακά συστήματα. Οὕτω, π.χ. ἡ ἐπιτάχυνσις $\vec{\gamma}(t) \neq 0$ ἑνός ὑλικοῦ σημείου θά μηδενισθῇ ἄν ἀναφερθῶμεν εἰς μή ἀδρανειακόν σύστημα ἀναφορᾶς, κινούμενον κατά τήν χρονικήν στιγμήν t ὡς πρός τό ἀδρανειακόν μέ τήν αὐτήν ἐπιτάχυνσιν $\vec{\gamma}(t)$. Ἄν ἡ ἐπιτάχυνσις ὀφείλεται εἰς πεδίον βαρύτητος, τό νέον σύστημα ἀποτελεῖ προφανῶς "στιγμιαῖον (μή ἀδρανειακόν) τοπικόν σύστημα ἐλευθέρας πτώσεως". Ὡς πρός τό σύστημα ἐλευθέρας πτώσεως, τό πεδίον βαρύτητος τοπικῶς εἰς τήν περιοχήν τοῦ ὑλικοῦ σημείου κατά τήν χρονικήν στιγμήν t εἶναι μηδέν. Τά συστήματα ἐλευθέρας πτώσεως εὑρίσκουν εὐρεῖαν ἐφαρμογήν εἰς τήν θεωρίαν τῆς Βαρύτητος (ἤ Γενικήν Θεωρίαν τῆς Σχετικότητος).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δείξατε ὅτι τά στοιχεῖα α_{ik} τοῦ πίνακος

$$R = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{13} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

τοῦ χαρακτηρίζοντος περιστροφήν συστήματος ἀξόνων, εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἱκανοποιοῦν τάς σχέσεις

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_{ik}\alpha_{i\ell} = \delta_{k\ell}, \qquad k,\ell = 1,2,3.$$

Λόγῳ τῆς συμμετρίας ὡς πρός k καί ℓ μόνον αἱ 6 ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων εἶναι ἀνεξάρτητοι μεταξύ των. Ἄρα ἐκ τῶν 9 στοιχείων τοῦ πίνακος α_{ik} τῶν στροφῶν, μόνον τρία εἶναι ἀνεξάρτητα, ἀντίστοιχα π.χ. πρός τάς τρεῖς γωνίας τοῦ Euler.

2. Δείξατε ὅτι ἡ (1.1-1) μᾶς δίδει τόν πλέον γενικόν μετασχηματισμόν Γαλιλαίου.

3. Ἄν $(R_1,\vec{c}_1,\vec{v}_1,t_1)$ καί $(R_2,\vec{c}_2,\vec{v}_2,t_2)$ εἶναι αἱ παράμετροι αἱ ὁποῖαι χαρακτηρίζουν δύο διαδοχικούς μετασχηματισμούς Γαλιλαίου, νά δειχθῇ ὅτι ὁ νόμος συνθέσεώς των εἶναι :

$$(R_2,\vec{v}_2,\vec{c}_2,t_2)\,(R_1,\vec{v}_1,\vec{c}_1,t_1) = (R_2R_1,\vec{v}_2+R_2\vec{v}_1,\vec{c}_2+ + \vec{v}_2t_1+R_2\vec{c}_1,t_1+t_2).$$

4. Θεωρήσατε τούς μετασχηματισμούς τοῦ Γαλιλαίου εἰς τόν χῶρον τῶν δύο διαστάσεων. Πόσαι ἀνεξάρτητοι παράμετροι ἀπαιτοῦνται διά τόν πλήρη χαρακτηρισμόν ἑκάστου μετασχηματισμοῦ;
Δώσατε τόν νόμον συνθέσεως τῶν μετασχηματισμῶν.

5. Δείξατε ὅτι ὁ δυναμικός νόμος $m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}=0$, ὅστις διέπει τήν κίνησιν ἐλευθέρου ὑλικοῦ σημείου ὡς πρός ἀδρανειακόν σύστημα ἀναφορᾶς, εἶναι ἀναλλοίωτος εἰς μετασχηματισμούς Γαλιλαίου.

6. Δείξατε ὅτι ὁ νόμος τοῦ Νεύτωνος

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

ὁ ὁποῖος διέπει τήν κίνησιν ὑλικοῦ σημείου, ἕπεται ἐκ τοῦ 1ου νόμου (νόμου τῆς ἀδρανείας), τοῦ αἰτιατοῦ καί τοῦ ἀναλλοιώτου εἰς μετασχηματισμούς τοῦ Γαλιλαίου.

7. Ποία ἡ ὁμάς συμμετρίας καί ἐξίσωσις τῆς κινήσεως τῶν ὑλικῶν σημείων τῆς Ἀριστοτελείου Μηχανικῆς;
Δώσατε τόν νόμον συνθέσεως δύο στοιχείων τῆς ἀνωτέρω ὁμάδος.

8. Ὑλικόν σημεῖον κινεῖται ὡς πρός ἀδρανειακόν σύστημα ἀναφορᾶς X ἐπί δεδομένης τροχιᾶς c. Δίδονται, κατά τήν χρονικήν στιγμήν t_o, ἡ θέσις $\vec{x}_o$, ἡ ταχύτης $\vec{v}_o$, ἡ ἐπιτάχυνσις $\vec{\gamma}_o(t)$, εἰς $\vec{x}_o=\vec{x}(t_o)$. Νά ἐκφρασθοῦν:

(α) Ἡ κίνησις $\vec{x}(t)$ τοῦ ὑλικοῦ σημείου διά $|t-t_o|^3 \ll 1$,

(β) Ἡ ταχύτης $\vec{v}(t)$, διά $|t-t_o|^2 \ll 1$,

(γ) Ἡ στιγμιαία ἐπιτάχυνσις $\vec{\gamma}(t_o)$, ἀναλελυμένη εἰς ἐπιτρόχιον καί κεντρομόλον συνιστῶσαν, καί

(δ) Ἡ ἀκτίς καμπυλότητος

εἰς τά ἀκόλουθα συστήματα ἀναφορᾶς:

(1) Τό δοθέν X.

(2) Τό στιγμιαῖον σύστημα ἀναφορᾶς τοῦ τριέδρου τοῦ Frenet.

(3) Τό ἀδρανειακόν σύστημα στιγμιαίας ἠρεμίας.

9. Ὑποθέτοντες ὅτι ἡ ἐπιτάχυνσις $\vec{\gamma}(t)$ ὑλικοῦ σημείου ὀφείλεται εἰς πεδίον βαρύτητος, νά δοθοῦν αἱ ἀπαντήσεις τῆς ἀσκ. (8) διά τό μή ἀδρανειακόν σύστημα στιγμιαίας ἠρεμίας καί ἐλευθέρας πτώσεως.

10. Νά μελετηθῇ ἡ κίνησις βλήματος ριπτομένου ἐν κενῷ εἰς περιοχήν τοῦ πεδίου βαρύτητος τῆς γῆς:

(α) ὡς πρός τήν γῆν, θεωρουμένην ὅτι συνιστᾶ ἀδρανειακόν σύστημα ἀναφορᾶς, καί

(β) ὡς πρός σύστημα ἀναφορᾶς " ἐλευθέρας πτώσεως " .

Δίδεται τό πεδίον βαρύτητος $\vec{B}$, τό ὁποῖον θεωρεῖται ὁμογενές εἰς τήν ὡς ἄνω περιοχήν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

"ΒΑΣΙΚΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ"

2.1. ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΟΡΜΗ ΚΑΙ ΚΕΝΤΡΟΝ ΜΑΖΗΣ ΥΛΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Ὁ ρ ι σ μ ό ς : Καλοῦμεν ὦσιν δυνάμεως $\vec{F}(t)$ ἀσκουμένην κατά τό χρονικόν διάστημα (t_1, t_2) τό ὁλοκλήρωμα

$$\vec{\Omega} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\, dt \quad . \tag{2.1-1}$$

Συμφώνως πρός τόν δυναμικόν νόμον τοῦ Νεύτωνος,

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \; , \tag{2.1-2}$$

ἤ ὦσις

$$\vec{\Omega} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 \; . \tag{2.1-3}$$

Τό άνυσματικόν μέγεθος $\vec{P} = m\vec{v}$, καλοῦμεν γραμμικήν ὁρμήν τοῦ σωματίου. Ὥστε κατά τήν ἐπενέργειαν δυνάμεως ἐπί σωματίου προκαλεῖται μεταβολή τῆς ὁρμῆς τοῦ σωματίου, ἴση πρός τήν ἀσκηθεῖσαν ὦσιν. Ἡ ὁρμή ἀποτελεῖ βασικόν μέγεθος τῆς Μηχανικῆς.

Συναρτήσει τῆς ὁρμῆς, ὁ δυναμικός νόμος τῆς Μηχανικῆς λαμβάνει τήν μορφήν

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (2.1\text{-}4)$$

Ἡ ταχύτης μεταβολῆς τῆς ὁρμῆς ἑνός σωματίου ἰσοῦται πρός τήν δύναμιν τήν ἀσκουμένην ἐπ'αὐτοῦ.

Θεωρήσωμεν τώρα ἕν σύστημα ν-σωματίων. Ἄν $\vec{P}_i$ $i = 1,2,\dots,\nu$ ἡ ὁρμή ἑκάστου σωματίου, καλοῦμεν ὁλικήν ὁρμήν $\vec{P}$ τοῦ συστήματος τό ἄθροισμα

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{\nu} \vec{P}_i \ ,$$

τῶν ὁρμῶν τῶν συνιστώντων τό σύστημα σωματίων.

Ἄν αἱ ἐπί τῶν σωματίων δυνάμεις εἶναι μόνον ἀμοιβαῖαι ἀλληλεπιδράσεις $\vec{F}_{i(k)}$ σύμφωνοι πρός τόν τρίτον νόμον τοῦ Νεύτωνος,

$$\vec{F}_{i(k)} = -\vec{F}_{k(i)} \ , \qquad (2.1\text{-}5)$$

Δρᾶσις = − Ἀντίδρασις

τότε
$$\frac{d}{dt}\vec{P} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{\nu}\vec{P}_i = \sum_{i=1}^{\nu}\frac{d}{dt}\vec{P}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{\nu}\vec{F}_i = \sum_{i=1}^{\nu}\sum_{k\neq i}\vec{F}_{i(k)} = 0 \ . \qquad (2.1\text{-}6)$$

Ἡ ὁλική ὁρμή $\vec{P}$ διατηρεῖται !

Ἄν ἐπί τῶν σωματίων ἀσκοῦνται καί πρόσθετοι ἐξωτερικαί δυνάμεις $\vec{F}_i^{\varepsilon\xi}$ τότε

$$\frac{d}{dt}\vec{P}_i = \vec{F}_i^{\varepsilon\xi} + \sum_{k\neq i}\vec{F}_{i(k)} \ . \qquad (2.1\text{-}7)$$

Ἀθροίζοντες δι'ὅλα τά i , καί δεχόμενοι, ὡς καί εἰς τήν (2.1-5), ὅτι διά τάς ἐσωτερικάς δυνάμεις ἰσχύει ὁ τρίτος νόμος τοῦ Νεύτωνος $\vec{F}_{i(k)} = -\vec{F}_{k(i)}$, ἔχομεν τώρα ἀντί τῆς (2.1-6) τήν

$$\vec{F}_{o\lambda}^{\varepsilon\xi} \equiv \sum_{i=1}^{\nu}\vec{F}_i^{\varepsilon\xi} = \frac{d\vec{P}_{o\lambda}}{dt} \ . \qquad (2.1\text{-}7)$$

Τό δυναμικόν σύστημα, ὡς πρός τήν ὁλικήν ἐξωτερικήν δύναμιν $\vec{F}^{\varepsilon\xi}_{o\lambda}$, δρᾶ ὡς ἕν σωμάτιον ὁρμῆς ἴσης πρός τήν ὁλικήν ὁρμήν $\vec{P}$ τοῦ συστήματος. Ὅταν ἡ συνισταμένη ὁλική δύναμις εἶναι ἴση πρός μηδέν, ἡ ὁλική ὁρμή τοῦ συστήματος διατηρεῖται

$$\frac{d}{dt}\vec{P}_{o\lambda} = 0 \quad ,$$

καί (2.1-9)

$$\vec{P}_{o\lambda} = \sigma\tau\alpha\theta. \quad .$$

Εἰδικώτερον, ἔχομεν διατήρησιν τῆς ὁρμῆς εἰς τά ἀποκεκλεισμένα δυναμικά συστήματα, δηλ. συστήματα σωματίων ἐπί τῶν ὁποίων δέν ἀσκοῦνται ἐξωτερικαί δυνάμεις, $\vec{F}^{\varepsilon\xi}_{i} = 0$ (Ὑποθέτομεν φυσικά ὅτι $\vec{F}_{i(k)} = -\vec{F}_{k(i)}$).

Ἡ διατήρησις τῆς ὁρμῆς τῶν ἀποκεκλεισμένων δυναμικῶν συστημάτων ἀπεδείχθη ἀνωτέρω ὡς θεώρημα βάσει τοῦ νόμου τῆς κινήσεως τοῦ Νεύτωνος καί τῆς ὑποθέσεως τῆς ἰσχύος τοῦ τρίτου νόμου. Ἡ διατήρησις τῆς ὁρμῆς εἶναι ὡστόσο πλέον γενική. Ὡς ἁπλοῦν κλασσικόν παράδειγμα τῆς ἰσχύος της πέραν τοῦ τρίτου νόμου, ἀναφέρομεν τήν διατήρησιν τῆς ὁλικῆς ὁρμῆς, παρουσίᾳ τῶν ἠλεκτρομαγνητικῶν δυνάμεων. Μάλιστα, ἡ ἐμπιστοσύνη μας εἰς τήν διατήρησιν τῆς ὁρμῆς εἶναι τόση ὥστε ἀποτελεῖ αὕτη βασικόν ὄργανον εἰς τήν ἀνακάλυψιν νέων φαινομένων (βλ. ἄσκ. 2,§2.2) καί ὁδηγόν εἰς τόν καθορισμόν αὐτοῦ τούτου τοῦ δυναμικοῦ νόμου, ὡς π.χ. εἰς τήν θεωρίαν τῆς σχετικότητος τοῦ Einstein.

Τά θεωρήματα τῆς διατηρήσεως καί οἱ δυναμικοί νόμοι, τίθενται ἐπί βαθυτέρας βάσεως δι᾽ἀναλύσεως τῶν συμμετριῶν τοῦ χωροχρόνου. Ἐν προκειμένῳ ὁ βαθύτερος λόγος τῆς διατηρήσεως τῆς γραμμικῆς ὁρμῆς θεωρεῖται ἡ ὁμογένεια τοῦ χώρου (τό ἀναλλοίωτον τῶν ἰδιοτήτων τοῦ χώρου ὡς πρός μετάθεσιν). Μέ τοῦτο θά ἀσχοληθῶμεν ἀκριβέστερον μετά τήν διατύπωσιν τῆς Μηχανικῆς κατά τόν Lagrange, εἰς τόν δεύτερον τόμον. Ἐδῶ θά ἀρκεσθῶμεν μόνον εἰς μίαν ἁπλοϊκήν ἐπιβεβαίωσιν τούτου. Δι᾽ἕν ἀποκεκλεισμένον σύστημα αἱ ἐπί τῶν σωματίων δυνάμεις, ἐξαρτώμεναι μόνον ἐκ τῶν σχετικῶν μεταξύ τῶν σωματίων ἀποστάσεων, ταχυτήτων κλπ., εἶναι ἀναλλοίωτοι, εἰς παράλληλον μετάθεσιν τοῦ συστήματος. Ὥστε, ὡς πρός ἕν ἀποκεκλεισμένον σύστημα, ὁ χῶρος εἶναι δυναμικῶς ὁμογενής· αἱ δυναμικαί του ἰδιότητες (ἐπιδράσεις του ἐπί τοῦ δυναμικοῦ συστήματος) εἶναι ἀναλλοίωτοι παραλλήλου μεταθέσεως

Κ έ ν τ ρ ο ν μ ά ζ η ς.

Τό ἄνυσμα θέσεως τοῦ κέντρου μάζης $\vec{X}$ ἑνός συστήματος ν-σωματίων μαζῶν m_i καί ἀνυσμάτων θέσεως $\vec{x}_i$ ὁρίζεται ὡς

$$M\vec{X} = \sum_{i=1}^{\nu} m_i\vec{x}_i \qquad (\alpha)$$

ὅπου (2.1-10)

$$M = \sum_{i=1}^{\nu} m_i \qquad (\beta)$$

ἡ ὁλική μᾶζα τοῦ συστήματος.

Προκειμένου περί συνεχοῦς κατανομῆς μάζης ἐν τῷ χώρῳ, δεδομένης διά τινος πυκνότητος μάζης $\rho(x,t)$ ἡ (2.1-10) λαμβάνει τήν μορφήν :

$$M\vec{X}_{KM} = \int d^3x\, \vec{x}\rho(\vec{x},t) \qquad (\alpha)$$

ὅπου (2.1-11)

$$M = \int d^3x\rho(x,t). \qquad (\beta)$$

Ἡ πυκνότης μάζης ὑπόκειται φυσικά εἰς τήν περίφημον ἐξίσωσιν τῆς συνεχείας

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.\vec{J} = 0, \qquad (2.1\text{-}12)$$

ὅπου

$$\vec{J}(\vec{x},t) = \vec{V}(\vec{x},t)\rho(\vec{x},t), \qquad (2.1\text{-}13)$$

ἡ πυκνότης ἐντάσεως ροῆς μάζης εἰς τήν θέσιν $\vec{x}$ κατά τήν χρονικήν στιγμήν t .Ἡ ἐξίσωσις τῆς συνεχείας ἐκφράζει τήν διατήρησιν τῆς μάζης.

Ὅταν τό ὁλοκλήρωμα (2.1-11(α)) ἀποκλείνει,τότε προφανῶς τό κέντρον μάζης δέν ὁρίζεται καλῶς. Παρά ταῦτα διά πεπερασμένην ὁλικήν μᾶζαν, M, ἡ μετάθεσις τοῦ κέντρου μάζης εἶναι καλῶς ὡρισμένη (ἄσκ. 1). Φυσικῶς, ἐνδιαφέρει ἡ μετάθεσις τοῦ κέντρου μάζης ὡς πρός τόν χρόνον. Παραγωγίζοντες τήν (2.1-10) ἤ (2.1-11) ὡς πρός τόν χρόνον (ἄσκ. 2) εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ὁλική μᾶζα M ἐπί τήν ταχύτητα $\vec{V}_{KM} = \frac{d}{dt}\vec{X}_{KM}$ τοῦ κέντρου μάζης, δίδει τήν ὁλικήν ὁρμήν $\vec{P}_{o\lambda}$. "Τό κέντρον μάζης θεωρούμενον ὡς ὑλικόν σημεῖον μάζης M ἴσης πρός τήν ὁλικήν μᾶζαν τοῦ συστήματος, ἔχει ὁρμήν $\vec{P}_{KM}$ τήν $\vec{P}_{o\lambda}$". Ἡ ὁρμή $\vec{P}_{o\lambda}$ πεπερασμένης ποσότητος μαζῶν τῶν ὁποίων αἱ ταχύτητες εἶναι φραγμέναι ὁρίζεται καλῶς καί εἶναι πεπερασμένη (ἄσκ. 2).

