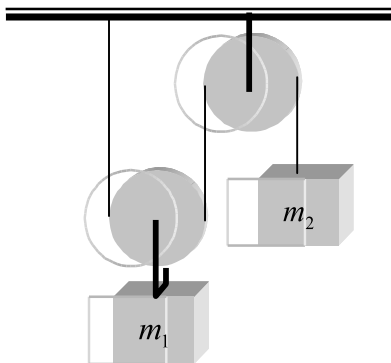
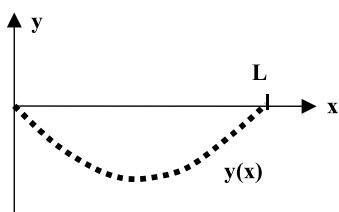


ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΙΙ (ΣΕΙΡΑ Η')

1. Θεωρήστε ένα μονοδιάστατο βαθμωτό πεδίο (π.χ. την εγκάρσια διαταραχή μιας τεντωμένης χορδής κιθάρας). Ποιος μετασχηματισμός της θέσης και του χρόνου αφήνει αναλλοίωτη τη δράση; Ποια είναι η διατηρούμενη ποσότητα ως συνέπεια αυτής της συμμετρίας; Μπορείτε να γενικεύσετε το αποτέλεσμα σας σε πιο σύνθετα πεδία;
2. Για τη μηχανή του Atwood που συναντήσαμε στη Γ' σειρά ασκήσεων



- υπολογίστε την τάση του νήματος χρησιμοποιώντας Λαγκρανζιανό φορμαλισμό (πολλαπλασιαστές Lagrange).
3. Κυκλικός δακτύλιος κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει επί κεκλιμένου επιπέδου που σχηματίζει γωνία α με την οριζόντιο στο σταθερό κατακόρυφο πεδίο βαρύτητας. Γράψτε τη Λαγκρανζιανή συνάρτηση και την εξίσωση κίνησης του δακτυλίου. Υπολογίστε με Λαγκρανζιανό φορμαλισμό τη δύναμη που προέρχεται από την επιβολή της συνθήκης της μη ολίσθησης. Τι συμβαίνει στη δύναμη αυτή όταν $\alpha = 0$; Μπορείτε να δώσετε φυσική εξήγηση;
 4. Μια χάντρα μάζας m δύναται να ολισθαίνει σε λείο σύρμα, το οποίο έχει τη μορφή έλικας, μέσα σε ομογενές βαρυτικό πεδίο το οποίο είναι παράλληλο με τον άξονα της έλικας. Η εξίσωση της έλικας σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι: $r = \text{σταθερό}, z = k\varphi$. Γράψτε τη Λαγκρανζιανή της χάντρας και υπολογίστε την εξίσωση κίνησης αυτής, θεωρώντας ότι για $t = 0$ είναι ακίνητη. Με τη βοήθεια των πολλαπλασιαστών Lagrange υπολογίστε τις δυνάμεις που αισθάνεται η χάντρα ολισθαίνοντας πάνω στη συρμάτινη έλικα.
Στη συνέχεια επιχειρήστε να επιλύσετε το ίδιο πρόβλημα με νευτώνεια αντιμετώπιση. Πώς θα σχεδιάζατε τις δυνάμεις; Καταλαβαίνετε τώρα την ευκολία που σας προσφέρει στην επίλυση προβλημάτων η Λαγκρανζιανή αντιμετώπιση;
 5. **Επιλύστε μια υπερβατική εξίσωση με κανόνα και ...αλυσίδα:** Υποθέστε πως κρατάτε τα δύο άκρα μιας αλυσίδας μήκους $2L$ στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο σε απόσταση L το ένα από το άλλο. Η αλυσίδα αποκτά καμπύλο σχήμα προκειμένου να «κατεβάσει» το κέντρο βάρους της όσο το δυνατόν πιο χαμηλά. Βρείτε τη διαφορική εξίσωση που πρέπει να ικανοποιεί η συνάρτηση σχήματος της αλυσίδας προκειμένου να συμβεί αυτό, με τη συνθήκη το μήκος της να παραμείνει σταθερό. Δείξτε ότι η συνάρτηση:



$$y(x) = \frac{1}{k} [\cosh(kx - kL/2) - \cosh(kL/2)]$$

ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση που βρήκατε προηγουμένως παρέχοντας επιπλέον τη σωστή θέση των άκρων της αλυσίδας. Σε συνδυασμό με τη σχέση που δίνει το μήκος της αλυσίδας υπολογίστε τη ρίζα της υπερβατικής εξίσωσης: $\sinh(x_0) = 2x_0$ εκτελώντας το

πείραμα με την αλυσίδα και μετρώντας το y του μέσου αυτής.

5. Μια χάντρα είναι περασμένη σε ένα σύρμα το οποίο βρίσκεται σε κατακόρυφο επίπεδο και έχει σχήμα $z = f(x)$. Η χάντρα κινείται ελεύθερα στο σύρμα υπό την επενέργεια της βαρύτητας. Να γραφεί η Λαγκρανζιανή της και να μελετηθεί η κίνησή της κοντά σε ένα τοπικό ελάχιστο της καμπύλης.
6. Δείξτε ότι η παραβολοειδής επιφάνεια του νερού σε ένα περιστρεφόμενο δοχείο είναι αυτή που ελαχιστοποιεί τη δυναμική ενέργεια του νερού συνολική (συμπεριλαμβανομένης και της φυγοκεντρικής δυναμικής ενέργειας) στο περιστρεφόμενο σύστημα του δοχείου. Αυτή εξάλλου είναι και η ολική ενέργεια του νερού στο περιστρεφόμενο σύστημα. Μέχρι ποιο ύψος πρέπει να γεμίσουμε ένα κυλινδρικό κουβά ούτως ώστε σε περίπτωση περιστροφής αυτού να αρχίσει να ξεχειλίζει μόνον εφόσον φανεί ο πυθμένας του κουβά;
7. Ένα φορτισμένο σωματίο είναι υποχρεωμένο να κινείται πάνω σε ένα επίπεδο. Το σωματίο βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο, εν γένει πλάγιο σε σχέση με το επίπεδο. Ποια η τροχιά της κίνησής του;
8. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της κατευθυνόμενης παραγώγου της συνάρτησης $f(x, y, z)$:

$$\left. \frac{df}{ds} \right|_{\hat{n}} = \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} \cdot \hat{n},$$

υποκείμενο στη συνθήκη $|\hat{n}| = 1$ (μοναδιαίο διάνυσμα).