

Τμήμα Φυσικής  
Προβλήματα Α  
13 Νοεμβρίου 2006

**Πρόβλημα 1** Δύο ίδια σωματίδια αλλά με αντίθετα φορτία  $\pm e$  κινούνται με ταχύτητα  $v_\infty$  προς μια κατεύθυνση η οποία περνά σε απόσταση  $b$  από ακλόνητο φορτίο  $Q$ . Πόσο θα παρεκκλίνουν το ένα από το άλλο τα δύο σωματίδια (τι γωνία θα σχηματίζουν οι τροχιές τους) αρκετά μετά τη σκέδασή τους;

**Πρόβλημα 2** Ένα σωματίδιο με μάζα  $m_1$  κινείται προς ένα άλλο ακίνητο σωματίδιο με μάζα  $m_2$  με ταχύτητα  $v_1^{(L)}$  σε κατεύθυνση η οποία διέρχεται σε απόσταση  $b$  (παράμετρος κρούσης) από το ακίνητο σωματίδιο. Τα δύο σωματίδια αλληλεπιδρούν με μια δύναμη νευτώνειου τύπου της μορφής

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = f(|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|) \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|},$$

όπου  $\vec{x}_{1,2}$  οι θέσεις των δύο σωματιδίων και  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$  η δύναμη που ασκεί το 1 στο 2.

1. Γράψτε τις Νευτώνειες εξισώσεις κίνησης και έπειτα γράψτε τις εξισώσεις της κίνησης χρησιμοποιώντας ως μεταβλητές την θέση του κέντρου μάζας  $\vec{X} = (m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2)/M$ , όπου  $M = m_1 + m_2$  η συνολική μάζα, και το διάνυσμα της σχετικής τους θέσης  $\vec{x} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$ . Συγκεκριμένα δείξτε ότι οι εξισώσεις κίνησης παίρνουν την εξής απλή μορφή:

$$M\ddot{\vec{X}} = 0 \quad , \quad \mu\ddot{\vec{x}} = f(|\vec{x}|) \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|},$$

όπου  $\mu = m_1m_2/M$  η ανηγμένη μάζα του συστήματος. Εξηγήστε τι επιτύχατε με τις καινούργιες συντεταγμένες.

2. Δείξτε ότι διατηρείται η στροφορμή  $\vec{L}^{(CM)} = M\vec{X} \times \dot{\vec{X}}$  καθώς και η "ιδιοστροφορμή"  $\vec{l} = \mu\vec{x} \times \dot{\vec{x}}$ . Δείξτε ότι διατηρείται η ολική στροφορμή

$$\vec{L} = m_1\vec{x}_1 \times \dot{\vec{x}}_1 + m_2\vec{x}_2 \times \dot{\vec{x}}_2$$

καθώς και ότι είναι  $\vec{L} = \vec{L}^{(CM)} + \vec{l}$ . Υπολογίστε τις  $\vec{L}^{(CM)}$  και  $\vec{l}$  για το δοσμένο σύστημα.

3. Γράψτε την διατηρούμενη ενέργεια. Δείξτε ότι η κινητική ενέργεια των δύο σωματιδίων μπορεί να γραφεί ως:

$$\frac{1}{2}m_1|\dot{\vec{x}}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|\dot{\vec{x}}_2|^2 = \frac{1}{2}M|\dot{\vec{X}}|^2 + \frac{1}{2}\mu|\dot{\vec{x}}|^2.$$

Δηλαδή στην περίπτωση δύο σωματιδίων η κινητική ενέργεια γράφεται ως άθροισμα της κινητικής ενέργειας του κέντρου μάζας και της κινητικής ενέργειας της σχετικής κίνησης των σωματιδίων. Υπολογίστε τις δύο κινητικές ενέργειες του συστήματος αρχικά (πολύ πριν τη σκέδαση).

### συνέχεια του Προβλήματος 2 της προηγούμενης σειράς

1. Αν στο σύστημα ΚΜ ένα σωματίδιο σκεδάζεται σε γωνία  $\Theta$  ενώ στο εργαστήριο η αντίστοιχη γωνία σκέδασης είναι  $\vartheta$  ποια σχέση συνδέει τις δύο διαφορικές ενεργές διατομές στα δύο συστήματα;