Ἡ ἐξίσωσις (2.1-8) δύναται τώρα νά ἐκφρασθῇ ὡς

$$\vec{F}_{o\lambda} = M\frac{d^2\vec{X}}{dt^2} = \frac{d\vec{P}_{KM}}{dt} \qquad (2.1\text{-}14)$$

Ἡ ὁρμή καί συνεπῶς ἡ ταχύτης τοῦ κέντρου μάζης ἑνός ἀποκεκλεισμένου συστήματος εἶναι σταθερά. Ὥστε τό κέντρον μάζης ἀποκεκλεισμένου συστήματος δύναται πάντοτε νά ταὐτισθῆ μετά τῆς ἀρχῆς ἑνός ἀδρανειακοῦ συστήματος ἀναφορᾶς. Ἐν τοιοῦτον σύστημα καλεῖται σύστημα ἀναφορᾶς κέντρου μάζης (Κ.Μ.). Ἡ ὁλική ὁρμή $\vec{P}_{ολ}$ ἀναφερομένη ὡς πρός τό σύστημα Κ.Μ. εἶναι προφανῶς μηδέν.

$$\vec{P}_{ολ} = \sum_{i=1}^{\nu} m_i \frac{d}{dt} \vec{\xi}_i = \sum_i m_i \frac{d}{dt}(\vec{x}_i - \vec{X}) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{\nu} m_i(\vec{x}_i - \vec{X})$$

$$= M \frac{d}{dt}(\vec{X} - \vec{X}) = 0 \qquad (2.1\text{-}15)$$

Τοῦτο μᾶς δίδει καί ἄλλον ἕνα ὁρισμόν τοῦ συστήματος Κ.Μ. (ἄσκ. 3) . "Τό σύστημα ἀναφορᾶς Κ.Μ. ἀποκεκλεισμένου δυναμικοῦ συστήματος εἶναι τό σύστημα ἀδρανείας ὡς πρός τό ὁποῖον ἡ ὁλική ὁρμή εἶναι μηδέν".

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1. Δείξατε ὅτι ἡ παράλληλος μετάθεσις τυχούσης κατανομῆς πεπερασμένης ὁλικῆς μάζης $M < \infty$ κατά $\vec{x}_o$, προκαλεῖ μετάθεσιν τοῦ Κ.Μ. κατά $\vec{x}_o$ ἀνεξαρτήτως τοῦ ἄν ἡ κατανομή εἶναι ἰσχυρῶς συγκλίνουσα ($\int|\vec{x}|\ \rho(\vec{x})d^3x < \infty$) ἤ ὄχι. Ὥστε "μετάθεσις τοῦ παρατηρητοῦ ἤ τοῦ συστήματος ἀναφορᾶς κατά $\vec{x}_o$ συνεπάγεται σχετικήν μετάθεσιν τοῦ Κ.Μ. κατά $\vec{x}_o$ ἐπίσης".

   Ὑ π ό δ ε ι ξ ι ς : $M\overline{\Delta X} = \int dx\, \vec{x}(\rho'(\vec{x}) - \rho(\vec{x})) =$
   $= \int dx\, \vec{x}(\rho(\vec{x}-\vec{x}_o) - \rho(x)) = \vec{x}_o \int dx \rho(\vec{x}) = M\vec{x}_o$.

   Ὅλα τά ἀνωτέρω ὁλοκληρώματα ὑπάρχουν!

2. Δείξατε, βάσει τοῦ ὁρισμοῦ (2.1-11), ὅτι ἡ ταχύτης τοῦ κέντρου μάζης δίδεται ἐκ τοῦ τύπου :

$$M\vec{V} = \int \vec{v}\, \rho(\vec{x},t)d^3x$$

   Ἄμεσον πόρισμα αὐτοῦ εἶναι ὅτι ἡ ὁλική ὁρμή πεπερασμένης ποσότητος μαζῶν τῶν ὁποίων αἱ ταχύτητες εἶναι φραγμένες ὁρίζεται καλῶς καί εἶναι πεπερασμένη.

   (Ὑ π ό δ ε ι ξ ι ς : Μέ χρῆσιν τῆς ἐξισώσεως τῆς συνεχείας ἔχομεν

$$M\vec{X} = \int d^3x \, x \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \int d^3x \quad \vec{x} \quad \vec{\nabla} . (\rho \vec{v}) = \int d^3x \quad \rho \vec{v} \ ) .$$

3. Νά μελετηθῆ ἡ κινηματική τοῦ φαινομένου Compton, τῆς ἐλαστικῆς σκεδάσεως φωτονίου ἐπί ἠλεκτρονίου εἰς τό σύστημα κέντρου μάζης.

2.2. ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ

'Ορίζομεν ὡς στροφορμήν ὑλικοῦ σημείου ἐντός ἀδρανειακοῦ συστήματος ἀναφορᾶς τό ἄνυσμα :

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} \qquad (2.2\text{-}1)$$

ὅπου $\vec{r}$ τό ἄνυσμα θέσεως καί $\vec{p}$ ἡ γραμμική ὁρμή τοῦ σημείου. 'Η στροφορμή ὡς ἐξωτερικόν γινόμενον δύο πολικῶν ἀνυσμάτων τοῦ $\vec{r}$ καί τοῦ $\vec{p}$, εἶναι ἀξονικόν ἄνυσμα (ἤ ψευδοάνυσμα).

Πράγματι, ἐνῷ κατά τούς μετασχηματισμούς τῆς κυρίας ὁμάδος τῶν περιστροφῶν ἡ στροφορμή μετασχηματίζεται ὡς τό ἄνυσμα

θέσεως $\vec{r}$ (ἄσκ. 1), κατά τόν μετασχηματισμόν κατοπτρισμοῦ :

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r} = -\vec{r}' \quad , \qquad \vec{p} \rightarrow \vec{p}' = -\vec{p} \quad ,$$

αὕτη παραμένει ἀναλλοίωτος,

$$\vec{\ell} \rightarrow \vec{\ell}' = \vec{r}' \times \vec{p}' = (-\vec{r}) \times (-\vec{p}) = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{\ell} \ . \qquad (2.2\text{-}2)$$

Παραγωγίζοντες τήν (2.2-1) ὡς πρός τόν χρόνον λαμβάνομεν :

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} x\vec{p} + \vec{r}x \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r}x \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r}x\vec{F} = \vec{M} \ , \qquad (2.2\text{-}3)$$

ὅπου $\vec{M}$ ἡ ροπή τῆς δυνάμεως.

'Η ἀνωτέρω σχέσις ἐκφράζει τήν ἐξίσωσιν κινήσεως τῆς στροφορμῆς ὑλικοῦ σημείου.

'Ορίζομεν ὡς στροφορμήν συστήματος n ὑλικῶν σημείων τό ἄνυσμα :

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\ell}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{p}_i \qquad (2.2\text{-}4)$$

ὅπου $\vec{r}_i$ τό ἄνυσμα θέσεως καί $\vec{p}_i$ ἡ ὁρμή τοῦ i-ὑλικοῦ σημείου.

Παραγωγίζοντες ὡς πρός τόν χρόνον τήν (2.2-4) λαμβάνομεν :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{p}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i . \qquad (2.2\text{-}5)$$

Τό ἄθροισμα $\vec{M}_{ολ} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i$, καλεῖται ὁλική ἤ συνισταμένη ροπή ὥστε :

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad . \qquad (2.2\text{-}5)$$

Ἡ (2.2-5) ἀποτελεῖ τήν "ἐξίσωσιν κινήσεως τῆς ὁλικῆς στροφορμῆς".

" Ἡ ταχύτης μεταβολῆς τῆς ὁλικῆς στροφορμῆς δυναμικοῦ ὑλικοῦ συστήματος, ἰσοῦται πρός τήν συνισταμένην ροπήν δυνάμεων ἐπί τοῦ συστήματος".

Ἡ ροπή δυνάμεως εἶναι ἐν γένει συνάρτησις τοῦ σημείου ἀναφορᾶς, ἐπειδή τό ἄνυσμα θέσεως ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων. Μετάθεσις τοῦ σημείου ἀναφορᾶς κατά $\vec{\alpha}$, ἤτοι $\vec{r} \to \vec{r}' = \vec{r} + \vec{\alpha}$, συνεπάγεται ἀλλαγήν τῆς ροπῆς :

$$\vec{M} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i \to M' = \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{F}_i = \sum_i (\vec{r}_i + \vec{\alpha}) \times \vec{F}_i =$$

$$= \vec{M} + \vec{\alpha} \times \sum \vec{F}_i = \vec{M} + \vec{\alpha} \times \vec{F}_{ολ} \text{ ,}$$

ἤτοι

$$\vec{M} \to \vec{M}' = \vec{M} + \vec{\alpha} \times \vec{F}_{ολ} \text{ .} \qquad (2.2\text{-}6)$$

Μόνον ὅταν ἡ συνισταμένη δύναμις $\vec{F}_{ολ}$ μηδενίζεται, εἶναι ἡ συνισταμένη ροπή ἀνεξάρτητος τοῦ σημείου ἀναφορᾶς.

Ἀνάλογος πρότασις ἰσχύει καί διά τήν στροφορμήν, ἀφοῦ ἄλλωστε ἡ ροπή δυνάμεως καί ἡ στροφορμή συνδέονται διά τῆς ἐξισώσεως (2.2-5). Κατά τήν μετάθεσιν τοῦ σημείου ἀναφορᾶς ,

$$\vec{r} \to \vec{r} + \vec{\alpha} \quad , \vec{p} \to \vec{p}$$

$$\vec{L} \to \vec{L}' = \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{p}_i' = \sum_i (\vec{r}_i + \vec{\alpha}) \times \vec{p}_i = \vec{L} + \vec{\alpha} \times \vec{p}_{ολ} \quad . \qquad (2.2\text{-}7)$$

Μόνον ὅταν $\vec{P}_{ολ} = 0$, π.χ. ὅταν ἀναφερώμεθα εἰς σύστημα κέντρου μάζης ἀποκεκλεισμένου συστήματος, ἡ στροφορμή εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ σημείου ἀναφορᾶς καί δύναται νά χαρακτηρισθῆ ὡς ἰδία στροφορμή τοῦ συστήματος.

Ἡ στροφορμή συστήματος σωματίων ἰσοῦται πρός τό ἄθροισμα τῆς ἰδίας στροφορμῆς $\vec{L}_o$ σύν τήν στροφορμήν τοῦ κέντρου μάζης

$$\vec{L} = \vec{L}_o + \vec{X}_{KM} \times \vec{P}_{o\lambda} \qquad (2.2\text{-}8)$$

Πράγματι ἄν $\vec{r}_i^{(0)}$ τό ἄνυσμα θέσεως τοῦ i σωματίου ὡς πρός τό Κ.Μ., καί $\vec{X}$ τό ἄνυσμα θέσεως τοῦ Κ.Μ. ὡς πρός τό σημεῖον ἀναφορᾶς, τότε

$$\sum_i m_i\vec{r}_i^{(0)} = \sum_i m_i\vec{r}_i - (\sum_i m_i)\vec{X} = 0,$$

$$\sum_i m_i\dot{\vec{r}}_i^{(0)} = \frac{d}{dt}\sum m_i\vec{r}_i^{(0)} = 0,$$

καί

$$\vec{L} = \sum_i (\vec{r}_i^{(0)}+\vec{X})\times m_i(\dot{\vec{r}}_i^{(0)}+\dot{\vec{X}}) = \sum_i \vec{r}_i^{(0)}\times m_i\dot{\vec{r}}_i^{(0)}+\vec{X}\times(\sum_i m_i)\dot{\vec{X}} +$$

$$+ \vec{X}\times(\sum_i m_i\dot{\vec{r}}_i^{(0)})+(\sum_i m_i\vec{r}_i^{(0)})\times\dot{\vec{X}} = \vec{L}_o+\vec{X}\times M\dot{\vec{X}} = \vec{L}_o+\vec{X}_{KM}\times\vec{P}_{o\lambda}$$

ὅπου

$$\vec{L}_o = \sum_i \vec{r}_i^{(0)}\times m_i\dot{\vec{r}}_i^{(0)} = \sum_i \vec{r}_i^{(0)}\times\vec{p}_i^{(0)},$$

ἡ "ἰδία στροφορμή".

Διατήρησις τῆς στροφορμῆς.

Συμφώνως πρός τήν ἐξίσωσιν (2.2-5), ὅταν ἡ συνισταμένη ροπή $\vec{M}$ ἐπί ὑλικοῦ συστήματος εἶναι μηδέν, τότε ἡ ὁλική στροφορμή διατηρεῖται,

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_{o\lambda} = 0 \qquad (2.2\text{-}9)$$

Προκειμένου περί Νευτωνείων ὑλικῶν συστημάτων, εἰς τήν συνισταμένην ροπήν μόνον αἱ ἐξωτερικαί δυνάμεις συνεισφέρουν. Ἡ ροπή τῶν ἐσωτερικῶν δυνάμεων εἶναι μηδέν ὡς συνισταμένη ἐκ συγγραμμικῶν ζευγῶν δυνάμεων $\vec{F}_{i(k)} = -\vec{F}_{k(i)}$, $i \neq k$ ὥστε

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_{o\lambda} = \vec{M}_{\varepsilon\xi} \qquad (2.2\text{-}10)$$

Διά τήν διατήρησιν τῆς ὁλικῆς στροφορμῆς Νευτωνείου ὑλικοῦ συστήματος πρέπει καί ἀρκεῖ νά μηδενίζεται ἡ ὁλική ἐξωτερική ροπή, $\vec{M}_{\varepsilon\xi} = 0$. Ὡς ἄμεσον πόρισμα τῶν ἀνωτέρω ἔχομεν ὅτι :

"Ἡ ὁλική στροφορμή ἀποκεκλεισμένου Νευτωνείου δυναμικοῦ συστήματος διατηρεῖται".

Ἡ διατήρησις τῆς ὁλικῆς στροφορμῆς τῶν ἀποκεκλεισμένων δυναμικῶν συστημάτων, πιστεύομεν ὅτι ἰσχύει πέραν τῶν Νευτωνείων συστημάτων ὡς γενικός νόμος τῆς φύσεως ὅπως καί ὁ νόμος τῆς διατηρήσεως τῆς γραμμικῆς ὁρμῆς. Ἡ διατήρησις τῆς ὁλικῆς στροφορμῆς, ἐν προκειμένῳ, ἐκφράζει τήν ἰσοτροπίαν (συμμετρίαν περιστροφῆς) τοῦ φυσικοῦ χώρου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

1. Ἡ πλήρης (full) ὁμάς τῶν ὀρθογωνίων μετασχηματισμῶν εἰς τάς τρεῖς διαστάσεις, εἶναι τό σύνολον τῶν γραμμικῶν μετασχηματισμῶν, οἱ ὁποῖοι ἀφίνουν τήν ἀπόστασιν $\vec{r}^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ ἀναλλοιώτον. Αὐτη δύναται νά παρασταθῆ διά τῶν 3 x 3 πινάκων O οἱ ὁποῖοι πληροῦν τήν $O^T O = I$ ὅπου O^T ὁ ἀνάστροφος τοῦ $O(O^T_{ik} \equiv O_{ki})$ καί I ὁ ταυτοτικός πίναξ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ἡ ὁμάς αὐτή καλεῖται συνήθως καί O_3 ὁμάς τῶν ὀρθογωνίων μετασχηματισμῶν εἰς τρεῖς διαστάσεις. Ἡ κυρία (proper) ὀρθογώνιος ὁμάς SO_3, ἡ ὁμάς τῶν ὀρθογωνίων μετασχηματισμῶν μέ ὀρίζουσαν μονάδα, ἀντιστοιχεῖ εἰς τήν ὁμάδα τῶν ὀρθογωνίων μετασχηματισμῶν ἄνευ κατοπτρισμοῦ, ἤτοι ταυτίζεται μέ τήν ὁμάδα περιστροφῶν R, εἰς τάς τρεῖς διαστάσεις (§ 1,ἄσκ.1). Αὐτη

καλεῖται καί συνεκτική ὁμάς, ἐπειδή ὅλα τά στοιχεῖα της συνδέονται συνεχῶς μετά τῆς ταυτότητος.

Δείξατε ὅτι κατά τούς μετασχηματισμούς τῆς ὁμάδος τῶν περιστροφῶν, ἡ στροφορμή ὑλικοῦ σημείου μετασχηματίζεται ὡς ἄνυσμα (ὡς καί τό ἄνυσμα θέσεως $\vec{r}$).

2. Δεδομένου ὅτι τό νετρόνιον n , τό πρωτόνιον p καί τό ἠλεκτρόνιον e^- εἶναι σωμάτια spin (ἰδιοστροφορμῆς) 1/2 ἕκαστον, ποῖον συμπέρασμα συνάγομεν διά τό spin τοῦ νετρίνο ν, ἐκ τῆς παρατηρουμένης διασπάσεως $n \to p + e^- + \nu$, δεχόμενοι τήν διατήρησιν τῆς στροφορμῆς; Ἡ παρουσία τοῦ ν, ἑνός τοὐλάχιστον σωματίου ἐπί πλέον τοῦ πρωτονίου καί ἠλεκτρονίου εἶναι ἤδη ἀπαραίτητος, ἵνα τό παρατηρούμενον φάσμα ἐνεργείας καί ὁρμῆς τῶν προϊόντων p, e^- εἶναι συμβιβαστόν μέ τήν διατήρησιν τῆς ἐνεργείας καί ὁρμῆς.

2.3. ΠΕΔΙΑ ΔΥΝΑΜΕΩΝ-ΕΡΓΩΝ-ΕΝΕΡΓΕΙΑ.

Ἔστω ἕν ἀδρανειακόν σύστημα ἀναφορᾶς. Ἐάν εἰς ἕκαστον σημεῖον $\vec{x}$ ', μιᾶς περιοχῆς τοῦ χώρου, ἀντιστοιχεῖ, διά δεδομένον ὑλικόν σημεῖον, μία δύναμις $\vec{F}(\vec{x},t)$, πιθανόν συνάρτησις τῆς χρονικῆς στιγμῆς t, τότε λέγομεν ὅτι εἰς τήν περιοχήν ταύτην ἔχομεν ἕν πεδίον δυνάμεων.

