Τμήμα Ιωάννου-Αποστολάτου
1 Μαΐου 2001

Μηχανική ΙΙ

Νέα (συμπληρωματική) Σειρά Ασκήσεων

1. Υπολογίστε τα : $\delta_{ik}\varepsilon_{ikm}$, $\varepsilon_{iks}\varepsilon_{jks}$ $\varepsilon_{iks}\varepsilon_{iks}$.
2. Χρησιμοποιώντας δείκτες αποδείξτε τη ταυτότητα:
$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c})$$
3. Χρησιμοποιώντας δείκτες δείξτε ότι $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\varphi = 0$, ομοίως ότι $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{u}) = 0$, και : $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{u} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) - \nabla^2\vec{u}$, $\vec{\nabla}\times(\varphi\vec{u}) = \varphi\vec{\nabla}\times\vec{u} + \vec{\nabla}\varphi\times\vec{u}$. Η ϕ και η $\vec{u}$ είναι συναρτήσεις του χώρου.
4. Από το διάνυσμα $\vec{\varpi}$ παράγεται ο πίνακας $\Omega_{ij} = \varepsilon_{ijk}\omega_k$. Δείξτε ότι ο πίνακας Ω είναι αντισυμμετρικός. Υπολογίστε το $\vec{\varpi}$ εαν δίδεται ο αντισυμμετρικός πίνακας Ω.
5. Εάν Δ είναι η ορίζουσα του 3Χ3 πίνακα Α, τότε δείξτε ότι:
$$\varepsilon_{ikm}\Delta = \varepsilon_{jlp}A_{ij}A_{kl}A_{mp}, \text{ και } \varepsilon_{jlp}\Delta = \varepsilon_{ikm}A_{ij}A_{kl}A_{mp}.$$
6. Μελετήστε την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας που πρωτοεμφανίζεται στο πρόβλημα της χάντρας που κινείται επί της περιστρεφόμενης στεφάνης, που συζητήσαμε στη τάξη, όταν $\dfrac{g}{a\Omega^2} < 1$. (a η ακτίνα της στεφάνης, Ω η σταθερή γωνιακή ταχύτητα της στεφάνης.)
7. Τρείς ίσες μάζες μπορούν να κινούνται χωρίς τριβή κατά μήκος των πλευρών ενός ισοπλεύρου τριγώνου. Οι μάζες έλκονται μεταξύ τους σύμφωνα με το νόμο της βαρύτητας του Νεύτωνα. Αρχικά ισορροπούν στα μέσα των πλευρών του τριγώνου. Η θέση ισορροπίας διαταράσσεται. Γράψτε τη Λαγκρανζιανή που διέπει την κίνηση όσο οι μάζες δεν βρίσκονται στις κορυφές του τριγώνου και προσδιορίστε τη Λαγκρανζιανή που διέπει μικρές γραμμικές κινήσεις περί το αρχικό σημείο ισορροπίας. Αποδείξτε ότι το αρχικό σημείο είναι ασταθές, εκτός εάν όλες οι μάζες μετατοπισθούν το ίδιο και με την ίδια ταχύτητα. Σε αυτήν την περίπτωση προσδιορίστε τη συχνότητα της ταλάντωσης.
8. Ένα ουράνιο σώμα κινείται σε κυκλική τροχιά γύρω από ένα ακίνητο ελκτικό βαρυτικό κέντρο. Γραμμικοποιήστε το πρόβλημα της κίνησης του σώματος για αρχικές ταχύτητες παραπλήσιες αυτής που εξασφαλίζει την κυκλική κίνηση, θεωρώντας ότι οι μετατοπίσεις από την αρχική τροχιά είναι πολύ μικρές και μελετήστε την κίνηση που προκύπτει. Τι θα συνέβαινε αν η δύναμη δεν ήταν αντιστρόφου τετραγώνου αλλά της μορφής $1/r^n$;