



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Βοηθητικά σχόλια στη Μηχανική II (2008)

Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτου

Τα ακόλουθα σχόλια - σημειώσεις γράφθηκαν για να καλύψουν πιθανά προβλήματα που έχουν σημειώσει οι φοιτητές μας, όσον αφορά στην κατανόηση ή την πρακτική εφαρμογή κάποιων εκφράσεων/μεγεθών που σχετίζονται με την ύλη της Μηχανικής II, όπως αυτή αποτυπώνεται στο βιβλίο μας "Θεωρητική Μηχανική". Επιπλέον έχουμε προσθέσει κάποια δικά μας σχόλια με αφορμή συχνά λάθη των φοιτητών στις εξετάσεις. Ελπίζουμε ότι αυτό θα βοηθήσει πολλούς να διαλύσουν απορίες και εσφαλμένες απόψεις.

1. **Κατασκευή πίνακα κινητικής και δυναμικής ενέργειας (κεφ. 6):** Μια Λαγκρανζιανή που περιγράφει ένα σύστημα συζευγμένων ταλαντωτών κοντά σε σημείο ισορροπίας αυτού (γραμμικοποιημένη Λαγκρανζιανή) έχει τη μορφή

$$L = \frac{1}{2}(a_{11}\dot{x}_1^2 + a_{12}\dot{x}_1\dot{x}_2 + a_{13}\dot{x}_1\dot{x}_3 + \dots + a_{NN}\dot{x}_N^2) - \frac{1}{2}(b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + \dots + b_{NN}x_N^2), \quad (1)$$

όπου $x_1, x_2, \dots, x_N$ είναι οι γενικευμένες συντεταγμένες που χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν τη θέση του συστήματος και $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_N$ οι αντίστοιχες γενικευμένες ταχύτητες.

Η "συνταγή" κατασκευής των πινάκων κινητικής και δυναμικής ενέργειας είναι αφού πετάξουμε τους συντελεστές $1/2$ μπροστά από την κινητική και δυναμική ενέργεια να συμπληρώσουμε τους πίνακες με τους συντελεστές των διγραμμικών μορφών $\dot{x}_i\dot{x}_j$ και x_ix_j ως ακολούθως:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}/2 & \dots & a_{1N}/2 \\ a_{12}/2 & a_{22} & \dots & a_{2N}/2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1N}/2 & a_{2N}/2 & \dots & a_{NN} \end{pmatrix} \quad (2)$$

και

$$= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}/2 & \dots & b_{1N}/2 \\ b_{12}/2 & b_{22} & \dots & b_{2N}/2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1N}/2 & b_{2N}/2 & \dots & b_{NN} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Προσέξτε τους όρους $/2$ σε όλα τα μη διαγώνια στοιχεία.

Εξήγηση: Όταν η Λαγκρανζιανή γραφεί στη συνοπτική της μορφή με πίνακες

$$L = \frac{1}{2}\dot{X}^\top \mathbf{M} \dot{X} - \frac{1}{2}X^\top \mathbf{K} X, \quad (4)$$

όπου

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}. \quad (5)$$

και αντίστοιχα για το $\dot{X}$, και εκτελέσουμε τις πράξεις πολλαπλασιασμού των πινάκων θα καταλήξουμε στη Λαγκρανζιανή (κάντε μόνοι σας τις πράξεις)

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + (M_{12}\dot{x}_1\dot{x}_2 + M_{21}\dot{x}_2\dot{x}_1) + (M_{13}\dot{x}_1\dot{x}_3 + M_{31}\dot{x}_3\dot{x}_1) + \dots + M_{NN}\dot{x}_N^2) - \frac{1}{2}(V_{11}x_1^2 + (K_{12}x_1x_2 + K_{21}x_2x_1) + (K_{13}x_1x_3 + K_{31}x_3x_1) + \dots + b_{NN}x_N^2). \quad (6)$$

Συγκρίνοντας με την αρχική Λαγκρανζιανή (1) βλέπουμε ότι τα στοιχεία των πινάκων πρέπει να είναι

$$M_{11} = a_{11}, \quad M_{12} = M_{21} = a_{12}/2, \quad M_{13} = M_{31} = a_{13}/2, \quad \dots \\ K_{11} = b_{11}, \quad K_{12} = K_{21} = b_{12}/2, \quad K_{13} = K_{31} = b_{13}/2, \quad \dots \quad (7)$$

Παράδειγμα: Αν

$$L = \frac{1}{2}m(8\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_2^2 + 3\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) - \frac{1}{2}k(3\theta_1^2 + \theta_2^2 - 4\theta_1\theta_2)$$

$$\mathbf{M} = m \begin{pmatrix} 8 & 3/2 \\ 3/2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = k \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Η αγκύλη Poisson είναι βαθμωτό μέγεθος και δεν έχει συνιστώσες. Κατασκευάζεται και υπολογίζεται όμως ως άθροιση όρων που αναφέρονται σε κάθε ζευγάρι κανονικών συντεταγμένων (ορμής - θέσης) [μετάφραση canonical coordinates] [ουδεμία σχέση με τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης = μετάφραση του normal modes].