Ἐάν θεωρήσωμεν τό ὑλικόν σημεῖον κινούμενον ἐντός πεδίου δυνάμεων, ὁρίζομεν ὡς ἔργον παραγόμενον ὑπό τῶν δυνάμεων διά τήν κίνησιν τοῦ ὑλικοῦ σημείου ἀπό ἕν σημεῖον $\vec{r}_1$ εἰς ἕν σημεῖον $\vec{r}_2$ κατά μῆκος μιᾶς καμπύλης $C : \vec{r} = \vec{r}(s)$, τό μέγεθος

$$W_{12} = \int_C \vec{F}.d\vec{r} \quad . \qquad (2.3\text{-}1).$$

Χρησιμοποιοῦντες τήν ἐξίσωσιν τῆς κινήσεως $\vec{F} = m\dfrac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$, τό ἀνωτέρω ἔργον δυνάμεων ἐκφράζεται ὡς ἑξῆς :

$$W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}.d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} m\,\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.\frac{d\vec{r}}{dt}\,dt = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2\Bigg|_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2m}\vec{P}_2^2 - \frac{1}{2m}\vec{P}_1^2$$

Ἤτοι

$$W_{12} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \quad . \qquad (2.3\text{-}2)$$

Τό μέγεθος

$$T = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{1}{2m}\vec{p}^2 \qquad (2.3\text{-}3)$$

καλοῦμεν κινητικήν ἐνέργειαν τοῦ σημείου. Προκειμένου περί συστήματος πλειόνων ὑλικῶν σημείων, ἡ ὁλική κινητική ἐνέργεια $T_{o\lambda}$, εἶναι τό ἄθροισμα τῶν κινητικῶν ἐνεργειῶν τῶν συνιστώντων σημείων.

$$T_{o\lambda} = \sum_i \frac{1}{2}m_i\vec{v}_i^2 = \sum_i \frac{1}{2m_i}\vec{p}_i^2 \quad . \qquad (2.3\text{-}3\alpha).$$

Ἡ σχέσις (2.3-2) ἐκφράζει ὅτι τό παραχθέν ἔργον W_{12} κατά τήν κίνησιν τοῦ ὑλικοῦ σημείου, ἀπό τό $\vec{r}_1$, εἰς τό $\vec{r}_2$, μετετράπη ἰσοδυνάμως εἰς κινητικήν ἐνέργειαν ΔT τοῦ σωματίου. Προκειμένου περί συστήματος πλειόνων σωματίων, τό ὁλικόν ἔργον $W_{o\lambda} \equiv \sum_i W^{(i)}_{a(i),b(i)}$ ἰσοῦται μέ τήν μεταβολήν τῆς ὁλικῆς κινητικῆς ἐνεργείας

$$W_{o\lambda} = \Delta\, T_{o\lambda} \qquad (2.3.2\alpha)$$

Ἕν πεδίον δυνάμεων τοιοῦτον ὥστε τό ἔργον $W_{\vec{\alpha},\vec{\beta}}$ νά εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς τροχιᾶς τοῦ ὑλικοῦ σημείου, δι'ὅλα τά

$\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, χαλεῖται ἀστρόβιλον. Τό ἔργον ἀστροβίλου πεδίου δυνάμεων κατά μῆκος κλειστῆς τροχιᾶς εἶναι προφανῶς μηδέν,

$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 \quad , \tag{2.3-4}$$

ἐξ οὗ καί ἡ ὀνομασία.

Τῇ βοηθείᾳ τοῦ θεωρήματος τοῦ Stokes

$$\int \vec{F}.\, d\vec{r} = \int (\vec{\nabla}\times\vec{F})\, .\, d\vec{s} \tag{2.3-4α}$$

τό ἀστρόβιλον ἑνός πεδίου διατυποῦται ὑπό τήν διαφορικήν μορφήν

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0 \quad ,$$

ὅπου $\vec{\nabla}\times\vec{F}$ ὁ στροβιλισμός τοῦ $\vec{F}$. Εἰς καρτεσιανάς συντεταγμένας

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} .$$

Εἰς ἀστρόβιλα πεδία τό ἔργον

$$\phi(\vec{r}) = \int_{r_o}^{\vec{r}} \vec{F}.d\vec{r} \quad , \tag{2.3-5}$$

διά τυχόν συμβατικῶς ὁριζόμενον $\vec{r}_o$, ἐντός μιᾶς ἁπλῶς συνεκτικῆς περιοχῆς, εἶναι μονοσήμαντος συνάρτησις τοῦ $\vec{r}$ καί

$$\vec{F} = \vec{\nabla}\ \varphi(\vec{r}) \quad . \tag{2.3-7}$$

Πράγματι, ἐκ τοῦ ὅτι τό ἔργον εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ δρόμου, ἔχομεν $d\varphi = \vec{F}.d\vec{r} = F_x dx+F_y dy+F_z dz$. Ἐξ ἄλλου, ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ $\vec{\nabla}$, $d\varphi \equiv (\vec{\nabla}\varphi).d\vec{r}$.
Συγκρίνοντες τάς δύο αὐτάς ἐκφράσεις τοῦ $d\varphi$ ἔχομεν ἀμέσως τήν (2.3-7).

Ἡ συνάρτησις $\varphi(\vec{r})$ ἡ ὁποία μᾶς δίδει διά παραγωγίσεως τό πεδίον δυνάμεων $\vec{F}$ χαλεῖται δυναμικόν. Τό παρόν δυναμικόν εἶναι τοπική (local) συνάρτησις τῆς θέσεως.

Προφανῶς $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\varphi = 0$.

Οὕτω ἐδείξαμεν τό βασικόν θεώρημα : "ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη ἵνα ἕν πεδίον δυνάμεων $\vec{F}$ παράγεται ἐξ ἑνός δυναμικοῦ φ, ὡς $\vec{F} = \vec{\nabla}\varphi$, ἐντός μιᾶς ἁπλῶς συνεκτικῆς περιοχῆς, εἶναι ὁ μηδενισμός τοῦ στροβιλισμοῦ $\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$".

Συντηρητικά πεδία - διατήρησις τῆς ἐνεργείας.

Τό μέγεθος $V = -\varphi = -\int_{\vec{r}_o}^{\vec{r}} \vec{F}.d\vec{r}$ καλοῦμεν δυναμικήν ἐνέργειαν τοῦ σημείου. Ὅταν τό πεδίον δυνάμεων μηδενίζεται εἰς μεγάλας ἀποστάσεις ὡς $\vec{r}_o$ λαμβάνομεν συνήθως τό ∞, τότε $V(\infty) = 0$.

Τά ἀνωτέρω πεδία δέν εἶναι ἀπαραιτήτως ἐξωτερικά, π.χ. τά πεδία Νευτωνείων δυνάμεων (ἄσκ. 2).

Ἐάν τό δυναμικόν εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ χρόνου (ἀναλλοίωτον εἰς χρονικήν μετάθεσιν), τό πεδίον καλεῖται συντηρητικόν. Διά συντηρητικά πεδία, λαμβάνοντες ὑπ'ὄψι καί τήν (2.3-2), ἔχομεν ὅτι τό ἄθροισμα $T+V$ τῆς κινητικῆς καί δυναμικῆς ἐνεργείας διατηρεῖται.

Τό ἄθροισμα $T+V$ καλεῖται ὁλική ἐνέργεια. Οὕτω ἐφθάσαμεν εἰς τό θεμελιῶδες θεώρημα τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας. Κατ'ἐπέκτασιν τῶν ὅσων ἐλέχθησαν προηγουμένως, εἰς τά περί διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς καί τῆς στροφορμῆς, ἡ διατήρησις τῆς ἐνεργείας σχετίζεται πρός τό ἀναλλοίωτον ὡς πρός τήν χρονικήν μετάθεσιν ἤ ἄλλως τήν ὁμογένειαν τοῦ χρόνου. Μάλιστα, εἰς τήν θεωρίαν τῆς Σχετικότητος τοῦ Einstein, ὅπου ἡ ἐνέργεια καί ἡ ὁρμή εἶναι ἁπλῶς διάφοροι συνιστῶσαι τοῦ αὐτοῦ τετρανύσματος $P_\mu = (E,\vec{p})$, $\mu = 0,1,2,3$, ἡ διατήρησις τῆς ἐνεργείας καί τῆς ὁρμῆς εἶναι ἀρρήκτως συνδεδεμέναι εἰς ἕνα κοινόν νόμον διατηρήσεως ἐκφράζοντα τήν ὁμογένειαν τοῦ χωροχρόνου.

Εἰς τήν Μηχανικήν τοῦ Γαλιλαίου φυσικά, εἰς τήν ὁποίαν ἀναφέρεται ἡ παροῦσα ἀνάπτυξις, αἱ διατηρήσεις τῆς ἐνεργείας καί τῆς ὁρμῆς εἶναι ἀνεξάρτητοι μεταξύ των.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1. Δείξατε ὅτι ἡ κινητική T ἐνέργεια ὑλικοῦ συστήματος ὡς πρός τυχόν ἀδρανειακόν σύστημα ἀναφορᾶς ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῆς κινητικῆς ἐνεργείας T_o ὡς πρός τό σύστημα Κ.Μ., σύν τήν κινητικήν ἐνέργειαν $\frac{1}{2} M\vec{v}^2_{CM}$ τοῦ Κ.Μ. ὡς πρός τό τυχόν σύστημα. $T = T_o + \frac{1}{2} M\vec{v}^2_{KM}$.

2. Δίδεται σύστημα ὑλικῶν σημείων ἀλληλεπιδρώντων διά δυνάμεων αἱ ὁποῖαι παράγονται ἐκ μιᾶς δυναμικῆς συναρτήσεως $V(\vec{r}_1,\ldots\vec{r}_n)$ τῆς μορφῆς $V= V(r_{ij})$ ὅπου $\vec{r}_{ij}=\vec{r}_i-\vec{r}_j$, $i \neq j$, δηλ. συναρτήσεως τῶν σχετικῶν ἀποστάσεων τῶν ὑλικῶν σημείων. Δείξατε ὅτι διά τό ὡς ἄνω σύστημα ἔχομεν διατήρησιν ὁρμῆς, στροφορμῆς καί ἐνεργείας.

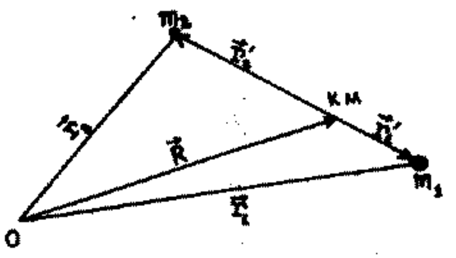
3. Εἰς τήν Ἀριστοτέλειον Μηχανικήν, τά ἐλεύθερα ὑλικά σημεῖα παραμένουν ἀκίνητα εἰς τόν ἀπόλυτον Εὐκλείδιον χῶρον, (ἀντί τοῦ "κινοῦνται εὐθυγράμμως καί ἰσοταχῶς ὡς πρός τυχόν ἀδρανειακόν σύστημα ἀναφορᾶς" τῆς Νευτωνείου Μηχανικῆς). Νά δοθοῦν: (α) Αἱ ἐξισώσεις κινήσεως,
(β) Τά θεωρήματα διατηρήσεως.

4. Λεπτός σφαιρικός φλοιός "κοσμικῆς κόνεως" ὁμοιομόρφου κατανομῆς, ὁλικῆς μάζης M, (προερχόμενος πιθανόν ἐκ μεγάλης κοσμικῆς ἐκρήξεως) εἰς χρόνον t=0 εὑρίσκεται ἐν ἠρεμίᾳ καί ἔχει ἀκτῖνα 1. (α). Νά ἐκφρασθῆ ἡ δυναμική ἐνέργεια, (ἐκ τῶν Νευτωνείων δυνάμεων ἕλξεως), εἰς χρόνον t=0.
(β) Ἡ ἐλευθερουμένη δυναμική ἐνέργεια ὅταν τό ἄστρον ὑπό τήν ἐπενέργειαν τῶν ἰδίων Νευτωνείων δυνάμεων αὐτοκατακρημνισθῇ εἰς τό κέντρον του.
(γ) Ὁ χρόνος ζωῆς μέχρι τῆς ἀνωτέρω αὐτοκατακρημνίσεως.

2.4 ΑΠΛΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ ΔΙΑΤΗΡΗΣΕΩΣ ΕΙΣ ΤΗΝ ΚΙΝΗΣΙΝ ΔΥΟ ΣΩΜΑΤΙΩΝ.

Θεωρήσωμεν τό ἁπλοῦν σύστημα δύο σωματίων μάζης m_1, m_2, ἀλληλεπιδρώντων διά κεντρικῆς δυνάμεως $\vec{F} = -\vec{\nabla}V(r)$, ὅπου $r = \sqrt{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}$, ἡ σχετική των ἀπόστασις καί $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ τά ἀνύσματα θέσεως ὡς πρός τυχόν ἀδρανειακόν σύστημα ἀναφορᾶς.

Αἱ ἐξισώσεις κινήσεως διά τό ὡς ἄνω σύστημα εἶναι:



Σχ. 2.4-1.
Ἀνάλυσις τῆς κινήσεως δύο ὑλικῶν σημείων εἰς σχετικήν κίνησιν καί κίνησις κέντρου μάζης.

$$m_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F},$$
$$m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = -\vec{F}. \qquad (2.4\text{-}1)$$

Ἔστω $\vec{R}$ τό ἄνυσμα θέσεως τοῦ κέντρου μάζης, ἤτοι:

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} . \qquad (2.4\text{-}2)$$

Τά ἀνύσματα θέσεως $\vec{r}_1{}', \vec{r}_2{}'$ ἐκφραζόμενα εἰς τό σύστημα K.M. εἶναι (Σχ. 2.4-1)

$$\vec{r}_1{}' = \vec{r}_1 - \vec{R} = \frac{m_2}{M}\vec{r}$$

$$\vec{r}_2{}' = \vec{r}_2 - \vec{R} = -\frac{m_1}{M}\vec{r}$$

$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$: ἡ σχετική των ἀπόστασις. (2.4-3)

$M = m_1 + m_2$

Ἐκ τῶν (2.4-1), (2.4-2) καί (2.4-3) προκύπτουν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις

$$M \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = 0 \qquad , \qquad (2.4\text{-}4)$$

καί

$$\mu \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \qquad) \qquad (2.4\text{-}5)$$

ὅπου $\mu \equiv \dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ ἡ ἀνηγμένη μᾶζα.

Ἐξ αὐτῶν ἡ (2.4-4) ἐκφράζει τήν κίνησιν τοῦ Κ.Μ. "Τό κέντρον μάζης κινεῖται εὐθυγράμμως καί ἰσοταχῶς, ὡς σωμάτιον μάζης $M = m_1 + m_2$, εἰς χῶρον ἐλεύθερον δυνάμεων. Ἡ (2.4-5) περιγράφει τήν σχετικήν κίνησιν. "Ἡ σχετική κίνησις ἰσοδυναμεῖ πρός κίνησιν ὑλικοῦ σημείου μάζης μ ἐντός στατικοῦ δυναμικοῦ $V(r)$".

Τά δύο εἰκονικά ὑλικά σημεῖα Μ καί μ δέν ἀλληλεπιδροῦν μεταξύ των.

Ὡς προκύπτει ἐκ τῶν (2.4-1) καί (2.4-4), τό Κ.Μ. κινεῖται μέ ὁρμήν ἴσην πρός τήν ὁλικήν ὁρμήν τοῦ συστήματος ,

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \qquad (2.4\text{-}6)$$

ἥτις καί διατηρεῖται. Τοῦτο εἶναι συνέπεια τοῦ ἀναλλοιώτου τοῦ δοθέντος συστήματος ὡς πρός τυχοῦσαν μετάθεσιν εἰς τόν χῶρον. Εἰδικώτερον διά τό σύστημα κέντρου μάζης,ἡ συνολική ὁρμή $\vec{p}_1' + \vec{p}_2' = 0$.

Ἡ σχετική ὁρμή (ἄσκ. 1) εἶναι

$$\vec{p} = \mu\,\vec{\upsilon} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\,\vec{p}_1 - \frac{m_1}{m_1+m_2}\,\vec{p}_2 \qquad (2.4\text{-}7)$$

ὅπου $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2$ ἡ σχετική ταχύτης μεταξύ τῶν δύο ὑλικῶν σημείων.

Αὕτη δέν διατηρεῖται, ὑποθέτομεν ὅτι $\vec{\nabla}V(r) \neq 0$. Ὡς ἐκ τούτου καί ἡ ὁρμή ἑνός ἑκάστου τῶν m_1 , m_2 δέν διατηρεῖται, ἀφοῦ βάσει τῶν (2.4-6), (2.4-7) ἔχομεν

$$\begin{aligned} \vec{p}_1 &= \vec{p} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\,\vec{P} \quad , \\ \vec{p}_2 &= -\,\vec{p} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\,\vec{P}\,. \end{aligned} \qquad (2.4\text{-}8)$$

Ἡ ὁλική ἐνέργεια Ε τοῦ συστήματος εἶναι

$$E = \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m_2} + V(r) \quad ,$$

ἤ

$$E = \frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{\vec{p}^{\,2}}{2\mu} + V(r) \quad . \qquad (2.4\text{-}9)$$

Ἐπειδή δέ ἡ $\vec{P}$, ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω, διατηρεῖται καί ἡ σχετική κίνησις γίνεται ἐντός συντηρητικοῦ δυναμικοῦ, ἕπεται ὅτι ἡ Ε διατηρεῖται ὡς πρός οἱονδήποτε σύστημα ἀναφορᾶς.

Εἰς τό σύστημα Κ.Μ.,εἰδικῶς, ἡ ὁλική ἐνέργεια ἰσοῦται, βάσει τῆς (2.4-9),πρός τήν σταθεράν ἐνέργειαν τῆς σχετικῆς κινήσεως , $\dfrac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + V(r)$.

Δέον νά παρατηρηθῇ ὅτι ἀνωτέρω δέν ἔχει ἔννοιαν νά ὁμιλοῦμεν περί τῆς ὁλικῆς ἐνεργείας ἑνός ἑκάστου τῶν m_1, m_2

ἀφοῦ ταῦτα ἔχουν κοινήν τήν δυναμικήν ἐνέργειαν $V(r)$.

Ὁ Νευτώνειος χαρακτήρ τῶν δυνάμεων ἀλληλεπιδράσεως ἐπιβάλλει διατήρησιν τῆς συνολικῆς στροφορμῆς -ἀναλλοίωτον τοῦ δοθέντος συστήματος ὡς πρός τυχοῦσαν στροφήν εἰς τόν χῶρον. Ἤτοι

$$\vec{L} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \text{σταθ.}$$

Εἰδικώτερον διά τό σύστημα Κ.Μ. διατηρεῖται καί ἡ στροφορμή ἑνός ἑκάστου τῶν σωματίων. Τοῦτο πάλιν ὀφείλεται εἰς τήν συγκεκριμμένην μορφήν τῶν δυνάμεων.

