Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτος 10/5/00

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΙΙ (ΣΕΙΡΑ Θ΄)

1. Υπολογίστε το μετασχηματισμό Legendre $g(p)$ της $f(v) = \frac{1}{2}v^2 + av$. Τι φυσικό σύστημα περιγράφει η Χαμιλτονιανή αυτή; Υπολογίστε το μετασχηματισμό Legendre της $f(v) = -b\sqrt{1-v^2}$, για $-1 \le v \le 1$ και $b > 0$. Τι φυσικό σύστημα περιγράφει η Χαμιλτονιανή αυτή;
2. Υπολογίστε τη Λαγκρανζιανή συνάρτηση που αντιστοιχεί στη Χαμιλτονιανή $H(q,p) = \frac{p^2}{2} + p\sin q$.
3. Αποδείξτε ότι αν ικανοποιούνται οι κανονικές εξισώσεις του Χάμιλτον τότε θα ικανοποιούνται αυτόματα και οι εξισώσεις Euler-Lagrange.
4. Σημειακή μάζα κινείται στο επίπεδο υπό την επίδραση κεντρικής δύναμης $f(r)$. Η κίνηση περιγράφεται σε πολικές συντεταγμένες (r,θ). Υπολογίστε τη Χαμιλτονιανή συνάρτηση και γράψτε τις εξισώσεις του Χάμιλτον.
5. Θεωρήστε ένα ελεύθερο σωματίδιο μάζας m που κινείται στο επίπεδο $x-y$. Αντί των καρτεσιανών συντεταγμένων x και y επιλέγουμε να περιγράψουμε την κίνηση στις περιστρεφόμενες συντεταγμένες $\xi = x\cos\omega t + y\sin\omega t$, $\eta = y\cos\omega t - x\sin\omega t$. Παρατηρήστε ότι $x = \xi\cos\omega t - \eta\sin\omega t$, $y = \xi\sin\omega t + \eta\cos\omega t$. α) Γράψτε τη Λαγκρανζιανή συνάρτηση του σωματιδίου στις συντεταγμένες ξ και η και τις εξισώσεις Euler-Lagrange που διέπουν την κίνηση. β) Υπολογίστε τη Χαμιλτονιανή συνάρτηση H που αντιστοιχεί σε αυτή τη Λακγρανζιανή. γ) Μπορείτε να βρείτε την τιμή ενός ομογενούς μαγνητικού πεδίου ώστε η παραπάνω Χαμιλτονιανή να περιγράφει την επίπεδη κίνηση ενός φορτισμένου σωματιδίου μέσα στο μαγνητικό αυτό πεδίο, κάθετο στο επίπεδο κίνησης, στο οποίο δρα επιπλέον ένας αντεστραμμένος (απωθητικός) αρμονικός ταλαντωτής. δ) Διατηρείται η κινητική ενέργεια $K = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$; Διατηρείται η Χαμιλτονιανή H;
6. Υπολογίστε τη Χαμιλτονιανή συνάρτηση για ένα φορτισμένο σωματίδιο που κινείται σε ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο. Γράψτε τις κανονικές εξισώσεις του Χάμιλτον που διέπουν την κίνηση του σωματιδίου.
7. Γράψτε μια Λαγκρανζιανή συνάρτηση που διέπει τη κίνηση του αρμονικού ταλαντωτή με απόσβεση (έχετε δει τη Λαγκρανζιανή αυτή συνάρτηση σε προηγούμενη άσκηση). Υπολογίστε την Χαμιλτονιανή συνάρτηση που αντιστοιχεί σε αυτή τη Λαγκρανζιανή.
8. Έστω η Χαμιλτονιανή συνάρτηση $H = \frac{1}{2}\left(p^2 + \omega^2 q^2\right)$. Γράψτε τις εξισώσεις του Χάμιλτον για τη στήλη $\zeta = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ στη μορφή $\frac{d\zeta}{dt} = R\zeta$, όπου R είναι ένας πίνακας 2×2. Βρέστε τον πίνακα R. Γράψτε τη λύση στη μορφή $\zeta(t) = e^{Rt}\zeta(0)$, και υπολογίστε τον πίνακα e^{Rt}. Προσδιορίστε τη θέση και την ορμή τη χρονική στιγμή t, και σχεδιάστε την τροχιά στο χώρο των φάσεων.
9. Η στροφορμή ενός σωματιδίου είναι $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. Υπολογίστε την αγκύλη Poisson $[L_x, L_y]$, όπου L_i η i-οστή συνισταμένη του διανύσματος της στροφορμής. Η ολική στροφορμή ως