2. Ας δούμε τώρα πώς σχετίζονται μεταξύ τους οι δύο αυτές γωνίες  $\Theta, \vartheta$ . [Προς τούτο συμπληρώστε τα κενά στις ακόλουθες προτάσεις:] Στο σύστημα ΚΜ το βλήμα ( $m_1$ ) κινείται με ταχύτητα  $\vec{v}_1^{(KM)} = \dots$ , ενώ το σύστημα ΚΜ κινείται ως προς το εργαστήριο με ταχύτητα  $\vec{v}_{KM} = \dots$ . Μετά τη σκέδαση το βλήμα κινείται ως προς το ΚΜ, αφού η κρούση είναι ελαστική με ταχύτητα μέτρου  $|\vec{v}_1^{(KM)}| = \dots$  και σε κατεύθυνση  $\hat{n}(\Theta)$  που σχηματίζει γωνία  $\Theta$  με την αρχική κατεύθυνση κίνησης που ως τη θεωρήσουμε συμβατικά ότι είναι η  $\hat{x}$  (διορθώστε κατάλληλα το διανυσματικό μέρος των προηγούμενων απαντήσεών σας). Αν θέλουμε να μεταδούμε στο σύστημα του εργαστηρίου θα πρέπει να προσθέσουμε στην ταχύτητα του σωματιδίου στο ΚΜ την ταχύτητα  $\vec{v}_{KM \rightarrow L} = \dots$ . Επομένως η ταχύτητα σκέδασης του σωματιδίου στο εργαστήριο θα είναι  $\vec{v}_1' = \vec{v}_1^{(KM)} + \vec{v}_{KM \rightarrow L} = \dots$ . Η σχέση λοιπόν των δύο γωνιών θα είναι  $\cos \vartheta = h(\lambda, \cos \Theta)$ , όπου  $\lambda = m_1/m_2$  και  $h(\lambda, x) = \dots$ . Συνολικά η ενεργός διατομή στο σύστημα του εργαστηρίου θα είναι

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}|_L = \frac{d\sigma}{d\Omega}|_{KM} \times g(\lambda, \Theta)$$

όπου  $g(\lambda, \Theta) = \dots$ . Από την παραπάνω σχέση των  $\vartheta$  και  $\Theta$  μπορεί κανείς να αντικαταστήσει και να έχει την ενεργό διατομή στο εργαστήριο.

3. Στην περίπτωση της σκληρής σφαίρας που μελετήσαμε στο μάθημα υπολογίστε τη διαφορική ενεργό διατομή στο εργαστήριο αν οι μάζες βλήματος - στόχου είναι ίδιες. Τι τιμές μπορεί να πάρει η γωνία σκέδασης στην περίπτωση αυτή;
4. Αν τα δύο σώματα είναι απολύτως όμοια (δύο σφαίρες ακτίνας  $a/2$  η κάθε μία τότε δεν μπορούμε να διακρίνουμε στα σκεδαζόμενα σωματίδια ποιο είναι το βλήμα και ποιος ο στόχος. Σε αυτή την περίπτωση ποια θα ήταν η ενεργός διατομή των σωματιδίων που σκεδάζονται; Σκεφθείτε ότι σε κάθε απειροστή στερεά γωνία θα έχω δύο δυνατές διαφορικές διατομές την  $d\sigma_{\beta\lambda\eta\mu\alpha}$   $d\sigma_{\sigma\tau\acute{o}\chi\omicron}$ . Τέλος υπολογίστε την ολική ενεργό διατομή  $\sigma$ . Σας φαίνεται το αποτέλεσμα λογικό; Εξηγήστε.

**Πρόβλημα 3** Σε ένα περιεργο ηλιακό σύστημα η βαρυτική έλξη από τον Ήλιο σε έναν πλανήτη, στο τροχιακό επίπεδο, είναι παντού μηδενική εκτός από τις γωνιακές θέσεις  $\theta = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$ , από τις οποίες όταν περάσει ο πλανήτης υφίσταται μια στιγμιαία ώθηση με κατεύθυνση προς τον Ήλιο και μέτρου  $mv_0$ , όπου  $m$  η μάζα του πλανήτη και  $v_0$  κάποια σταθερά με διαστάσεις ταχύτητας που σχετίζεται με το κεντρικό σώμα. Η μάζα του Ήλιου θεωρείται τόσο μεγάλη σε σχέση με τον πλανήτη, ώστε ο Ήλιος να θεωρείται ακλόνητος.

1. Διατηρείται η στροφορμή ενός πλανήτη που κινείται υπό την επίδραση αυτής της δύναμης; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
2. Ένας πλανήτης κινείται σε τετράγωνη τροχιά με κέντρο του τετραγώνου το κεντρικό σώμα. Ποια η ταχύτητα του πλανήτη και τι διεύθυνση έχουν οι πλευρές του τετραγώνου; Είναι καθορισμένο το μέγεθος της τροχιάς αυτής;
3. Δείξτε ότι η ταχύτητα διαφυγής για ένα σώμα που βρίσκεται αρχικά στη θέση  $(0, a)$  και κινείται κατά τη θετική φορά του άξονα  $x$  είναι  $\sqrt{2}v_0$ . (Το κεντρικό σώμα βρίσκεται στην αρχή των αξόνων και η γωνία  $\theta$  μετριέται από τον άξονα  $x$ .)
4. Εξαρτάται η ταχύτητα διαφυγής από την κατεύθυνση κίνησης του σώματος;
5. Είναι αυτή η δύναμη συντηρητική; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.