Οὕτω διά τυχοῦσαν σχέσιν τῶν μαζῶν m_1, m_2, εἰς τό σύστημα Κ.Μ. ἰσχύει βάσει καί τοῦ Σχ. 2.4-2.

$$m_1 \vec{\ell}'_1 = m_2 \vec{\ell}'_2 \quad \text{ἤ} \quad \frac{m_1}{m_2} \vec{\ell}'_1 = \vec{\ell}'_2$$

καί τελικῶς :

$$\vec{\ell}'_1 = \vec{L}' \frac{m_2}{M} = \text{σταθ.}$$

$$\vec{\ell}'_2 = \vec{L}' \frac{m_1}{M} = \text{σταθ.}$$

Σχ. 2.4-2.

Ἀνάλυσις στροφορμῆς συστήματος δύο σωματίων.

Ἐάν εἰδικῶς $m_1 >> m_2$, δυνάμεθα νά θεωρήσωμεν τό

σωμάτιον m_2 κινούμενον πέριξ τοῦ σχεδόν ἀκινήτου m_1, ἐντός κεντρικοῦ δυναμικοῦ μέ σταθεράν στροφορμήν, ἴσην πρός τήν ὁλικήν στροφορμήν.

Τά ἀνωτέρω ἐκτεθέντα συνοψίζονται εἰς τόν κάτωθι πίνακα.

Σύστημα Ἀναφορᾶς	Σχέσις μαζῶν	ΔΙΑΤΗΡΕΙΤΑΙ Η ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΟΡΜΗ; ἑνός ἑκάστου	ΔΙΑΤΗΡΕΙΤΑΙ Η ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΟΡΜΗ; ὁλική	Η ΕΝΕΡΓΕΙΑ; ἑνός ἑκάστου	Η ΕΝΕΡΓΕΙΑ; ὁλική	Η ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ; ἑνός ἑκάστου	Η ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ; ὁλική
ΣΥΣΤΗΜΑ Κ.Μ.	$\frac{m_1}{m_2}$ τυχόν	ΟΧΙ	ΝΑΙ	Δέν ἔχει ἔννοιαν	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ
	$\frac{m_1}{m_2} >> 1$	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ
ΤΥΧΟΝ ΑΔΡΑΝ. ΣΥΣΤΗΜΑ	$\frac{m_1}{m_2}$ τυχόν	ΟΧΙ	ΝΑΙ	Δέν ἔχει ἔννοιαν	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ

ΑΣΚΗΣΙΣ.

1. Θεωρήσατε σύστημα δύο ἀλληλεπιδρόντων σωματίων μάζης m_1 καί m_2 ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι ἡ σχετική ὁρμή $\vec{p}$, ἡ ὁρμή τοῦ εἰκονικοῦ ὑλικοῦ σημείου μάζης $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ τό ὁποῖον κινούμενον κατά τήν ἐξ. (2.4-5) περιγράφει τήν σχετικήν κίνησιν, εἶναι $\vec{p} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{p}_1 - \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{p}_2$ ὅπου $\vec{p}_1$ καί $\vec{p}_2$ αἱ ὁρμαί τῶν δύο σωματίων.

2.5 ΘΕΩΡΗΜΑ VIRIAL.

Θεωρήσωμεν δυναμικόν σύστημα ἐκ ν - ὑλικῶν σημείων, ἀνυσμάτων θέσεως $\vec{r}_i$, κινούμενον ὑπό τήν ἐπενέργειαν δυνάμεων $\vec{F}_i$ ἐντός πεπερασμένης κατά τάς διαστάσεις περιοχῆς ἀδρανειακοῦ συστήματος ἀναφορᾶς.

Αἱ θεμελειώδεις ἐξισώσεις τῆς κινήσεως εἶναι:

$$\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i\ , \quad i = 1,2,\ldots\nu\ . \qquad (2.5\text{-}1)$$

Ἐνδιαφερόμεθα διά τήν ποσότητα

$$G(t) = \sum_{i=1}^{\nu} \vec{p}_i(t)\vec{r}_i(t) \qquad (2.5\text{-}2)$$

Ἡ χρονικη μεταβολή τοῦ μεγέθους τούτου εἶναι :

$$\frac{dG}{dt} = \sum_{i=1}^{\nu} \dot{\vec{p}}_i\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{\nu}\vec{p}_i\cdot\dot{\vec{r}}_i$$

Βάσει τῆς (2.5-1), ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ δεξιοῦ μέλους τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος ἰσοῦται πρός $\sum_{i=1}^{\nu}\vec{F}_i\cdot\vec{r}_i$. Ὁ δεύτερος ὅρος $\sum_{i=1}^{\nu}\vec{p}_i\cdot\dot{\vec{r}}_i$ ἰσοῦται πρός τό διπλάσιον τῆς ὁλικῆς κινητικῆς ἐνεργείας T τοῦ συστήματος. Ἤτοι τελικῶς :

$$\frac{dG}{dt} = \sum_{i=1}^{\nu}\vec{F}_i\cdot\vec{r}_i + 2T \qquad (2.5\text{-}3)$$

Διά τήν χρονικήν μέσην τιμήν τῆς (2.5-3) ἔχομεν

$$<\frac{dG}{dt}> = \frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau}\frac{dG}{dt}dt = <\sum_{i=1}^{\nu}\vec{F}_i\cdot\vec{r}_i> + <2T> \ .$$

Ἐάν καί αἱ ὁρμαί τῶν ὑλικῶν σημείων παραμένουν πεπερασμέναι, τότε ὑπάρχει ἄνω φρᾶγμα διά τό G ὁπότε

$$\lim_{\tau\to+\infty} <\frac{dG}{dt}> = 0 \text{ ,καί}$$

$$2 \langle T \rangle = - \langle \sum_{i=1}^{\nu} \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \rangle . \qquad (2.5\text{-}4)$$

Ἡ (2.5-4) εἶναι γνωστή ὡς θεώρημα Virial καί εὑρίσκει μεγάλην ἐφαρμογήν εἰς τήν Στατιστικήν Μηχανικήν, ὅπου προκειμένου περί ἐργοδικῶν συστημάτων ἡ χρονική μέση τιμή ἰσοῦται μέ τήν στατιστικήν μέσην τιμήν εἰς τόν χῶρον τῶν φάσεων.

Ἡ (2.5-4) προκύπτει ἐξ ἄλλου καί εἰς τήν περίπτωσιν περιοδικῆς κινήσεως ἐάν ὡς 2τ θεωρήσωμεν τήν περίοδον τῆς κινήσεως, ὁπότε

$$\langle \frac{dG}{dt} \rangle = \frac{1}{T} (G(\tau) - G(-\tau)) = 0 ,$$

καί

$$2 \langle T \rangle = - \langle \sum_{i=1}^{\nu} \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \rangle .$$

Ε Φ Α Ρ Μ Ο Γ Α Ι.

i) Εἰς τήν Θερμοδυναμικήν - Νόμος τῶν τελείων ἀερίων. Θεωρήσωμεν δοχεῖον ὄγκου V περιέχον ποσότητα ἐκ n γραμμομορίων ἰδανικοῦ ἀερίου, ὑπό πίεσιν p.

Ἐφαρμόζοντες εἰς τήν (2.5-4) τό ἐργοδικόν θεώρημα καί λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν τό θεώρημα ἰσοκατανομῆς τῆς ἐνεργείας διά

τούς τρεῖς θερμοδυναμικούς βαθμούς ἐλευθερίας ἑκάστου μορίου ἔχομεν :

$$\int_{S(V)} P d\vec{s} \cdot \vec{r} = P \int_V (\vec{\nabla} \vec{r})\, dV = 3P\, V = 2\, \frac{3}{2} KT\, n\, N ,$$

ὅπου T : ἡ ἀπόλυτος θερμοκρασία, K : ἡ σταθερά Boltzmann καί N : ἡ σταθερά Loschmidt .

Τό γινόμενον K.N ὁρίζεται ὡς νέα σταθερά R-παγκόσμιος σταθερά τῶν ἀερίων -καί οὕτω προκύπτει ἡ περίφημος ἐξίσωσις τῶν τελείων ἀερίων:

$$P\, V = nRT \qquad (2.5\text{-}5)$$

ii) Χρήσιμοι σχέσεις μέσων τιμῶν κινητικῆς καί δυναμικῆς ἐνεργείας εἰς περίπτωσιν δυναμικῶν $V = a/r^n$.

Ὅταν αἱ δυνάμεις εἶναι συντηρητικαί $\vec{F}_i = - \vec{\nabla} V_i$, $i = 1,2,\dots,\nu$. Τό θεώρημα Virial δίδει :

$$\langle T \rangle = - \frac{1}{2} \langle - \sum_{i=1}^{\nu} \vec{\nabla} V_i \cdot \vec{r}_i \rangle = \frac{1}{2} \langle \sum_{i=1}^{\nu} \vec{\nabla} V_i \cdot \vec{r}_i \rangle \qquad (2.5\text{-}6)$$

Δι'ἕν ὑλικόν σημεῖον, π.χ., ἐκτελοῦν περιοδικήν ἤ φραγμένην κίνησιν ἐντός κεντρικοῦ δυναμικοῦ $V(r)$, ἔχομεν

$$\langle T \rangle = \frac{1}{2} \langle \frac{dV}{dr} r \rangle . \qquad (2.5\text{-}7)$$

Ἡ (2.5-7) καθίσταται ἰδιαιτέρως εὔχρηστος διά δυναμικά τῆς μορφῆς $V = \frac{a}{r^n}$, τότε

$$\vec{\nabla} V = -n \frac{a}{r^{n+1}} \hat{r} , \qquad \langle T \rangle = -\frac{n}{2} \langle \frac{a}{r^{n+1}} r \rangle = -\frac{n}{2} \langle \frac{a}{r^n} \rangle ,$$

καί

$$\langle T \rangle = -\frac{n}{2} \langle V \rangle . \qquad (2.5\text{-}8)$$

Οὕτω π.χ. εἰς τήν περίπτωσιν $n = 1$, $a = -q$, ἑνός ἑλκτικοῦ δυναμικοῦ Coulomb $V(r) = -\frac{q}{r}$, ἡ μέση τιμή τῆς κινητικῆς ἐνεργείας, κατά μῆκος κλειστῆς τροχιᾶς ἰσοῦται πρός τό μεῖον ἥμισυ τῆς μέσης τιμῆς τῆς δυναμικῆς ἐνεργείας. $\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \langle V \rangle$. Ἡ αὐτή πρότασις ἰσχύει προφανῶς καί διά τό δυναμικόν τῆς Νευτωνείου ἕλξεως. Διά $n = -2$, τό δυναμικόν τοῦ ἁρμονικοῦ ταλαντωτοῦ, ἔχομεν

$$\langle T \rangle = \langle V \rangle .$$

"Αἱ μέσαι τιμαί κινητικῆς καί δυναμικῆς ἐνεργείας ἁρμονι-

κοῦ ταλαντωτοῦ εἶναι ἴσαι".

Ἡ (2.5-8) μέ χρῆσιν τοῦ θεωρήματος τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας

$$E = T+V = \langle T+V \rangle = \langle T \rangle + \langle V \rangle = -\frac{n}{2}\langle V \rangle + \langle V \rangle = \frac{2-n}{2} \langle V \rangle ,$$

διατυποῦται καί ὡς ἑξῆς :

$$E = \frac{2-n}{2} \langle V \rangle . \qquad (2.5\text{-}9)$$

Οὕτω, ἡ ὁλική ἐνέργεια ἠλεκτρονίου κινουμένου ἐντός δυναμικοῦ Coulomb ἰσοῦται πρός τό ἥμισυ τῆς μέσης τιμῆς τῆς δυναμικῆς ἐνεργείας $E_{ολ} = \frac{1}{2} \langle V \rangle$ καί ἡ ὁλική ἐνέργεια ἁρμονικοῦ ταλαντωτοῦ εἶναι διπλασία τῆς μέσης τιμῆς τῆς δυναμικῆς ἐνεργείας

$$E = 2\langle V \rangle .$$

"ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ GREEN ΚΑΙ ΑΡΜΟΝΙΚΟΣ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗΣ"

3.1. ΓΕΝΙΚΑ, ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ GREEN.

Ἡ βασική ἐξίσωσις τῆς δυναμικῆς, ἡ ὁποία διέπει τήν κίνησιν ἑνός ὑλικοῦ σημείου, εἰς μίαν διάστασιν χάριν ἁπλότητος, ἔχει γενικῶς τήν μορφήν :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x, \frac{dx}{dt}, t) \quad . \qquad (3.1\text{-}1)$$

Ὅταν ἡ διαφορική αὐτη ἐξίσωσις εἶναι γραμμική ὡς πρός x, ἤτοι δύναται νά γραφῆ ὡς :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + A(t)\frac{dx}{dt} + B(t)X = F(t), \qquad (3.1\text{-}2)$$

τότε δυνάμεθα νά ἐφαρμόσωμεν διά τήν ἐπίλυσιν ταύτης τήν

μέθοδον τῶν συναρτήσεων Green. Ἡ μέθοδος αὕτη στηρίζεται ἐπί τῆς ἀρχῆς τῆς ἐπαλληλίας ἥτις ἰσχύει ὅταν τό σύνολον τῶν λύσεων μιᾶς ἐξισώσεως ἀποτελεῖ γραμμικόν χῶρον. Οὕτω ἐάν ἀναλύσωμεν τήν $F(t)$ εἰς ἄθροισμα δυνάμεων καί ἐπιλύσωμεν δι' ἑκάστην τούτων τήν ἐξίσωσιν (3.1-2), τότε καί ἡ σύνθεσις τῶν λύσεων ἀποτελεῖ λύσιν τῆς (3.1-2).

Κατ'ἀρχήν θά ἀναλύσωμεν τήν δύναμιν $F(t)$:

Γράφομεν :

$$F(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} F_i(t) \quad , \qquad (3.1\text{-}3)$$

ὅπου

$$F_i(t) = \begin{cases} F(t) & t_i \le t \le t_{i+1} \\ 0 & t > t_{i+1} \text{ καί } t < t_i \end{cases} .$$

Ἡ (3.1-3) δύναται νά προσεγγισθῆ ὡς :

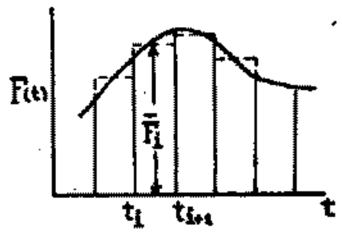
$$F(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \bar{F}_i \varepsilon_i(t) \qquad (3.1\text{-}4)$$

ὅπου $\bar{F}_1$ ἡ μέση τιμή τῆς $F_i(t)$ εἰς τό διάστημα (t_i, t_{i+1}), καί $\varepsilon_i(t)$ ἡ χαρακτηριστική συνάρτησις τοῦ ἐν λόγῳ διαστήματος :

$$\varepsilon_i(t) = \begin{cases} 1 & t_i \le t < t_{i+1} \\ 0 & t > t_{i+1}, \quad t < t_i \end{cases} .$$

Ἡ συνάρτησις αὕτη ἀντιστοιχεῖ εἰς παλμόν πλάτους ἴσου πρός τήν μονάδα καί διαρκείας $\Delta t = t_{i+1} - t_i$.

Τά ἀνωτέρω ἀποδίδονται γραφικῶς εἰς τό Σχ. 3.1-1.



Σχ. 3.1-1.

Γραφική παράστασις ἀναλύσεως δυνάμεως εἰς διαδοχικούς παλμούς (ὤσεις). Εἰς τήν συνεχῆ γραμμήν ἀντιστοιχεῖ ἡ ἀνάλυσις (3.1-3) καί εἰς τήν διακεκομμένην ἡ (3.1-4).

Χρησιμοποιοῦντες τήν συνάρτησιν δ τοῦ Dirac ἥτις ὁρίζεται ὡς :

$$\delta(t) = 0, \ t \ne 0 \quad \text{καί}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1,$$

δυνάμεθα νά γράψωμεν τήν $\varepsilon_i(t)$ ὡς :

$$\varepsilon_i(t) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \delta(t-t')dt' . \qquad (3.1\text{-}5)$$

Πράγματι διά $t \in (t_i, t_{i+1})$, ἔχομεν

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \delta(t-t')dt' = 1$$

καί διά

$$t \notin (t_i, t_{i+1}), \quad \int_{t_i}^{t_{i+1}} \delta(t-t')dt' = 0.$$

Οὕτω ἡ (3.1-4) γράφεται :

$$F(t) = \sum_i \bar{F}_i \varepsilon_i(t) = \sum_i \bar{F}_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \delta(t-t')dt' = \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \bar{F}_i \delta(t-t')dt' . \qquad (3.1\text{-}6)$$

Εἰς τό ὅριον

$$\Delta t \to 0,$$

$$\lim t_{i+1} = \lim t_i = t', \quad \lim \bar{F}_i = F(t') ,$$

καί

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t')\delta(t-t')dt' . \qquad (3.1\text{-}7)$$

Ἡ ταυτότης (3.1-7) ἰσχύουσα διά τυχοῦσαν συνάρτησιν $F(t)$ συνεχῆ εἰς τό $(-\infty, +\infty)$ ἀποτελεῖ καί συνήθη ὁρισμόν τῆς συναρτήσεως δ.

Οὕτω ἡ (3.1-2) γράφεται :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + A \frac{dx}{dt} + Bx = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t')\delta(t-t')dt'$$

ἤ

$$Lx = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t')\,\delta(t-t')dt' \;, \qquad (3.1\text{-}8)$$

ὅπου L ὁ γραμμικός διαφορικός τελεστής :

$$L = m\,\frac{d^2}{dt^2} + A(t)\,\frac{d}{dt} + B(t) \quad .$$

Καλοῦμεν συνάρτησιν Green καί συμβολίζομεν διά τοῦ $G(t,t')$ τήν τυχοῦσαν λύσιν τῆς

$$LG(t,t') = \delta(t-t') \quad . \qquad (3.1\text{-}9)$$

Εἰς ἑκάστην συνάρτησιν Green ἀντιστοιχεῖ μία λύσις τῆς ἐξισώσεως (3.1-2)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,t')F(t'),dt' \quad . \qquad (3.1\text{-}10)$$

Πράγματι πολλαπλασιάζοντες ἐξ ἀριστερῶν ἀμφότερα τά μέλη τῆς (3.1-10) μέ τόν τελεστήν L καί ἀντιμεταθέτοντες τοῦτον μέ τό ὁλοκλήρωμα ἔχομεν :

$$L\,x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} LG(t,t')F(t')dt' = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t')F(t')dt' = F(t).\ \text{ὅ.ε.δ.}$$

Ἄν ἡ συνάρτησις Green ἱκανοποιεῖ ὁμογενεῖς συνοριακάς συνθήκας, τότε καί ἡ ἐκ τῆς (3.1-10) ὁριζομένη λύσις πληροῖ τάς αὐτάς συνθήκας (ἄσκ. 1,2). Μή ὁμογενεῖς συνοριακαί συνθῆκαι τοῦ προβλήματος δέν εἶναι δυνατόν νά περιληφθοῦν εἰς τήν συνάρτησιν Green ἀλλά πρέπει νά προσθέσωμεν εἰς τήν (3.1-10) καί κατάλληλον λύσιν $x_o(t)$, τῆς ὁμογενοῦς ἐξισώσεως, ἤτοι :

$$x(t) = x_o(t) + \int_{-\infty}^{\infty} G(t,t')f(t')dt', \quad \text{ὅπου } Lx_o(t) = 0.$$

Ἀνωτέρω, ἐθεωρήσαμεν χάριν ἁπλότητος κίνησιν ὑλικοῦ σημείου εἰς μίαν διάστασιν. Εἰς τρεῖς διαστάσεις, ἡ συνάρτησις διαδόσεως γίνεται 3 X 3 πίναξ, ἄνευ οὐσιώδους μεταβολῆς (ἄσκ. 6).

