

Νέα σειρά ασκήσεων στις μικρές ταλαντώσεις

1. (Θέμα Εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2000) (α) Γράψτε τη Λαγκρανζιανή συνάρτηση για ένα σύστημα δύο **ανεξάρτητων** μονοδιάστατων αρμονικών ταλαντωτών με αντίστοιχες μάζες  $m_1, m_2$  και σταθερές σκληρότητας ελατηρίων  $k_1, k_2$ . Ποια η συχνότητα ταλάντωσης του κάθε ταλαντωτή; (β) Κατασκευάστε έναν απλό  $2 \times 2$  πίνακα  $\mathbf{A}$  ο οποίος να **μην** είναι διαγώνιος και να **μην** έχει μηδενική ορίζουσα. Θεωρήστε τον σημειακό μετασχηματισμό από τις αρχικές συντεταγμένες των δύο ταλαντωτών  $x_1, x_2$

στις νέες συντεταγμένες  $q_1, q_2$  που υπαγορεύεται από τη σχέση  $\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ .

Κατασκευάστε τη νέα Λαγκρανζιανή του συστήματος βάσει των νέων συντεταγμένων.

(γ) Υπολογίστε στη συνέχεια από τη νέα Λαγκρανζιανή τις ιδιοσυχνότητες και τα ιδιοανύσματα του συστήματος. Πώς σχετίζονται οι νέες ιδιοσυχνότητες με τις συχνότητες του ερωτήματος (α);

(δ) Αν το σύστημα είναι τέτοιο ώστε οι άμεσα παρατηρήσιμες ποσότητες είναι οι  $q_1, q_2$ , αναμένετε αυτές να εκτελούν αρμονική ταλάντωση; Στηριζόμενοι στην παραπάνω ανάλυση μπορείτε να εξηγήσετε ποιο είναι το νόημα της ανάλυσης ενός σύνθετου συστήματος που εκτελεί ταλαντώσεις σε κανονικούς τρόπους ταλάντωσης;

2. Σε κάποιο φυσικό πρόβλημα η κινητική ενέργεια περί το σημείο ισορροπίας είναι  $T = 2\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{y} + 5\dot{y}^2$ , ενώ η δυναμική ενέργεια είναι  $V = x^2 + 4y^2$ . Η κίνηση υπό μορφή πινάκων έχει τη μορφή  $M\ddot{X} + KX = 0$ , όπου

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

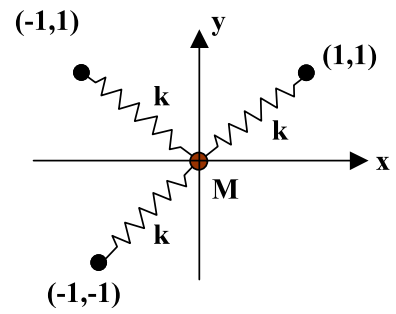
α) Προσδιορίστε τον πίνακα των μαζών  $M$  και της δυναμικής ενέργειας  $K$ .

β) Προσδιορίστε τις ιδιοσυχνότητες του συστήματος και τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης.

γ) Ορίστε τις κανονικές συντεταγμένες. Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης αν λάβετε ως συντεταγμένες τις κανονικές συντεταγμένες.

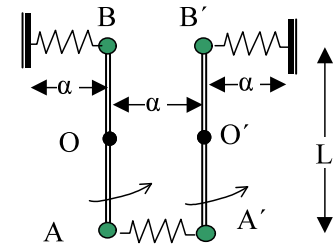
δ) Γράψτε υπό μορφή πινάκων τον μετασχηματισμό στις κανονικές συντεταγμένες. Υπολογίστε, με τη χρήση πινάκων, τη μορφή της Λαγκρανζιανής ως προς τις κανονικές συντεταγμένες.

3. Με τη μέθοδο που ακολουθήσαμε στο μάθημα γράψτε τη Λαγκρανζιανή πυκνότητα που διέπει τις μικρές εγκάρσιες κινήσεις μιας μεμβράνης η οποία είναι ακίνητη στο σύνορο κάποιας επιπέδου καμπύλης στο καρτεσιανό επίπεδο  $x, y$ . Η μεμβράνη βρίσκεται υπό ιστροπική τάση  $\mu$ , έτσι ώστε αν η επιφάνεια ενός μικρού χωρίου της μεμβράνης μεταβληθεί κατά  $\Delta A$  το έργο που εκτελείται να είναι  $\mu \Delta A$ . Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης. Θεωρείστε τώρα ότι το σύνορο είναι κυκλικό, και ότι η θέση της μεμβράνης προσδιορίζεται από τις πολικές συντεταγμένες. Γράψτε τη Λαγκρανζιανή πυκνότητα σε πολικές συντεταγμένες και τη δράση που καθίσταται στάσιμη από τη φυσική κίνηση. Προσδιορίστε τις εξισώσεις κίνησης της μεμβράνης σε πολικές συντεταγμένες.