Έτσι

$$\{F(q, p), G(q, p)\} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right) \\ = \frac{\partial F}{\partial q_1} \frac{\partial G}{\partial p_1} - \frac{\partial F}{\partial p_1} \frac{\partial G}{\partial q_1} + \frac{\partial F}{\partial q_2} \frac{\partial G}{\partial p_2} - \frac{\partial F}{\partial p_2} \frac{\partial G}{\partial q_2} + \dots \quad (8)$$

Η αγκύλη Poisson ενός μεγέθους $F(q, p)$ με τη Χαμιλτονιανή $H(q, p, t)$, $\{F, H\}$ δίδει την ταχύτητα μεταβολής του μεγέθους F ακόμη και αν η Χαμιλτονιανή είναι χρονοεξαρτώμενη. Αρκεί όμως η F να μην έχει άμεση εξάρτηση από το χρόνο.

Απόδειξη:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial F}{\partial p_1} \dot{p}_1 + \frac{\partial F}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial F}{\partial p_2} \dot{p}_2 + \dots \\ = \frac{\partial F}{\partial q_1} \frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{\partial F}{\partial p_1} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial F}{\partial q_2} \frac{\partial H}{\partial p_2} + \frac{\partial F}{\partial p_2} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_2} \right) + \dots \\ \equiv \{F, H\}. \quad (9)$$

3. Στην σελίδα 150 του βιβλίου, στην αρχή του εδαφίου 6.3, η πρώτη πρόταση με την οποία ξεκινάει είναι ημιτελής. Ο δαίμονας της δακτυλογράφησης (όχι του τυπογραφείου - μην τα ρίχνουμε σε άλλους) αφαίρεσε την υπόλοιπη φράση που μάλλον έχει πλέον χαθεί στους λαδύρινθους της λήθης. Θα ανασκεύαζα αυθαίρετα την πρόταση ως: “Πολλές φορές για τη μελέτη διαφόρων φαινομένων που συμβαίνουν σε περιστρεφόμενα συστήματα, όπως αυτών που λαμβάνουν χώρα στην επιφάνεια της Γης, η ανάλυσή τους σε κάποιο αδρανειακό σύστημα είναι ακατάλληλη ή τουλάχιστον μπορεί να δημιουργήσει παρανοήσεις όσον αφορά στα όσα παρατηρούνται από τα ίδια τα περιστρεφόμενα συστήματα.”

4. Όταν υπάρχει κάποιος ολόνομος δεσμός, για παράδειγμα της μορφής $x_1 = f(x_2, x_3, \dots, t)$, σε ένα πρόβλημα, αυτός μπορεί να αντικατασταθεί απευθείας μέσα στη Λαγκρανζιανή που θα γράψαμε αν αγνοούσαμε αυτό το δεσμό.

Παράδειγμα: Σε ένα πρόβλημα κίνησης σωματιδίου σε 3 διαστάσεις, αναλυμένο σε κυλινδρικές συντεταγμένες, αν γνωρίζουμε ότι η κίνηση γίνεται επί κυλινδρικής επιφάνειας $\rho = R$ τότε στη Λαγκρανζιανή

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - V(\rho, \phi, z)$$

μπορούμε να αντικαταστήσουμε παντού την μεταβλητή ρ με R , οπότε η Λαγκρανζιανή γίνεται

$$L = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - V(R, \phi, z)$$

[ο όρος $\dot{\rho}^2$ εξαφανίστηκε αφού όντας $R = \text{σταθερό}$, $\dot{R} = 0$.] Η νέα Λαγκρανζιανή έχει 2 μόνο βαθμούς ελευθερίας.

5. Μια διαφορική εξίσωση γραμμική με σταθερούς συντελεστές (ακόμη και αν αυτοί είναι μιγαδικοί) της μορφής

$$a_n \frac{d^n}{dx^n} y + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} y + \dots + a_1 \frac{d}{dx} y = 0$$

έχει λύσεις της μορφής $y(x) = y_0 e^{\lambda x}$. Ο συντελεστής λ είναι μια από τις λύσεις του χαρακτηριστικού πολωνύμου $a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 = 0$. Το γεγονός αυτό γίνεται καθαρό αν αντικαταστήσουμε την προταθείσα λύση στη διαφορική εξίσωση. Το πολώνυμο αυτό έχει n λύσεις $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ στο σώμα των μιγαδικών αριθμών. Η γενική λύση λοιπόν της διαφορικής εξίσωσης (όντας γραμμική η εξίσωση ισχύει η αρχή της επαλληλίας) είναι

$$y(x) = A_1 e^{\lambda_1 x} + A_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + A_n e^{\lambda_n x}.$$