Ε Φ Α Ρ Μ Ο Γ Η.

Θά χρησιμοποιήσωμεν τήν μέθοδον τῶν συναρτήσεων Green διά νά ἐπιλύσωμεν τήν ἁπλῆν περίπτωσιν γραμμικῆς ἐξισώσεως :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F(t), \qquad (3.1\text{-}11)$$

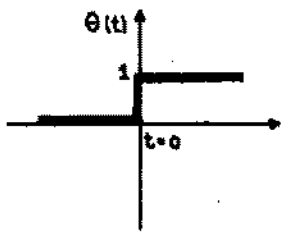
ἡ ὁποία διέπει τήν κίνησιν σωματίου μάζης $m = 1$ ὑπό τήν ἐπενέργειαν δυνάμεως $F(t)$.

Θά ἀναζητήσωμεν κατ'ἀρχάς τήν λύσιν τῆς

$$\frac{d^2G(t,t')}{dt^2} = \delta(t-t') \qquad (3.1\text{-}12)$$

Εἰσάγοντες τήν συνάρτησιν βαθμῖδος (step function) $\theta(t)$ (Σχ. 3.1-2), ἥτις ὁρίζεται ὡς:

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} , \qquad (3.1\text{-}13)$$



Σχ. 3.1-2.
Γραφική παράστασις τῆς συναρτήσεως θ.

ἡ συνάρτησις δ ἰσοῦται μέ τήν παράγωγον τῆς θ ὡς πρός τόν χρόνον :

$$\delta(t-t') = \frac{d}{dt}\,\theta(t-t'). \qquad (3.1\text{-}14)$$

Οὕτω ἡ (3.1-12) γράφεται :

$$\frac{d^2G(t,t')}{dt^2} = \frac{d}{dt}\,\theta\,(t-t') .$$

Πρώτη ὁλοκλήρωσις δίδει :

$$\int_{t_o}^{t} \frac{d^2G}{dt^2}\,dt = \int_{t_o}^{t} \frac{d\theta(t-t')}{dt}\,dt \rightarrow \frac{dG(t)}{dt} = b+\theta(t-t') ,$$

καί δευτέρα ὁλοκλήρωσις

$$G(t,t') = a + b\,t + (t-t')\,\theta(t-t'). \qquad (3.1\text{-}15)$$

Ἡ λύσις αὐτη διακρίνεται εἰς δύο τμήματα, τήν λύσιν $a + bt$ τῆς ὁμογενοῦς ἐξισώσεως $\frac{d^2G}{dt} = 0$ καί μίαν λύσιν τῆς πλήρους ἐξισώσεως (3.1-12), μέ ἐξωτερικόν αἴτιον τήν $\delta(t-t')$ π.χ. τήν

$$G_R = (t-t')\,\theta(t-t'). \qquad (3.1\text{-}16)$$

Ἡ G_R καλεῖται ὕστερος (retarded) συνάρτησις Green λόγῳ τοῦ ὅτι αὐτη μηδενίζεται ὅταν $t < t'$ δηλαδή ὅταν ὁ χρόνος t εἶναι πρότερος τῆς χρονικῆς στιγμῆς t' καθ'ἥν ἠσκήθη τό αἴτιον, ἡ στιγμιαία μοναδιαία ὦσις.

Ἑτέρα συνάρτησις διαδόσεως εἶναι ἡ

$$G_A = (t'-t\,)\,\theta(t'-t\,) \qquad (3.1\text{-}17)$$

καλουμένη πρόδρομος συνάρτησις Green (advanced), κατά τήν ὁποίαν τό ἀποτέλεσμα προηγεῖται τοῦ αἰτίου. Ἵνα $G_A \neq 0$, πρέπει $t < t'$. Παρατηρήσατε ὅτι $G_A(t,t')=+G_R(t',t)$ (ἄσκ.3).

Τό ἡμιάθροισμα $G_S = \frac{1}{2}(G_R+G_A)$ τῆς ὑστέρου καί προδρόμου συναρτήσεως διαδόσεως ἀποτελεῖ ἐπίσης συνάρτησιν διαδόσεως συμμετρικήν ὡς πρός τό παρελθόν καί τό μέλλον. Ὅλαι αἱ ἀνωτέρω συναρτήσεις διαδόσεως, ὕστερος, πρόδρομος καί συμμετρική, εἶναι συναρτήσεις μόνον τῆς σχετικῆς χρονικῆς διαφορᾶς $t - t'$ ἤτοι $G_{R,A,S}\ (t,t') = G(t-t')$. Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τό ὅτι ἡ (3.1-12) καθώς καί αἱ συνοριακαί συνθῆκαι τάς ὁποίας αἱ ἀνωτέρω συναρτήσεις διαδόσεως πληροῦν εἶναι ἀναλλοίωτοι εἰς χρονικήν μετάθεσιν.

Διά νά εὕρωμεν τυχοῦσαν λύσιν τῆς (3.1-11) θά χρησιμοποιήσωμεν τήν ἔκφρασιν (3.1-16) καί θά προσθέσωμεν κατάλληλον λύσιν τῆς ὁμογενοῦς. Ἤτοι :

$$x(t) = a+bt + \int_{-\infty}^{\infty} F(t')(t-t')\theta(t-t')dt' \qquad (3.1\text{-}18)$$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ.

1. Διά τήν μονοσήμαντον λύσιν τοῦ προβλήματος τῆς κινήσεως ὑλικοῦ σημείου ὑπό τήν ἐπενέργειαν δοθείσης δυνά-

μεως πρέπει καί ἀρκεῖ νά γνωρίζωμεν δύο γραμμικάς σχέσεις :

$$\sum_{k=1}^{2} A_{ik}x(t_k) + \sum_{k=1}^{2} B_{ik}\,\dot{x}(t_k) = C_i\ , \quad i = 1,2$$

ὅπου αἱ ὁρίζουσαι τῶν 2 X 2 πινάκων τῶν συντελεστῶν τοῦ ἀνωτέρω γραμμικοῦ ὡς πρός x , $\dot{x}$ συστήματος δέν εἶναι ὅλαι μηδέν.

Ὅταν $t_1 \neq t_2$ ὁμιλοῦμεν περί συνοριακῶν συνθηκῶν. Ὅταν $t_1 = t_2 = t_o$ ἔχομεν πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν. Ἄν $C_1 = C_2 = 0$, αἱ συνθῆκαι καλοῦνται ὁμογενεῖς.

Νά εὑρεθοῦν αἱ συναρτήσεις διαδόσεως μέ τάς κάτωθι ὁμογενεῖς συνθήκας :

(i) $x(-\infty) = 0,\ \dot{x}(-\infty) = 0,$

(ii) $x(+\infty) = 0,\ \dot{x}(+\infty) = 0,$

(iii) $x(t_1)+x(t_2) = 0,\ \dot{x}(t_1)+\dot{x}(t_2) = 0,\quad t_1 \leq t \leq t_2,$

(iv) $x(t_1) = x(t_2) = 0 \quad t_1 \leq t \leq t_2.$

(Ἀπ. (i)) $G = G_R(t,t') = (t-t')\theta(t-t')$

(ii) $G = G_A = -(t-t')\theta(t'-t)$

(iii) $G = \frac{1}{2}|t-t'| - \frac{1}{4}(t_2-t_1)$

(iv) $G = \frac{1}{2}\left\{ \frac{2t_1t_2}{t_2-t_1} - \frac{(t_1+t_2)}{t_2-t_1}(t'+t) + \frac{2tt'}{t_2-t_1} + |t-t'| \right\}$.

2. Νά δοθῆ ἡ συνάρτησις διαδόσεως τῆς ἐξισώσεως (3.1-11) ἡ ἱκανοποιοῦσα τήν γενικήν ὁμογενῆ συνθήκην τῆς ἀσκήσεως 2.

3. Δείξατε ὅτι ἡ σχέσις $G_A(t,t') = G_R(t,t')$ ἀναμένεται ἐκ τῆς συμμετρίας τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως (3.1-12) εἰς ἀντιστροφήν χρόνου : $t \to -t$.

4. Δείξατε ὅτι ἡ διαφορά δύο συναρτήσεων διαδόσεως ἀποτελεῖ λύσιν τῆς ὁμογενοῦς, ὥστε τυχοῦσα συνάρτησις διαδόσεως G τῆς ἐξισώσεως (3.1-11), δύναται νά ἐκφρασθῆ ὡς $G(t) = G_R(t) + a + bt$.

5. Δείξατε ὅτι ἡ ἔκφρασις (3.1-18) δίδει, διά καταλλήλου ἐκλογῆς τῶν a καί b, λύσιν τῆς (3.1-11) μέ τυχούσας ἀρχικάς συνθήκας $x(t_o) = x_o$ καί $\frac{dx}{dt}(t_1) = v$.

6. Ὑλικόν σημεῖον κινεῖται εἰς τόν χῶρον τῶν τριῶν διαστάσεων $m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \vec{F}(t)$.
Νά εὑρεθῆ ἡ συνάρτησις G_R καί νά θεωρηθοῦν ἐκ νέου αἱ ἀσκήσεις αἱ ἀντίστοιχοι τῶν 1, 2, 3 καί 4.

(Ὑποδ. $G_R(t,t') = (t-t')\theta(t-t')\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$).

3.2. ΑΡΜΟΝΙΚΟΣ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗΣ.

Ὁ ἁρμονικός ταλαντωτής ἱκανοποιεῖ τήν ἐξίσωσιν

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + 2R'\frac{dx}{dt} + k'^2x = \varphi'(t) \quad , \qquad (3.2\text{-}1)$$

Δύναται συνεπῶς νά λυθῆ διά τῆς μεθόδου τῶν συναρτήσεων Green, καθ'ὅτι ἡ (3.2-1) εἶναι μορφή τῆς γραμμικῆς ὡς πρός x διαφορικῆς ἐξισώσεως (3.1-2).

Ὁ ὅρος $2R'\frac{dx}{dt}$ εἶναι ἡ δύναμις τριβῆς καί ὁ k'^2x

ἡ δύναμις ἐπαναφορᾶς. Δι'ἁπλούστευσιν γράφομεν :

$$\frac{2R'}{m} = 2R , \quad \frac{k'^2}{m} = k^2 \quad , \frac{\varphi'(t)}{m} = \varphi(t). \quad \text{Οὕτω}$$

ἡ (3.2-1) γράφεται :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2R \frac{dx}{dt} + k^2x = \varphi(t). \qquad (3.2\text{-}2)$$

Εὑρίσκομεν κατ'ἀρχάς τήν λύσιν τῆς ὁμογενοῦς διαφορικῆς ἐξισώσεως ($\varphi(t) = 0$).

Θέτοντες $x = e^{\rho t}$ ἔχομεν ὅτι τό ρ ἱκανοποιεῖ τό χαρακτηριστικόν πολυώνυμον $\rho^2+2R\rho + k^2 = 0$,

μέ λύσεις : $\rho_1 = -R + \sqrt{R^2-k^2}$, $\rho_2 = -R - \sqrt{R^2-k^2}$.

Οὕτω :

$$x = C\, e^{-Rt+i\omega_o t} + De^{-Rt-i\omega_o t} = e^{-Rt}(C.e^{i\omega_o t}+De^{-i\omega_o t})$$

ἤ (3.2-3)

$$x = Ae^{-Rt} \sin \omega_{ot} + Be^{-Rt} \cos \omega_{ot},$$

ὅπου $\omega_o = \sqrt{k^2-R^2}$.

Ἵνα ἡ (3.2-3) παριστᾶ ταλάντωσιν πρέπει $R^2-k^2 < 0$.

Ἡ τιμή $\omega_o = \sqrt{k^2-R^2}$ δίδει τήν ἰδιοσυχνότητα τῆς ταλαντώσεως.

Ἀναζητήσωμεν τάς συναρτήσεις Green, ἤτοι τάς λύσεις

τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως.

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + 2R \frac{d}{dt} + \omega_o^2 + R^2\right] G(t,t') = \delta(t-t'), \qquad (3.2\text{-}4)$$

μέ καταλλήλους ὁμογενεῖς συνοριακάς συνθήκας.

Κατ'ἀρχήν ἐκ τῆς συμμετρίας τῆς ἐξισώσεως (3.2-4), ὡς πρός μετάθεσιν $t \to t+c$, $t' \to t'+c$ ἕπεται ὅτι ἡ $G(t,t')$ εἶναι συνάρτησις μόνον τῆς διαφορᾶς $t-t'$ ἤτοι $G(t,t') = G(t-t')$. Δυνάμει τῆς ἀνωτέρω παρατηρήσεως, τῆς λύσεως (3.2-3) καί τῆς φυσικῆς ἑρμηνείας τῆς συναρτήσεως Green ὡς ἀπόκρίσεως τοῦ ἁρμονικοῦ ταλαντωτοῦ ὑπό τήν ἐπίδρασιν στιγμιαίας μοναδιαίας ὤσεως $\delta(t-t')$ εὑρίσκομεν ἀμέσως (ἄσκ. 1), ὅτι :

$$G_R(t,t') = \frac{\theta(t-t')}{m\omega_o} e^{-R(t-t')} \sin\omega_o(t-t') \ . \qquad (3.2\text{-}5)$$

Ἡ ὦσις δυνάμεως ἁπλῶς μεταφέρει ὁρμήν $1 = mv_o$ κατά τήν χρονικήν στιγμήν $t = t'$ εἰς ἕνα ἠρεμοῦντα ταλαντωτήν. Ὁ ταλαντωτής ἀρχίζει νά κινεῖται ἐκ τῆς θέσεως ἰσορροπίας $x = 0$ κατά τήν χρονικήν στιγμήν $t = t'$ μέ ἀρχικήν ταχύτητα $v_o = \frac{1}{m}$. Ἀνάλογοι στοιχειώδεις σκέψεις ὁδηγοῦν καί εἰς τήν πρόδρομον συνάρτησιν διαδόσεως:

$$G_A(t,t') = -\frac{\theta(t-t')}{m\omega_o} e^{-R(t-t)}\sin\omega_o(t-t') \tag{3.2-6}$$

Ἡ σχέσις (3.2-6) ὀφείλεται εἰς τήν συμμετρίαν τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως τοῦ ἁρμονικοῦ ταλαντωτοῦ ὡς πρός ἀναστροφήν χρόνου · $R \to -R$.

Ε ὕ ρ ε σ ι ς τ ῆ ς σ υ ν α ρ τ ή σ ε ω ς δ ι α δ ό σ ε ω ς δ ι' ἀ ν α λ ύ σ ε ω ς κ α τ ά F o u r i e r.

Κατωτέρω θά ἀναπτύξωμεν καί ἑτέραν μέθοδον διά τήν εὕρεσιν τῆς συναρτήσεως διαδόσεως. Τήν ἀνάλυσιν κατά Fourier, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ βασικήν μαθηματικήν μέθοδον λύσεως προβλημάτων τῆς Φυσικῆς. Πρός τοῦτο θέτομεν $t-t' = \tau$, καί γράφομεν τούς κατά Fourier μετασχηματισμούς τοῦ $G(\tau) = G(t-t')$ καί $\delta(\tau) = \delta(t-t')$.

$$G(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega)e^{-i\omega\tau}\,d\omega \quad , \tag{3.2-7}$$

$$\delta(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau}\,d\omega \quad . \tag{3.2-8}$$

Ἀντικαθιστῶντες τάς ἐκφράσεις (3.2-7), (3.2-8) εἰς τήν (3.2-4), ἔχομεν

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[(-\omega^2-2Ri\omega+\omega_o^2+R^2)g(\omega)-1\right]e^{-i\omega\tau}\,d\omega = 0\ , \qquad \text{ἤ}$$

$$(-\omega^2-2Ri\omega+\omega_o^2+R^2)g(\omega) = 1 \quad .$$

Ἄρα
$$g(\omega) = \frac{1}{-\omega^2-2Ri\omega+\omega_o^2+R^2} \quad , \tag{3.2-9}$$

καί ἡ (3.2-7) γράφεται :

$$G(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\omega\tau}\,d\omega}{-\omega^2-2Ri\omega+\omega_o^2+R^2} \quad . \tag{3.2-10}$$

Τό ἀνωτέρω ὁλοκλήρωμα δυνάμεθα νά ὑπολογίσωμεν διά τῆς μεθόδου τῶν ὁλοκληρωτικῶν ὑπολοίπων.

Ὡς γνωστόν τό ὁλοκλήρωμα $\oint f(z)dz$ μιᾶς ἀναλυτικῆς συναρτήσεως $f(z)$ κατά μίαν κλειστήν καμπύλην ἰσοῦται μέ $2\pi i$ ἐπί τό ἄθροισμα τῶν ὁλοκληρωτικῶν ὑπολοίπων (Residuum) τῶν πόλων πρώτης τάξεως τῆς συναρτήσεως $f(z)$, οἵτινες περιέχονται ἐντός τῆς κλειστῆς καμπύλης c ἤτοι :

$$\oint f(z)dz = 2\pi i \sum_k r_k \ .$$

Εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν ἡ ὑπό ὁλοκλήρωσιν συνάρτησις εἶναι ἡ :

$$f(\omega) = \frac{e^{-i\omega\tau}}{(\omega^2+2iR\omega-\omega_o^2-R^2)} = \frac{e^{-i\omega\tau}}{(\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2)} \ ,$$

ἡ ὁποία ἔχει δύο ἁπλοῦς πόλους πρώτης τάξεως ω_1 καί ω_2, ὅπου : $\omega_1 = -iR+\omega_o$, $\omega_2 = -iR-\omega_o$.