4. (Θέμα από εξετάσεων Ιουνίου 1999) Σωματίδιο μάζας  $M$  κινείται στο επίπεδο  $x$ - $y$ . Το σωματίδιο είναι συνδεδεμένο στο άκρο τριών ελατηρίων, έκαστο σταθεράς  $k$ . Τα τρία ελατήρια έχουν στερεωμένα τα άλλα άκρα τους στα σημεία  $(1,1)$ ,  $(-1,1)$ ,  $(-1,-1)$  και έχουν όλα φυσικό μήκος  $\sqrt{2}$ . (α) Να γραφεί η Λαγκρανζιανή του σωματιδίου για μικρές κινήσεις γύρω από την αρχή των αξόνων, που είναι σημείο ισορροπίας. (β) Να βρεθούν οι ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης του σωματιδίου, τα ιδιοανύσματα των κανονικών τρόπων ταλάντωσης αυτού, και το είδος ευστάθειας του σημείου ισορροπίας. (γ) Πώς θα κινηθεί το σωματίδιο αν αρχικά βρισκόταν ακίνητο στη θέση  $(\varepsilon, -\varepsilon)$ , όπου  $\varepsilon$  πολύ μικρός θετικός αριθμός; Περιμένετε από τη γεωμετρική συμμετρία του προβλήματος την εξέλιξη αυτή;

5. (Θέμα εξετάσεων Σεπτεμβρίου 1999). Δύο όμοιες αβαρείς ράβδοι μήκους  $L$  μπορούν να περιστρέφονται ελεύθερα γύρω από το κέντρο τους  $O, O'$ . Στα τέσσερα άκρα τους  $A, A', B, B'$  φέρουν από μια σημειακή μάζα  $m$ . Οι μάζες συνδέονται με ελατήρια σταθεράς  $k$  και φυσικού μήκους ίσου με την απόσταση  $\alpha$  των αξόνων των δύο ράβδων όπως στο σχήμα (το κάτω ελατήριο συνδέει τις δύο κάτω μάζες ενώ τα άνω ελατήρια συνδέουν τις άνω μάζες με ακλόνητα τοιχώματα).



Στην κατάσταση ισορροπίας οι ράβδοι είναι παράλληλοι. Οι ράβδοι κινούνται στο ίδιο επίπεδο και βρίσκονται εκτός του βαρυτικού πεδίου της Γης. (α) Να βρεθούν οι ιδιοσυχνότητες και οι ιδιοσυναρτήσεις των κανονικών τρόπων ταλάντωσης του συστήματος. (β) Περιγράψτε την εξέλιξη του συστήματος αν αρχικά η αριστερή ράβδος είναι ακίνητη και η δεξιά περιστρέφεται σύμφωνα με τη φορά των βελών με γωνιακή ταχύτητα  $\omega \ll \sqrt{k/m}$ .

6. (Θέμα εξετάσεων Ιουνίου 2000). Τρία σώματα ίσης μάζας,  $m$ , που σημειώνονται με τους δείκτες  $i=1,2,3$  αναγκάζονται να κινούνται επί τριών συρμάτων, οι άξονες των οποίων είναι στο επίπεδο και σχηματίζουν στη κοινή αρχή τους γωνία  $120^\circ$  μεταξύ των (βλ. σχήμα). Τα σώματα είναι συνδεδεμένα ανά δύο με γραμμικά ελατήρια σταθεράς  $k$  και φυσικού μήκους  $l\sqrt{3}$ . Αρχικά τα σώματα βρίσκονται σε ισορροπία σε απόσταση  $l$  από την αρχή των αξόνων. Η ισορροπία διαταράσσεται και τα σώματα εκτελούν μικρές ταλαντώσεις γύρω από το σημείο ισορροπίας τους. Θεωρήστε



ως συνεταγμένες που προσδιορίζουν τη θέση των σωμάτων την απόσταση  $x_i$  εκάστου από το σημείο ισορροπίας του.

α) Προσδιορίστε τη Λαγκρανζιανή συνάρτηση  $L(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, x_3, \dot{x}_3)$  που διέπει μικρές κινήσεις των σωμάτων περί του σημείου ισορροπίας των και δείξτε ότι η εξίσωση κίνησης και για τα τρία σώματα είναι  $m\ddot{x}_i = -Ax_i - B(x_1 + x_2 + x_3)$ . Προσδιορίστε τα  $A$  και  $B$ .

β) Αποδείξτε ότι μία από τις κανονικές ταλαντώσεις είναι απόλυτα συμμετρική:  $x_1(t) = x_2(t) = x_3(t)$  και προσδιορίστε την ιδιοσυχνότητά της.

γ) Αποδείξτε ότι οι άλλες δύο κανονικές ταλαντώσεις έχουν κοινή ιδιοσυχνότητα (είναι εκφυλισμένες) και προσδιορίστε τη συχνότητα αυτή. Γράψτε ένα ζεύγος ιδιοσυναρτήσεων για τις δύο εκφυλισμένες ταλαντώσεις που τις καθιστά ορθογώνιες ανά πάσα στιγμή.

[Υπόδειξη: Τα ερωτήματα (β) και (γ) μπορούν να απαντηθούν χωρίς τη χρήση των γενικών αναλυτικών μεθόδων για την εύρεση των κανονικών τρόπων ταλάντωσης.]