προς την αρχή των αξόνων n σωματιδίων είναι $\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$. Υπολογίστε την αγκύλη Poisson $[L_x, L_y]$.

10. Η Λαγκρανζιανή ελεύθερου σχετικιστικού σωματιδίου που κινείται στην ευθεία είναι $L(\dot{x}) = -mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2}{c^2}}$, όπου x η θέση του σωματιδίου στην ευθεία. Υποθέστε ότι στο σωματίδιο ασκείται τέτοια δύναμη ώστε η Λαγκρανζιανή να είναι $L(x,\dot{x}) = -mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2}{c^2}} - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. Γράψτε τη Χαμιλτονιανή συνάρτηση του σωματιδίου. Διατηρείται η Χαμιλτονιανή κατά την κίνηση; Ποια η τιμή της α) όταν η ταχύτητα του σωματιδίου είναι μηδέν και β) όταν βρίσκεται στην αρχή των αξόνων στο χώρο των φάσεων; Δείξτε ότι η περίοδος της ταλάντωσης μπορεί να τεθεί στην εξής μορφή: $T = \frac{4}{c\omega}\sqrt{\frac{2}{m}}\int_0^{\pi/2} d\theta \frac{E-(E-mc^2)\sin^2\theta}{\left[(E+mc^2)-(E-mc^2)\sin^2\theta\right]^{1/2}}$, όπου E η ενέργεια του σωματιδίου. Επιβεβαιώστε ότι η περίοδος της κίνησης τείνει στη μη-σχετικιστική τιμή της όταν η ταχύτητα είναι μικρή σχετικά με τη ταχύτητα του φωτός.

11. Μετασχηματισμοί Legendre στη θερμοδυναμική: Η θερμοδυναμική κατάσταση ενός θερμοδυναμικού συστήματος μπορεί να προσδιοριστεί από δύο μόνο εκ των τεσσάρων μεταβλητών p (πίεση), V (όγκος), T (θερμοκρασία), S (εντροπία). Από τον 1ο νόμο της θερμοδυναμικής ισχύει ότι

$$dU = TdS - pdV$$

Η εσωτερική ενέργεια U μπορεί να θεωρηθεί λοιπόν συνάρτηση των S και V. Να δείξετε ότι η πίεση όντας και αυτή συνάρτηση των S και V, είναι $\left.\frac{\partial U}{\partial V}\right|_S = -p$.

Η ενθαλπία με τη σειρά της είναι συνάρτηση των S, p και ικανοποιεί τη σχέση $\left.\frac{\partial H}{\partial p}\right|_S = V$.

Προσδιορίστε την H και δείξτε ότι $\left.\frac{\partial H}{\partial S}\right|_p = T$.

Η ελεύθερη ενέργεια Gibbs G είναι συνάρτηση των p, T και ικανοποιεί τη σχέση $\left.\frac{\partial G}{\partial T}\right|_p = -S$. Προσδιορίστε την G και δείξτε ότι $\left.\frac{\partial G}{\partial p}\right|_T = V$.

Η συνάρτηση Helmholtz A είναι συνάρτηση των T, V και ικανοποιεί τη σχέση $\left.\frac{\partial A}{\partial V}\right|_T = -p$.

Προσδιορίστε την A και δείξτε ότι $\left.\frac{\partial A}{\partial T}\right|_V = -S$.