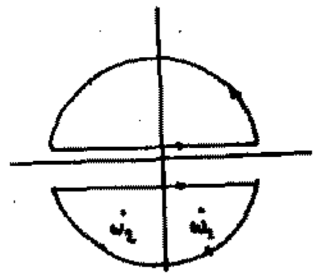
Διά νά ἐφαρμόσωμεν τήν μέθοδον τῶν residuum θά πρέπει ἡ ἀνοικτή τροχιά ὁλοκληρώματος κατά μῆκος τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος νά μετατραπῆ εἰς ἰσοδύναμον κλειστήν καμπύλην, π.χ. δι᾿ἐπισυνάψεως τῆς ἀπείρου ἄνω ἤ κάτω ἡμιπεριφερείας, ὡς εἰς τό Σχ. 3.2-1.

Διά $\tau < 0$, ἡ $f(\omega)$ μηδενίζεται ἐκθετικῶς μετά τῆς ἀκτῖνος R ἐπί τοῦ ἄνω ἡμικυκλίου. Διά $\tau > 0$ ἡ $f(\omega)$ μηδενίζεται ἐπί τοῦ κάτω ἡμικυκλίου.

Οὕτω : Διά $\tau < 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)d\omega = \oint f(\omega)d\omega = 2\pi i \sum_k r_k = 0$$

διότι τό ἄνω ἡμιεπίπεδον δέν ἔχει πόλους.



Σχ. 3.2-1.

Κλεισταί τροχιαί διά τόν ὑπολογισμόν τοῦ ὁλοκληρώματος (3.2-10), χρήσει ὁλοκληρωτικῶν ὑπολοίπων.

Διά $\tau > 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)d\omega = \oint f(\omega)d\omega = 2\pi i \sum_{k=1}^{2} r_k \ ,$$

ὅπου $r_1 = +\mathrm{Res}\, f(\omega=\omega_1) = \dfrac{-e^{-i\omega_1\tau}}{(\omega_1-\omega_2)}$,

$$r_2 = -\mathrm{Res}\, f(\omega = \omega_2) = -\ \frac{e^{-i\omega_2\tau}}{(\omega_2-\omega_1} \ .$$

$$\text{Ἄρα} : -\int f(\omega)d\omega = \frac{2\pi i}{\omega_1-\omega_2}(e^{-i\omega_1\tau} - e^{-i\omega_2\tau}) =$$

$$= \frac{2\pi i}{2\omega_o} (e^{-R\tau}\ e^{-i\omega_o\tau} - e^{-R\tau}\ e^{i\omega_o\tau}) = \frac{2\pi e^{-R\tau}}{\omega_o}\ \sin(\omega_o\ \tau),$$

$$\text{καί} \quad G(\tau) = \frac{e^{-R\tau}}{\omega_o} \sin(\omega_o\ \tau) \quad \text{διά} \quad \tau > 0 \ .$$

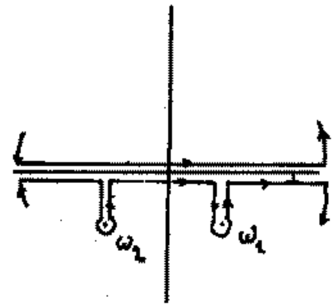
Ὥστε τελικῶς εὕρομεν πάλιν τήν ὕστερον συνάρτησιν διαδόσεως

$$G_R(\tau) = \frac{\theta(\tau)e^{-R\tau}}{\omega_o} \sin \omega_o \tau .$$

Κατ'ἀνάλογον τρόπον, διαγράφοντες τούς πόλους ω_1, ω_2 ὡς εἰς τό Σχ. 3.2-2 ἔχομεν τήν πρόδρομον συνάρτησιν διαδόσεως (ἄσκ. 2).

$$G_A(t,t') =$$

$$= - \frac{\theta(t'-t)}{\omega_o} e^{-R(t-t')} \sin \omega_o (t-t') .$$

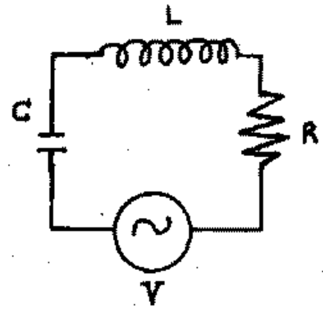


Σχ. 3.2-2.
Τροχιά διά τόν ὑπολογισμόν τῆς προδρόμου συναρτήσεως.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ πρόδρομος συνάρτησις διαδόσεως G_A προκύπτει ἐκ τῆς ὑστέρου συναρτήσεως G_R δι'ἀντιστροφῆς χρόνου $t \to -t$, $t' \to -t'$; $R \to -R$. Τοῦτο ἀπορρέει ἐκ τοῦ ὅτι ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἁρμονικοῦ ταλαντωτοῦ εἶναι ἀναλλοίωτος εἰς τόν ὡς ἄνω μετασχηματισμόν. 'Η διαφορά $G_R - G_A = \frac{1}{\omega_o} e^{-R(t-t')} \sin\omega_o (t-t')$, ἀποτελεῖ προφανῶς μερικήν λύσιν τῆς ὁμογενοῦς ἐξισώσεως ((3.2-3)).

3.3. ΕΦΑΡΜΟΓΗ.

'Ως γνωστόν ὁ ἁρμονικός ταλαντωτής ἀποτελεῖ εὔχρηστον θεωρητικόν ὑπόδειγμα εἰς πολλούς τομεῖς τῆς φυσικῆς. Θεωρήσωμεν κατωτέρω τό ἠλεκτρικόν κύκλωμα R,L,C ἐν σειρᾷ μέ πηγήν V , Σχ. 3.3-1. Ἔστω q τό ἠλεκτρικόν φορτίον τοῦ πυκνωτοῦ καί $i = \frac{dq}{dt}$ ἡ ἔντασις τοῦ ἠλεκτρικοῦ ρεύματος, τό ὁποῖον διαρρέει τό κύκλωμα. 'Η πτῶσις τάσεως εἰς τά ἄκρα τοῦ πυκνωτοῦ C εἶναι $V_c = \frac{q}{c}$, εἰς τά ἄκρα τῆς αὐτεπαγωγῆς



Σχ. 3.3-1.
Κύκλωμα R,L,C ἐν σειρᾷ. 'Ηλεκτρικόν ἰσοδύναμον ἁρμονικοῦ ταλαντωτοῦ.

$V_L = - L \frac{di}{dt} = -L \frac{d^2q}{dt^2}$, καί εἰς τά ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως $V_R = iR = R \frac{dq}{dt}$ ὥστε ἔχομεν τήν ἀκόλουθον ἐξίσωσιν κυκλώματος :

$$L \frac{d^2q(t)}{dt^2} + R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{c} = V(t) \quad . \quad (3.3\text{-}1)$$

Ἡ ἀναλογία τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως καί τῆς ἐξισώσεως

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} + R \frac{dx(t)}{dt} + k\,x(t) = F(t)\,,$$

τοῦ ἁρμονικοῦ ταλαντωτοῦ εἶναι προφανής. Εἰς τήν μᾶζαν ἀντιστοιχεῖ ἡ αὐτεπαγωγή $m \leftrightarrow L$, εἰς τήν ἀντίστασιν τριβῆς ἡ ὠμική ἀντίστασις $R_{\tau\rho} \leftrightarrow R_{\omega\mu}$ καί εἰς τήν ἐλαστικότητα τοῦ ἐλατηρίου ἡ χωρητικότης τοῦ πυκνωτοῦ $k \leftrightarrow \frac{1}{C}$.

Ζητεῖται ἡ τάσις V_c, συναρτήσει τοῦ χρόνου, εἰς τά ἄκρα τοῦ πυκνωτοῦ τοῦ ἀνωτέρω κυκλώματος, ἐν σειρᾷ, ὑποτιθεμένου ὅτι ἡ πηγή τάσεως εἶναι καθαρῶς περιοδική, συχνότητος ω καί ἐφαρμόζεται τήν χρονικήν στιγμήν $t = 0$, $V(t) = e^{-i\omega t}\theta(t)$. Ὑποθέτομεν ὅτι διά $t < 0$ τό κύκλωμα δέν διαρρέεται ὑπό ρεύματος.

Ἀρκεῖ νά εὕρωμεν τό φορτίον $q(t)$ τοῦ πυκνωτοῦ. Λόγῳ τῶν ἀρχικῶν συνθηκῶν τοῦ προβλήματος θά ἐφαρμόσωμεν τήν ὑστέρον συνάρτησιν διαδόσεως.

$$G_R = \theta(t-t')\,\frac{\sin\omega_o(t-t')\,e^{-\frac{R}{2L}(t-t')}}{L\omega_o}\,, \qquad (3.3\text{-}2)$$

ὅπου $\omega_o = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$.

Ἐκτελοῦντες τάς πράξεις εὑρίσκομεν :

$$q(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_R(t-t')V(t)\,dt' =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t-t')\theta(t')e^{-\frac{R}{2L}(t-t')-i\omega t'}\,\frac{\sin\omega_o(t-t')}{L\omega_o}\,dt' =$$

$$= \frac{1}{\omega_o L}\int_0^t e^{-\frac{R}{2L}(t-t')-i\omega t'}\sin\omega_o(t-t')dt' =$$

$$= \frac{e^{-i\omega t}}{2\omega_o L}\left\{\frac{e^{i\varphi_1}\left(1-e^{-\frac{R}{2L}t+i(\omega-\omega_o)t}\right)}{\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}+(\omega-\omega_o)^2}} - \frac{e^{i\varphi_2}\left(1-e^{-\frac{R}{2L}t+i(\omega-\omega_o)t}\right)}{\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}+(\omega+\omega_o)^2}}\right\}\,, \qquad (3.3\text{-}3)$$

ὅπου $e^{i\varphi_1} = \left((\omega_o-\omega)+\frac{R}{2L}i\right)\Big/\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}+(\omega-\omega_o)^2}$

$$e^{i\varphi_2} = \left((\omega_o+\omega)-\frac{R}{2L}i\right)\Big/\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}+(\omega+\omega_o)^2}$$

Διά παραγωγίσεως ώς πρός τόν χρόνον εὑρίσκομεν τήν ἔντασιν τοῦ ἠλεκτρικοῦ ρεύματος.

Ἀντιστοιχίαι τοῦ εἴδους τούτου εἶναι λίαν χρήσιμοι, διότι ἐπιτρέπουν τήν μελέτην πολυπλόκων μηχανικῶν συστημάτων δι' ἀναλόγων ἠλεκτρικῶν κυκλωμάτων καί ἀντιστρόφως.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ .

1. Ἐπιβεβαιώσατε ὅτι ἡ ἔκφρασις (3.2-5) δίδει τήν ὕστερον συνάρτησιν διαδόσεως τοῦ ἁρμονικοῦ ταλαντωτοῦ.

2. Ὑπολογίσατε τήν πρόδρομον συνάρτησιν διαδόσεως ἁρμονικοῦ ταλαντωτοῦ διά τῆς μεθόδου ἀναλύσεως κατά Fourier.

3. Νά δοθῇ ἡ συνάρτησις διαδόσεως (πίναξ) G_R διά τόν ἀνισότροπον ἁρμονικόν ταλαντωτήν εἰς τόν χῶρον τῶν τριῶν διαστάσεων.

('Υπόδ.):

$$G_R(t) = \theta(t)\begin{bmatrix} \frac{\sin\omega_1 t}{\omega_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sin\omega_2 t}{\omega_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sin\omega_3 t}{\omega_3} \end{bmatrix}.$$

4. Εὕρατε τήν ἔντασιν $i(t)$ ἠλεκτρικοῦ ρεύματος διαρρέοντος τό κύκλωμα τοῦ Σχ. 3.3-1, ὑποθέτοντες ὅτι ἡ τάσις $V(t)$ τῆς πηγῆς εἶναι καθαρῶς ἡμιτονική $\dot{V}(t) = V_o \sin \omega t$. Μελετήσατε τήν διαφοράν φάσεως $\phi(\omega)$ μεταξύ τῆς τάσεως τοῦ πυκνωτοῦ καί τῆς τάσεως τῆς πηγῆς, συναρτήσει τῆς συχνότητος ω εἰς τήν περιοχήν τοῦ συντονισμοῦ $\omega \simeq \omega_o$, καί παραστήσατε ταύτην γραφικῶς.

5. Νά εὑρεθῇ ἡ συνάρτησις διαδόσεως $G_R(t,t')$ ὑλικοῦ σημείου εἰς τήν "'Αριστοτέλειον Μηχανικήν" (ἄσκ. 3 , § 2.3).

('Υπόδ. ἄν m_α, ἡ "'Αριστοτέλειος" μᾶζα,

$$m_\alpha \frac{dG(t,t')}{dt} = \delta(t-t') \;, \qquad , \text{ καί}$$

$$G_R(t,t') = \frac{1}{m_\alpha}\,\theta(t-t') \;).$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

"ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ"
("NORMAL MODES")

4.1. ΜΙΚΡΑΙ ΚΙΝΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ.

Πλεῖστα δυναμικά συστήματα κατά τάς κινήσεις των μικροῦ πλάτους πέριξ θέσεως εὐσταθοῦς ἰσορροπίας, δύνανται νά περιγραφοῦν μέ ἀρίστην προσέγγισιν, ὡς συστήματα ἁρμονικῶν ταλαντωτῶν ἐν συζεύξει. Ἐν τοιοῦτον σύστημα εἰς τήν ἐν λόγῳ περιοχήν, θά περιγράφεται ἐν γένει ἐξ ἑνός ὅρου κινητικῆς ἐνεργείας $T = \frac{1}{2}\sum_i m_i(\dot{x}_i)^2$ καί ἑνός ὅρου δυναμικῆς ἐνεργείας $V(x_i,x_n) = C + \sum_{ik}^{\nu} V_{ik}\, x_i x_k$, (4.1-1) τοιοῦτον ὥστε αἱ ἰσοδυναμικαί ἐπιφάνειαι $V = C$ νά εἶναι

ἐλλειψοειδῆ (ἄσκ. 1).

Ἡ (4.1-1) δύναται ἤ νά ἀποτελεῖ τήν ἀκριβῆ ἔκφρασιν δυναμικῆς ἐνεργείας πραγματικοῦ δυναμικοῦ συστήματος ν-ὑλικῶν σημείων ἤ νά ἐκφράζει ἁπλῶς τούς δύο πρώτους ὅρους τοῦ ἀναπτύγματος Taylor τοῦ ἀκριβοῦς δυναμικοῦ

$$V(\vec{x}^{(1)},\dots\vec{x}^{(n)}) = V(\vec{0},\dots\vec{0}) + \sum_{\rho,\sigma=1}^{\nu}\sum_{i,k=1}^{3} V_{i,k}^{(\rho,\sigma)}\, x_i^{(\rho)} x_k^{\sigma} \qquad (4.1\text{-}2)$$

ὅπου $V_{ik} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial x_i^{(\rho)}\,\partial x_k^{(\sigma)}}$,

πέριξ τῆς θέσεως εὐσταθοῦς ἰσορροπίας (ἄσκ.1).

Εἰς τήν ἀνωτέρω ἔκφρασιν τά ρ καί σ εἶναι δεῖκται τῶν ὑλικῶν σημείων, τά i,k ἀναφέρονται εἰς τάς τρεῖς καρτεσιανάς συντεταγμένας τῶν ἀνυσμάτων θέσεως καί ὡς θέσις ἰσορροπίας, χάριν ἁπλότητος, ἐλήφθη ἡ ἀρχή τῶν ἀξόνων. Εἰς τά ἀκόλουθα θά χρησιμοποιήσωμεν τήν συντομωτέραν ἔκφρασιν (4.1-1), θεωροῦντες τά x_i ὡς γενικευμένας "καρτεσιανάς" συντεταγμένας εἰς ἕνα χῶρον 3ν διαστάσεων.

Ἀνάλογα (μαθηματικῶς ἰσοδύναμα) προβλήματα ἀπαντῶνται ἐπίσης, εἰς εὐρυτάτην μάλλιστα ἔκτασιν, εἰς τήν θεωρίαν τῶν ἠλεκτρικῶν κυκλωμάτων (ἄσκ. 2), ἤ ἀκόμη εἰς συστήματα ἀπείρων βαθμῶν ἐλευθερίας, ταλαντώσεις χορδῶν, ἐλαστικά κύματα, θεωρίαν πεδίων (π.χ. εἰς τήν ἀκτινοβολίαν τοῦ μέλανος σώματος). Εἰς τήν παροῦσαν ἔκθεσιν θά περιορισθῶμεν εἰς συστήματα πεπερασμένου πλήθους βαθμῶν ἐλευθερίας τά ὁποῖα ἐπιτρέπουν μίαν στοιχειώδη καί σύντομον μεταχείρισιν τοῦ προβλήματος, μέ κυρίαν ἔμφασιν εἰς τόν καθορισμόν τῶν θεμελιωδῶν συχνοτήτων ἤ ἰδιοσυχνοτήτων, λόγῳ τῆς μεγάλης σημασίας των εἰς τάς ἐφαρμογάς.

4.2. ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ (NORMAL MODES).

Ἔστω ἕν σύστημα συνιστάμενον ἐκ ν συνεζευγμένων ἁρμονικῶν ταλαντωτῶν. Τοῦτο ἔχει ὁλικήν κινητικήν ἐνέργειαν

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\nu} m_i \dot{x}_i^2 , \qquad (4.2\text{-}1)$$

δυναμικήν ἐνέργειαν

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{\nu} V_{ik}\, x_i x_k , \qquad (4.2\text{-}2)$$

καί διέπεται ἐκ τῶν κάτωθι ἐξισώσεων τῆς κινήσεως.

$$m_i \ddot{x}_i + \sum_{k=1}^{\nu} V_{ik} x_k = 0 \quad , \quad i = 1,\ldots \nu \quad . \qquad (4.2\text{-}3)$$

Αἱ ἐξισώσεις τῆς κινήσεως (4.2-3) ἐκφράζονται ἁπλούστερον ὑπό τήν ἀνυσματικήν μορφήν,

$$m \ddot{\vec{x}} + V\vec{x} = 0 , \qquad (4.2\text{-}4)$$

ὅπου m ὁ πίναξ τῆς μάζης, ἐν προκειμένῳ διαγώνιος,

$$m = \begin{pmatrix} m_1 & & 0 \\ & m_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & m_\nu \end{pmatrix} , \quad V \; (V_{ik}) \quad \text{ὁ πίναξ τῆς δυναμικῆς}$$

ἐνεργείας καί $\vec{x}(x_1, \ldots \; x_\nu)$ "ἄνυσμα θέσεως" εἰς χῶρον τῶν 3ν-διαστάσεων.

Τάς ἀνωτέρω ἐξισώσεις (4.2-3) ἤ (4.2-4), καλοῦμεθα νά λύσωμεν.

Πρός τοῦτο παρατηροῦμεν πρῶτον ὅτι ὁ πίναξ V_{ik} τῆς δυναμικῆς ἐνεργείας δύναται νά ληφθῆ ἐκ κατασκευῆς συμμετρικός. Τοῦτο ἄνευ ἀπωλείας τῆς γενικότητος ἐφ' ὅσον μόνον τό συμμετρικόν μέρος τοῦ V_{ik} συνεισφέρει εἰς τήν δυναμικήν ἐνέργειαν (4.2-2). Ἡ συμμετρία αὕτη τοῦ V_{ik} εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν ἐκφράζει τήν ἰσχύν τοῦ 3ου νόμου τοῦ Νεύτωνος διά τό σύστημά μας.

Ἀλλά τυχών συμμετρικός πίναξ διά καταλλήλου ὀρθογωνίου μετασχηματισμοῦ τίθεται εἰς διαγώνιον μορφήν. Ἡ παρατήρησις αὕτη εἶναι βασική διά τήν λύσιν τοῦ προβλήματος. Ἀρκεῖ νά διαγωνιοποιήσωμεν ὁμοῦ μετά τοῦ V καί τόν πίνακα μάζης m. Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται ἁπλούστατα : Δι'εἰσαγωγῆς νέων μεταβλητῶν,

$$\xi_i = \sqrt{m_i}\; x_i \qquad (4.2\text{-}5)$$

ὁ πίναξ μάζης m μετασχηματίζεται εἰς τόν ταυτοτικόν πίνακα, ἐνῷ ὁ πίναξ τῆς δυναμικῆς ἐνεργείας παραμένει συμμετρικός V → U :

$$V_{ik} \to U_{ik} = \frac{V_{ik}}{\sqrt{m_i m_k}} \;. \qquad (4.2\text{-}6)$$

Τό προκύπτον νέον σύστημα ἐξισώσεων τῆς κινήσεως

$$\ddot{\vec{\xi}} + U\vec{\xi} = 0 \;, \qquad (4.2\text{-}7)$$

διαγωνιοποιεῖται ἀμέσως δι'ἑνός ἁπλοῦ ὀρθογωνίου μετασχηματισμοῦ O, ὁ ὁποῖος διαγωνιοποιεῖ τόν U .

Τά διαγώνια στοιχεῖα τοῦ $\Omega^2 = OUO^{-1}$ εἶναι ὅλα

μεγαλύτερα ἤ ἴσα τοῦ μηδενός (ἄσκ. 3), ὥστε :

$$OUO^{-1} = \Omega^2 = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & & 0 \\ & \omega_2^2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \omega_n^2 \end{pmatrix} \;. \qquad (4.2\text{-}8)$$

θέτοντες

$$\vec{\eta} = O\vec{\xi} \;, \qquad (4.2\text{-}9)$$

εἰς τήν (4.2-7), ἔχομεν

$$\ddot{\vec{\eta}} + \Omega^2 \vec{\eta} = 0 \;. \qquad (4.2\text{-}10)$$

Ὥστε τελικῶς τό δυναμικόν σύστημα τῶν ν-συνεζευγμένων ταλαντωτῶν ἀνελύθη εἰς ἕν ἰσοδύναμον σύστημα ἐκ ν-ἀνεξαρτήτων ἁρμονικῶν ταλαντωτῶν (4.2-10), τοῦ ὁποίου ἡ λύσις εἶναι ἄμεσος. Ἔχομεν ν γραμμικῶς ἀνεξαρτήτους βασικάς λύσεις

$$\vec{\eta}^{(\lambda)} = \vec{\eta}_0^{(\lambda)} \sin(\omega_\lambda t - \varphi_\lambda), \quad \lambda = 1,\dots\nu \qquad (4.2\text{-}11)$$

διά τῶν ὁποίων δυνάμεθα νά ἐκφράσωμεν τυχοῦσαν λύσιν τῆς (1.2-3) ἤ τῆς (4.2-4).

Αἱ λύσεις $\vec{\eta}^{(\lambda)}$ καλοῦνται θεμελιώδεις ταλαντώσεις ἤ ἰδιοταλαντώσεις (normal modes) τοῦ συστήματος καί αἱ ἀντίστοιχοι συχνότητες ω_λ, θεμελιώδεις συχνότητες ἤ ἰδιοσυχνότητες.

Αἱ χαρακτηριστικαί ταλαντώσεις εἶναι ἰδιοανύσματα τοῦ πίνακος Ω^2 καί τά ω_λ^2 αἱ ἀντίστοιχοι ἰδιοτιμαί :

$$\Omega^2 \vec{n}^{(\lambda)} = \omega_\lambda^2 \vec{n}^{(\lambda)} \quad . \qquad (4.2\text{-}12)$$

Ἐκ τῆς (4.2-12) ἕπεται ὅτι ἰδιοανύσματα ἀντιστοιχοῦντα εἰς διαφορετικάς ἰδιοτιμάς εἶναι ὀρθογώνια μεταξύ των. Ἰδιοανύσματα ἀνήκοντα εἰς τήν αὐτήν ἰδιοτιμήν λαμβάνονται ὀρθογώνια μεταξύ των ἐκ κατασκευῆς (ἄσκ. 3).

Π ε ρ ι γ ρ α φ ή τ ῶ ν χ α ρ α κ τ η ρ ι σ τ ι κ ῶ ν τ α λ α ν τ ώ σ ε ω ν ε ἰ ς τ ό ἀ ρ χ ι κ ό ν σ ύ σ τ η μ α.

Ὡς εἴδομεν προηγουμένως αἱ χαρακτηριστικαί ταλαντώσεις ἀντιστοιχοῦν εἰς διέγερσιν ἑνός μόνου ταλαντωτοῦ τοῦ (ἰσοδυνάμου) διαγωνιοποιηθέντος συστήματος (4.2-10), ὁπότε ἡ περιγραφή των εἰς τό σύστημα τοῦτο εἶναι ἁπλουστάτη :

$$\vec{n}_o^{(\lambda)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ n_\lambda \\ \vdots \end{pmatrix} \qquad (4.2\text{-}13)$$

ὅπου n_λ τό πλάτος τῆς ταλαντώσεως. Αἱ συντεταγμέναι αὗται καλοῦνται θεμελιώδεις (normal coordinates).

Πολλάκις ὡστόσο ἐνδιαφέρει ἡ προτέρα περιγραφή $\vec{\xi}$, ὅπου αἱ χαρακτηριστικαί ταλαντώσεις $\vec{\xi}^{(\lambda)}$ ἀντιστοιχοῦν ἐν γένει εἰς συλλογικάς κινήσεις πολλῶν ἐκ τῶν συνεζευγμένων ταλαντωτῶν. Ἡ εὕρεσις τῶν $\vec{\xi}^{(\lambda)}$ εἶναι ἐπίσης ἁπλῆ δυναμένη νά ἐπιτευχθῆ καί ἀπ' εὐθείας, ἄνευ τῆς ἐκπεφρασμένης ἐνδιαμέσου εὑρέσεως τοῦ πίνακος διαγωνιοποιήσεως O. Ἀρκεῖ νά λύσωμεν τό πρόβλημα ἰδιοτιμῶν,

$$U \vec{\xi}_\lambda = \omega_\lambda^2 \vec{\xi}_\lambda \qquad (4.2\text{-}14)$$

Πρός τοῦτο λύομεν πρῶτον τήν ἀλγεβρικήν ἐξίσωσιν ν-τάξεως

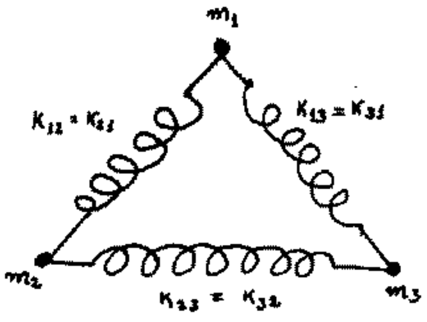
$$\det (U_{ik} - \omega^2 \delta_{ik}) = 0 \quad , \qquad (4.2\text{-}15)$$

ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτουν αἱ ν χαρακτηριστικαί ἰδιοσυχ[illegible]τες ω_λ, $\lambda = 1,\ldots\nu$. Εἰσάγοντες αὐτάς εἰς τήν (4.2-14) ἔχομεν ἕν ὁμογενές γραμμικόν σύστημα τοῦ ὁποίου [illegible] δίδει τά $\vec{\xi}_\lambda$. Προφανῶς δυνάμεθα καί ἐδῶ, ἄν ἐπιθυμοῦ[illegible] νά ἐφαρμόσωμεν τήν γεωμετρικήν κατασκευήν τῆς ἄσκ. 3.

Διά τήν καλυτέραν κατανόησιν τῶν ἀνωτέρω, παραθέτομεν μίαν ἁπλῆν ἐφαρμογήν.

4.3. ΕΦΑΡΜΟΓΗ.

Ἔστω τριατομικόν μόριον (Σχ. 4.3-1), ἐκ τριῶν ἀτόμων μαζῶν m_1, m_2, m_3 συγκρατουμένων (πέριξ μιᾶς θέσεως ἰσορροπίας) δι'ἀμοιβαίων δυνάμεων ἐπαναφορᾶς χαρακτηριζομένων ἐκ τῶν $k_{12} = k_{21}$, $k_{13} = k_{31}$ καί $k_{23} = k_{32}$ ἀντιστοίχως. Ἐπιθυμοῦμεν νά εὕρωμεν τάς χαρακτηριστικάς ἰδιοσυχνότητας τοῦ μορίου, καί βάσει αὐτῶν τό ἐνεργειακόν



Σχ. 3.3-1.
Ὑπόδειγμα τριατομικοῦ μορίου, ταλαντουμένου πέριξ θέσεως ἰσορροπίας.

φάσμα διεγέρσεως, δεδομένου ὅτι, κατά τήν Κβαντομηχανικήν, εἰς ἑκάστην ἰδιοσυχνότητα ω ἀντιστοιχεῖ ἐνέργεια $h\omega(n+\frac{1}{2})$ ὅπου n ἀκέραιος ἀριθμός. Χάριν μαθηματικῆς ἁπλότητος ὑποθέτομεν ὅτι εἰς τήν θέσιν ἰσορροπίας τά τρία ἄτομα συμπίπτουν εἰς τό αὐτό σημεῖον.

Ἄν $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$ εἶναι αἱ θέσεις τῶν ἀτόμων τοῦ μορίου θεωρουμένων ὡς ὑλικῶν σημείων μαζῶν m_1, m_2, m_3 ἀντιστοίχως, αἱ ἐξισώσεις κινήσεως τοῦ συστήματος εἶναι :

$$m\ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i\neq j} k_{ij}(\vec{r}_i-\vec{r}_j) \qquad i = 1,2,3, \qquad (4.3\text{-}1)$$

ἤ εἰσάγοντες τάς μεταβλητάς ξ (4.2-7),

$$\begin{pmatrix} \ddot{\vec{\xi}}_1 \\ \ddot{\vec{\xi}}_2 \\ \ddot{\vec{\xi}}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\xi}_1 \\ \vec{\xi}_2 \\ \vec{\xi}_3 \end{pmatrix} \qquad (4.3\text{-}2)$$

ὅπου $\alpha_{11} = (k_{12}+k_{23})/m_1$, $\alpha_{22} = (k_{23}+k_{21})/m_2$, $\alpha_{33} = (k_{31}+k_{32})/m_3$

$\alpha_{12}=\alpha_{21}=-k_{12}/\sqrt{m_1m_2}$, $\alpha_{13}=\alpha_{31}= -k_{13}/\sqrt{m_1m_3}$, $\alpha_{23}=\alpha_{32}=-k_{23}/\sqrt{m_2m_3}$.

Λύοντες τό πρόβλημα ἰδιοτιμῶν (4.3-2) εὑρίσκομεν ἀμέσως ὅτι δι' ἕκαστον ἄξονα ἔχομεν τρεῖς ἰδιοσυχνότητας ω_λ^2

$$\omega_\lambda^2 = \begin{cases} 0 \\ \frac{1}{2}\left(A+\sqrt{A^2+4(B-\Gamma)}\right) \\ \frac{1}{2}\left(A-\sqrt{A^2+4(B-\Gamma)}\right) \end{cases} \qquad (4.3\text{-}3)$$

ὅπου $A=(\alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{33})$, $B=(\alpha_{12}^2+\alpha_{23}^2+\alpha_{31}^2)$, $\Gamma=(\alpha_{11}\alpha_{22}+\alpha_{22}\alpha_{33}+\alpha_{33}\alpha_{11})$.

Ἡ ἰδιοσυχνότης μηδέν ἀντιστοιχεῖ εἰς τήν εὐθύγραμμον καί ἰσοταχῆ κίνησιν τοῦ κέντρου μάζης

$$\vec{X}_{KM} = \vec{U}_{KM}t = \vec{U}_{KM} \lim_{\omega_{KM}\to 0} \frac{\sin\omega_{KM}\, t}{\omega_{KM}} \quad .$$

Παραλείποντες τήν κίνησιν τοῦ κέντρου μάζης τό ἐνεργειακόν φάσμα διεγέρσεως τοῦ θεωρουμένου μορίου εἶναι

$$E_{p,q,r} = \hbar\omega_1(p_1+q_1+r_1+\frac{3}{2}) + \hbar\omega_2(p_2+q_2+r_2+\frac{3}{2}) \qquad (4.3\text{-}4)$$

ὅπου (p_1,q_1,r_1), (p_2,q_2,r_2), τριάδες ἀκεραίων ἀριθμῶν, τά ἐνεργειακά κβάντα ἑκάστης χαρακτηριστικῆς ταλαντώσεως. Τά p,q,r ἀναφέρονται εἰς τάς τρεῖς διαστάσεις τοῦ χώρου καί οἱ δεῖκται 1, 2 εἰς τάς δύο μή μηδενικάς συχνότητας ω_1 καί ω_2 ἀντιστοίχως.

Εἰς τήν εἰδικήν περίπτωσιν ἴσων μαζῶν m καί τοῦ αὐτοῦ k, λύεται εὐκόλως καί τό πρόβλημα τῶν ν σωματίων:

$$E^{(\nu)}_{p,q,r} = \hbar\omega[(p_1+q_1+r_1)+(p_2+q_2+r_2)+\ldots+(p_{\nu-1}+q_{\nu-1}+r_{\nu-1})+3(\frac{\nu-1}{2})]$$

ὅπου $\omega = \sqrt{\nu}\,(\frac{k}{\sqrt{m}})$.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ .

1. Τό ἀνάπτυγμα Taylor μιᾶς συναρτήσεως $V(\vec{x})$ εἰς τόν χῶρον τῶν ν διαστάσεων εἶναι

$$V(\vec{x}) = e^{\vec{x}\cdot\vec{\nabla}_y}\, V(\vec{y})\Big|_{\vec{y}=0} = V(\vec{0}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}(\vec{x}\cdot\vec{\nabla}_y)^n V(\vec{y})\Big|_{\vec{y}=0} =$$

$$= V(\vec{0}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\, x_{i_1}\ldots x_{i_n}\, V^{(n)}_{i_1\ldots i_n}$$

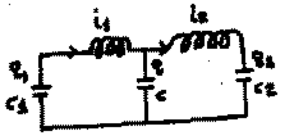
ὅπου

$$V^{(n)}_{i_1\ldots i_n} \equiv \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots\cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_n}} V(\vec{x})\Big|_{\vec{x}=0} \quad .$$

Δείξατε ὅτι ἵνα ἡ $V(x)$ ἔχει ἐλάχιστον εἰς τό $\vec{x} = \vec{0}$ πρέπει καί ἀρκεῖ ὁ πρῶτος μή μηδενικός τανυστής n-τάξεως $V^{(n)}$ νά εἶναι ἀρτίας τάξεως καί ἡ ἀντίστοιχος ἰσοδυναμική ὑπερεπιφάνεια $\sum_{i_1\ldots i_n=1}^{\nu} x_{i_1}\ldots x_{i_n}\, V_{i_1,\ldots i_n} = C$

νά εἶναι φραγμένη (συμπαγής). Ἡ ἁπλουστάτη περίπτωσις, πραγματοποιεῖται ὅταν $\vec{\nabla}V(\vec{x})\Big|_{\vec{x}=0} = 0$ καί ἡ ἰσοδυναμική ἐπιφάνεια $\sum_{i,k=1}^{\nu} V_{ik}\, x_i\, x_k$ = σταθ. εἶναι ἐλλειψοειδές.

2. Νά ἐφαρμοσθῇ ἡ θεωρία τῶν χαρακτηριστικῶν ταλαντώσεων normal modes διά τήν εὕρεσιν τῆς χρονικῆς μεταβολῆς τῶν φορτίων τῶν πυκνωτῶν τῶν δύο συνεζευγμένων ἠλεκτρικῶν κυκλωμάτων τοῦ Σχ. 3.3-2.



Σχ. 3.3-2.
Δύο ἁπλᾶ ἠλεκτρικά κυκλώματα L,C, ἐν συζεύξει.

('Υπόδ.): $q_1(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \phi_2)$,

$q_2(t) = \lambda_1 A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) + \lambda_2 A_2\cos(\omega_2 t + \phi_2)$,

$q(t) = q_2(t) - q_1(t)$,

ὅπου $\lambda_1=(-C.C_1L_1\omega_1^2+C+C_1)/C_1$, $\lambda_2=(-C.C_1L_1\omega_2^2+C+C_1)/C_1$,

$$\omega_{1,2}=[\,\tfrac{1}{2}(p_1^2+p_2^2) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(p_1^2-p_2^2)^2+4p_3^4}\,]^{1/2},$$

$$p_1^2=(C_1+C)/C.C_1L_1\ ,\quad p_2^2=(C_2+C)/C.C_2L_2,\quad p_3^2=1/C\sqrt{L_1L_2}\ .$$

3. Δείξατε ὅτι τά ἰδιοανύσματα τοῦ πίνακος U_{ik} εἶναι πρωτεύοντες ἄξονες τοῦ ἐλλειψοειδοῦς $\sum_{k=1}^{\nu} U_{ik}x_ix_k = 1$, μέ ἀντιστοίχους ἰδιοτιμάς ω_λ^2 τά ἀντίστροφα τῶν τετραγώνων τῶν μηκῶν τῶν ἡμιαξόνων. Τοῦτο ἐκτός τοῦ ὅτι ἀποδεικνύει τήν ὕπαρξιν, πληρότητα καί ὀρθογωνιότητα τῶν ἰδιοανυσμάτων τοῦ πίνακος U προσφέρει καί γεωμετρικήν μέθοδον κατασκευῆς των.

4. Νά ἐφαρμοσθῇ ἡ μέθοδος τῶν χαρακτηριστικῶν ταλαντώσεων (normal modes) διά τόν καθορισμόν τοῦ ἐνεργειακοῦ φάσματος διεγέρσεως ὑποδείγματος πυρῆνος ${}^3_2$He ὑποθέτοντες ὅτι τά πυρηνικά δυναμικά ἀλληλεπιδράσεως p-p καί p-n εἶναι δυναμικά ἁρμονικοῦ ταλαντωτοῦ.

($V_{1,2}=V(r_{12})\ \{\sum_{i=1}^{3}\langle N',\tau_i N\rangle_1\langle N',\tau_i N\rangle_2\ \}$, $V(r_{12})=g(\vec r_1-\vec r_2)^2$,

$$\tau_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \tau_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\quad \tau_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\ ).$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

"Ασκ.1(σ.21). Χρησιμοποιήσατε τό ἀναλλοίωτον τοῦ μέτρου $\vec x^2$ τοῦ ἀνύσματος, ἤτοι $\sum_{i=1}^{3}x_i^2=\sum_{i=1}^{3}x_i'^2$, καί τάς ἐξισώσεις μετασχηματισμοῦ $x_i'=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x_j$, $i=1,2,3$.

"Ασκ.2(σ.21). Αἱ (1.1-1) περιέχουν ὅλους τούς δυνατούς μετασχηματισμού μεταθέσεως, ὡς πρός χῶρον καί χρόνον, στροφῆς καί ἰσοταχοῦς κινήσεως τούς συνδέοντας δύο ἀδρανειακά συστήματα ἀναφορᾶς.

"Ασκ.3(σ.22). Χρησιμοποιήσατε τάς (1.1-1).'Απ. $(R_2,\vec V_2,\vec C_2,t_2)(R_1,\vec V_1,\vec C_1,$ $=(R_2R_1,R_2\vec V_1+\vec V_2,R_2\vec C_1+\vec C_2+\vec V_2t_1,t_1+t_2)$.

"Ασκ.4(σ.22) 'Απαιτοῦνται 6 ἀνεξάρτητοι παράμετροι, (μία στροφῆς, δύο μεταθέσεως χώρου, δύο ταχύτητος καί μία μεταθέσεως χρόνου). Νόμος μετασχηματισμοῦ ὡς ἄσκ.3 .

"Ασκ. 5(σ.22). $\vec x\to\vec x'$ συμφώνως πρός τάς (1.1-1). 'Απ. $m\,d^2\vec x'/dt'^2=0$.

"Ασκ. 6(σ.23). Βλ. θεωρία §1.2.

"Ασκ. 7(σ.23). 'Η Εὐκλείδειος ὁμάς μεταθέσεων καί περιστροφῶν τοῦ Εὐκλ δείου τρισδιαστάτου χώρου, σύν τήν μετάθεσιν χρόνου, ἤτοι $(R,\vec C,t)$.'Εξί σωσις κινήσεως $\mu\,d\vec x/dt=\vec F(\vec x,t)$. Νόμος συνθέσεως $(R_2,\vec C_2,t_2)(R_1,\vec C_1,t_1)$ $=(R_2R_1,R_2\vec C_1+\vec C_2,t_1+t_2)$.

"Ασκ. 8(σ.23). 'Αναπτύξατε κατά Taylor τό $\vec x(t)$ περί τό t_o. (1.α): $\vec x(t)$ $\vec x(t_o)+\vec V_o(t-t_o)+\frac12\vec\gamma_o(t-t_o)^2$; (1,β): $\vec V(t)=\vec V_o+\vec\gamma_o(t-t_o)$, (1.γ): $\vec\gamma_o=(\vec\gamma_o\vec V_o)\hat t$ $|\vec V_o|+V_o^2\hat n/\rho_o$, (1.δ): $\rho_o=V_o^3\,/\,|\vec V_o\times\vec\gamma_o|$.

(2.α): $\vec x(t)=\vec V_o(t-t_o)+\frac12\vec\gamma_o(t-t_o)^2$, (2.β): $\vec V(t)$ ὡς (1.β), (2.γ): $\vec\gamma(t)$ (1.γ), (2.δ): ρ_o ὡς (1.δ), (3.α): $\vec x(t)=\vec x(t_o)+\frac12\vec\gamma_o(t-t_o)^2$, (3.β): $\vec V(t)$ $=\vec\gamma_o(t-t_o)$, (3.γ): $\vec\gamma_o$ ὡς (1.γ), (3.δ): ρ_o ὡς (1.δ).

"Ασκ. 9(σ.24). 'Ο μετασχηματισμός θέσεως ὅστις συνδέει τό δοθέν ἀδρανε κόν σύστημα S μετά τοῦ μή ἀδρανειακοῦ S' εἶναι: (1) $\vec x'=\vec x+\vec Vt+1/2G\hat zt^2$ ὅπου $\vec V$ καί $\vec G$ ἡ ταχύτης καί ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ S' ὡς πρός S. 'Αλλά ἡ τρ χιά τοῦ ὑλικοῦ σημείου εἰς τό ἀδρανειακόν σύστημα εἶναι ("Ασκ. 8) t_o= (2) $\vec x=\vec x_o+\vec V_ot-1/2g\hat zt^2$ ὅπου $\vec g=g\hat z$ ἡ ἔντασις τοῦ πεδίου βαρύτητος. 'Ε τοῦ ὅτι τό S' εἶναι σύστημα στιγμιαίας ἠρεμίας συνάγεται $d\vec x'/dt=0$ δι $t=0$, ἤτοι $d\vec x/dt+\vec V=0|t=0$ (ἐκ τῆς 1), ἤ (3) $\vec V=-\vec V_o$ (ἐκ τῆς (2)). 'Εκ τ ὅτι τό S' εἶναι καί ἐλευθέρας πτώσεως συνάγεται $d^2\vec x'/dt^2=0$, ἤτοι $d^2\vec x/$ $+G\hat z=0$ (ἐκ τῆς (1)) ἤ $-g\hat z+G\hat z=0$ (ἐκ τῆς (2)), ὅθεν (4) $\vec G=\vec g$. 'Εκ τῶν (1 (2)-(3) καί (4) ἕπεται ὅτι (α) $\vec x'=\vec x_o$,(β) $\dot{\vec x}'=0$,(γ) $\ddot{\vec x}'=0$.(δ) Καμπυλ της μηδέν ἤ $\rho=\infty$.

"Ασκ. 10(σ.24). Βλ. ἄσκ. 9.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

Ἄσκ. 1(σ.33).Βλ. κείμενον. Ἄσκ. 2(σ.33).Βλ.κείμενον. Ἄσκ. 3(σ.34)Βλ.κείμ.

Ἄσκ. 4(σ.40). Δείξατε ὅτι τό ἐξωτερικόν γινόμενον $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$ μετασχηματίζεται ὡς ἄνυσμα ὡς πρός τήν στροφήν τῶν ἀξόνων. $L_i' = \sum_{i=1} \alpha_{ij} L_j$, j=1,2,3.

Ἄσκ. 2(σ.41). Spin νετρίνου (k+1/2), k=0,1,2.

Ἄσκ. 1(σ.47). $T=\frac{1}{2}\sum m_i \dot{\vec{r}}_i^2$, $\vec{r}_i = \vec{R}+\vec{r}_i'$ ὅπου $\vec{r}_i'$ τό ἄνυσμα θέσεως τοῦ i-ὑλικοῦ σημείου εἰς σύστημα κέντρου μάζης.

Ἄσκ. 2(σ.47). Παρατηρήσατε ὅτι $\vec{F}_{i(j)}=-\vec{\nabla}_j V_{ji}=\vec{\nabla}_i V_{ji}=-\vec{F}_{j(i)}$ καί $\vec{\nabla} V_{ij}(r_{ij}) = (\vec{r}_i-\vec{r}_j)\varphi$ ὅπου φ μία βαθμωτή συνάρτησις, ἤτοι αἱ δυνάμεις ὑπακούουν εἰς τόν 3ον Νόμον τοῦ Νεύτωνος.

(1). $\vec{F}_{o\lambda}=\sum_{i\neq j}\vec{F}_{i(j)}=0$ ἄρα $d\vec{p}_{o\lambda}/dt=0$. (2). $d\vec{J}_{o\lambda}/dt=\vec{M}=\sum_{i\neq j}\vec{r}_i\times\vec{F}_{i(j)}$ ἀλλά $\sum_{i\neq j}\vec{r}_i\times\vec{F}_{i(j)}=\frac{1}{2}[\sum \vec{r}_i\times\vec{F}_{i(j)}+\vec{r}_j\times\vec{F}_{j(i)}]=\sum(\vec{r}_i-\vec{r}_j)\times\vec{F}_{i(j)}=0$. Ὅθεν $d\vec{J}_{o\lambda}/dt=0$.

(3). Ἀπόδειξις (χάριν παιδείας): Τό σύστημα ἐξομοιοῦται πρός ὑλικόν σημεῖον εἰς χῶρον 3n διαστάσεων μέ τήν ἀντιστοιχίαν: Θέσις $\vec{\xi}$, $\vec{\xi}_i=\vec{x}_i$, i=1,...n, δύναμις $\vec{\mathcal{F}}$: $\vec{\mathcal{F}}_i=\vec{F}_i$, $\vec{\mathcal{F}}=-\vec{\nabla}_\xi V$, $\vec{\mathcal{F}}\cdot d\vec{\xi}=-dV$, μᾶζα $\mathcal{m}$ ὁ διαγώνιος πίναξ $m_{ik}=m_i\delta_{ik}$, κινητική ἐνέργεια $T=\frac{1}{2}\langle\dot{\vec{\xi}},\mathcal{m}\dot{\vec{\xi}}\rangle$, καί ἐφαρμόζεται ἡ ἀπόδειξις τοῦ κειμένου, ἥτις εἶναι ἀνεξάρτητος ἀριθμοῦ διαστάσεων!

Παρατηρήσατε ὅτι ἐκ τῶν 3n καί 3n(3n-1)/2 συνιστωσῶν γραμμικῆς ὁρμῆς καί στροφορμῆς τοῦ "σημείου συστήματος", διατηροῦνται ἐν γένει μόνον αἱ τρεῖς φυσικαί συνιστῶσαι αἱ ὁποῖαι ἀφοροῦν τό $\vec{P}_{o\lambda}$ καί $\vec{J}_{o\lambda}$.

Ἄσκ. 3(σ.48). (α) $m\, d\dot{\vec{x}}/dt = \vec{F}(\vec{x},t)$. (β) Τό Κ.Μ. ἀποκεκλισμένου συστήματος παραμένει σταθερόν $\vec{P}_{o\lambda}$= σταθ.= 0, $\vec{J}_{o\lambda}$= σταθ.= 0.

Ἄσκ. 4(σ.48). (α) V =-fM = -M εἰς φυσικάς μονάδας f=1, (β) ἡ ἐλευθερουμένη δυναμική ἐνέργεια $E_V=\infty$, (γ) $T = \pi\sqrt{2}/4$.

Ἄσκ. 5(σ.54). Βλ. κείμενον, τύποι (2,4,7).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III.

Ἄσκ. 1(σ.70). Βλ. Κείμενον.

Ἄσκ. 2(σ.70). (i) $t_1=t_2$.Αἱ δοθεῖσαι συνθῆκαι εἶναι ἰσοδύναμοι τῶν συνήθων συνοριακῶν συνθηκῶν ἀρχικῶν τιμῶν (Βλ. ἄσκ.5). Περιορισμοί: α) Ἄν $C_1^2+C_2^2\neq 0$ τότε πρέπει $d=A_{11}B_{22}-A_{21}B_{21}\neq 0$, ἄλλως αἱ συνθῆκαι εἶναι ἀσυμβίβαστοι. β) Ἄν $C_1^2+C_2^2=0$ τότε ἤ $d\neq 0$ καί $x_1(t_1)=0$, $x(t_1)=0$, ἤ d=0 ὁπότε αἱ δοθεῖσαι συνθῆκαι εἶναι ἀνεπαρκεῖς (γραμμικῶς ἐξηρτημέναι) διά τό μονοσήμαντον τῆς λύσεως. (ii) $t_1<t<t_2$. $G(t-t') = \frac{1}{2}|t-t'| + \alpha t + \beta$, $\dot{G}=\frac{1}{2}\varepsilon(t-t')+\alpha$. Ἀντικατάστασις εἰς τάς συνορ. συνθ. δίδει τά α,β. Περιορισμοί ἀνάλογοι τῆς περιπτώσεως (i).

Ἄσκ. 3(σ.70). Ἀντιστροφή χρόνου $t\to -t$, $t'\to -t'$, ἀφίνουσα ἀναλλοίωτον ἁπλῶς τήν διαφορικήν ἐξίσωσιν $d^2G(t,t)/dt^2=\delta(t-t')$, $(\delta(t-t')=\delta(t'-t))$ ἐναλλάσσει τήν συνοριακήν συνθήκην $[G_A(t,t')=0$ ἄν $t'>t]$ τῆς G_A διά τῆς $[G_R(t',t)=0$ ἄν $t'>t]$ τῆς G_R.

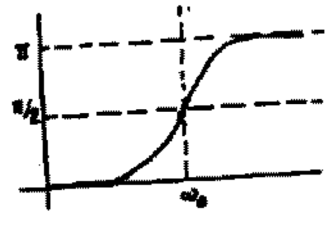
Ἄσκ. 4(σ.70). $d^2G/dt^2=\delta$, $d^2G_R/dt^2=\delta$, $d^2(G-G_R)/dt^2=0$ ἄρα $G(t)=G_R(t)+a+b$

Ἄσκ. 5(σ.70). $x(t)=\alpha+\beta t+\int_{-\infty}^{t}(t-t')\,F(t')dt'$ μέ ἀρχικάς συνθήκας $x(t_0)=x_0$ $\dot{x}(t_1) = v$.

Ἄρα $\alpha=x_0-vt_0+t_0\int_{t_0}^{t_1}F(t')dt'+\int_{-\infty}^{t_0}t'F(t')dt'$, $\beta = v-\int_{-\infty}^{t_1}F(t')dt'$.

Ἄσκ. 6(σ.71). Βλ. κείμενον, Ἄσκ. 1,2,3 (σ.82). Βλ. Κείμενον.

Ἄσκ. 4(σ.83). $i=dq/dt=V_o e^{-j\omega t}/Z = V_o e^{-j\omega t}/R+j(L\omega-1/\omega C)$.$U_c=q/C=ji/\omega C=$ $=U_o e^{-j\omega t}/[(CL\omega^2-1)-jR\omega C]=U_o^{-j(\omega t+\delta)}/\omega C|Z|$,



$\delta(\omega)$ = τοξ.ἐφ$\{R/(1/\omega C-L\omega)\}$, $\omega_o=1/\sqrt{L\omega}$.

Ἡ $e^{j\delta(\omega)}$ εἶναι κυκλωματικόν ἀνάλογον τοῦ πίνακος σκεδάσεως τῆς Κβαντομηχανικῆς.

Ἄσκ. 5(σ.83). Βλ. Κείμενον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

Ἀσκ. 1(σ.94). Ἀναγκαῖον: Ἄς συμβολίσωμεν $\phi^{(n)}(\vec{x})=\sum x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n}V_{i_1\ldots i_n}$. Ἐξ ὑποθέσεως, τό $|\phi^{(n)}(\vec{x})|=1$ συνεπάγεται $|\vec{x}|\leq M<\infty$ καί ἐκ τῆς ὁμογενείας τῆς $\phi^{(n)}$, $|\phi^{(n)}(\vec{\xi})|\geq 1/M^n$ ὅπου $\vec{\xi}=\vec{x}/x$. Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν καί τήν συνέχειαν τῆς $\phi^{(n)}(\vec{\xi})$, ὁ n πρέπει νά εἶναι ἄρτιος καί εἴτε (α) $\phi^{(n)}(\vec{\xi})>0$ ἤ (β) $\phi^{(n)}(\vec{\xi})<0$. Ἀναπτύσσοντες, $V(\varepsilon\vec{\xi})=V(\vec{o})+\frac{\varepsilon^n}{n!}\phi^{(n)}(\vec{\xi})+O(\varepsilon^{n+1})$ ($|\varepsilon\vec{\xi}|<r_o$, ὅπου r_o ἡ ἀκτίς συγκλίσεως), ἀποδεικνύομεν ἀμέσως ὅτι τό $V(\vec{o})$ εἶναι εἴτε ἐλάχιστον, περίπτωσις (α) ἤ μέγιστον, περίπτωσις (β). Τό ἀρκεῖ εἶναι προφανές.

Ἀσκ. 2(σ.94). Βλ. κείμενον.

Ἀσκ. 3(σ.96). Ἐκ τοῦ $\sum_{i,k=1}^{n} U_{ik}x_i x_k=1$ ἕπεται ὅτι $\sum_{i,k=1}^{n} U_{ik}x_k dx_i=0$ καί ἄν $|x^{(\lambda)}>$ ἰδιοάνυσμα, $U_{ik}x_k^{(\lambda)}=\omega_\lambda^2 x_i^{(\lambda)}$, ἔχομεν $\omega_\lambda^2\sum_{k=1}^{n} x_k^{(\lambda)}dx_k=0$.

Ἄρα τά ἰδιοανύσματα $|x^{(\lambda)}>$, διάμετροι κάθετοι ἐπί τήν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐλλειψοειδοῦς, συμπίπτουν μετά τῶν πρωτευόντων ἀξόνων. Διά τό ὑπόλοιπον τῆς ἀποδείξεως βλ. κείμενον.

Ἀσκ. 4(σ.96). Τό ἐσωτερικόν γινόμενον $\sum_{i=1}^{3}\tau_i(1)\tau_i(2)$,

$\tau_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $\tau^+=\frac{1}{2}(\tau_1+i\tau_2)=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $\tau^-=\frac{1}{2}(\tau_1-i\tau_2)=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$,

$$|N> = \begin{cases} |P> = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} & \text{διά τό πρωτόνιον,}\\ |n> = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} & \text{διά τό νετρόνιον,}\end{cases}$$

ἐκφράζει τήν συμμετρίαν ἰσοτοπικοῦ σπίν τοῦ δυναμικοῦ V_{12} μεταξύ δύο νουκλεονίων $|N_1>,|N_2>$ τοῦ προβλήματος.

Ἄρα $V_{p,p}=V_{pp,pp}=V$, τό δυναμικόν μεταξύ δύο πρωτονίων καί $V_{p,n}=$ $=V_{pp,nn}+V_{pn,np}=-V+2V=V$, τό δυναμικόν μεταξύ πρωτονίου καί νετρονίου. Ὁ ὅρος $V_{pn,np}$ ἐκφράζει δυνάμεις ἀνταλλαγῆς.

$E=\hbar\omega(p+q+r+3)$, $p,q,r=0,1,2,\ldots$ ὅπου $\omega=\sqrt{3}\frac{k}{\sqrt{m}}$. Παρατηρήσατε ὅτι ἡ χαρακτηριστική συχνότης ω εἶναι τό $\sqrt{3/2}$ τῆς χαρακτηριστικῆς συχνότητος τοῦ ἐνεργειακοῦ φάσματος τοῦ "Δευτερίου".