Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτος 12/4/00

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΙΙ (ΣΕΙΡΑ Ζ΄)

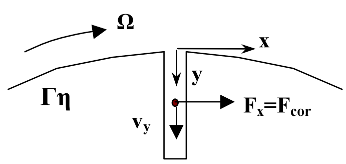
1. Στα (λανθασμένα) βήματα του Νεύτωνα: Επαναλάβατε τον υπολογισμό του Νεύτωνα όσον αφορά το πρόβλημα ρίψης μιας πέτρας χωρίς αρχική ταχύτητα από το άνοιγμα ενός πηγαδιού βάθους H, που βρίσκεται στον Ισημερινό. (α) Με τι ταχύτητα *ως προς αδρανειακό παρατηρητή* (ως προς τον οποίο το κέντρο της Γης παραμένει ακίνητο) φεύγει η πέτρα από τα χέρια αυτού που τη ρίχνει; (β) Λύστε το πρόβλημα της βολής της πέτρας μέσα σε ομογενές βαρυτικό πεδίο (το πηγάδι δεν είναι τόσο βαθύ ώστε να αλλάζει η βαρύτητα σημαντικά) με την αρχική ταχύτητα που υπολογίσατε προηγουμένως. Πόσο χρόνο θα χρειαστεί για να φθάσει στον πυθμένα η πέτρα; Μέχρι να φθάσει στον πυθμένα, πόσο θα έχει μετακινηθεί οριζόντια η πέτρα *ως προς τον αδρανειακό μας παρατηρητή*; (γ) Όλη αυτή την ώρα που η πέτρα έπεφτε, ο πυθμένας του πηγαδιού προχώρησε και αυτός λόγω περιστροφής της Γης. Πόσο; (δ) Πόσο μακρύτερα θα πέσει η πέτρα από το σημείο που θα έπεφτε αν δεν περιστρεφόταν η Γη; Η ακτίνα της Γης να ληφθεί R και η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της Ω. [Απ: $\Delta x = \Omega\sqrt{\frac{2H^3}{g}}$.]

2. Διορθώνοντας τον Νεύτωνα: Ίσως πείτε, λίγο απλοϊκή η λύση του Νεύτωνα, αφού δεν έλαβε υπόψη του της σφαιρικότητα της Γης. Δεν θα συμφωνούσατε μαζί του αν το πηγάδι είχε βάθος μόλις 1 χιλιοστού για παράδειγμα; Είναι φυσικό σε αυτή την περίπτωση να αγνοήσει κανείς την καμπυλότητα της Γης όπως αγνοεί και τη μεταβολή του g αναμένοντας μια τέτοια θεώρηση να επιφέρει διορθώσεις ανώτερης τάξης στο αποτέλεσμα. Είναι σωστό όμως αυτό; Ας ακολουθήσουμε τα παρακάτω βήματα: (α) Καθώς η πέτρα εκτελεί την οριζόντια βολή που περιγράψατε στην προηγούμενη άσκηση, απομακρύνεται από την αρχική κατακόρυφο που περνά από το κέντρο τη Γης (μην ξεχνάτε το κέντρο της Γης *δεν* κινείται ως προς τον παρατηρητή μας). Πόσο θα έχει απομακρυνθεί από την κατακόρυφο ύστερα από χρόνο t από την πτώση της; (β) Έτσι εμφανίζεται μια συνιστώσα του βάρους οριζόντια και προς τα πίσω. Δείξτε ότι η εξίσωση οριζόντιας κίνησης αν λάβει κανείς υπόψη του τη συνιστώσα αυτή του βάρους είναι $\ddot{x} = -g\Omega t$. Ολοκληρώστε τη δυο φορές με τις κατάλληλες αρχικές συνθήκες ώστε να υπολογίσετε την οριζόντια μετατόπιση της πέτρας κατά το χρόνο πτώσης της. (γ) Αφαιρέστε τη μετατόπιση του πυθμένα του πηγαδιού που βρήκατε στο βήμα (γ) της προηγούμενης άσκησης για να υπολογίσετε τη θέση πτώσης της πέτρας σχετικά με τη θέση αυτής αν δεν περιστρεφόταν η Γη. Συμφωνεί με το αποτέλεσμα του Νεύτωνα; [Απ: $\Delta x = \frac{2}{3}\Omega\sqrt{\frac{2H^3}{g}}$.]

3. **Μα…** θα πείτε, απλώς εκτελούμε τεχνάσματα με στόχο να πετύχουμε το σωστό αποτέλεσμα. Στην προηγούμενη άσκηση υπολογίσαμε στο βήμα (α) την οριζόντια απομάκρυνση υποθέτοντας ομαλή κίνηση οριζόντια και στη συνέχεια, στο βήμα (β), υπολογίσαμε την οριζόντια συνιστώσα του βάρους και επιβάλαμε επιτάχυνση στην *δήθεν* ομαλή κίνηση. Ας είμαστε λοιπόν περισσότερο συνεπείς σε αυτά που γράφουμε. (α) Αποδείξτε ότι η οριζόντια συνιστώσα του βάρους όταν η πέτρα θα έχει μετακινηθεί οριζόντια κατά x θα είναι $F_x = -mgx/R$ (υποθέτουμε ότι η απόσταση από το κέντρο της Γης παραμένει σταθερή αφού το πηγάδι δεν είναι

πολύ βαθύ). Γράψτε την εξίσωση κίνησης κατά τον x-άξονα και, βάζοντας τις σωστές αρχικές συνθήκες που υπολογίσατε στην άσκηση 1, αποδείξτε ότι η λύση είναι $x(t) = \frac{\Omega R}{\sqrt{g/R}} \sin(t\sqrt{g/R})$. (β) Βάλτε στη θέση του χρόνου το συνολικό χρόνο πτώσης της πέτρας που υπολογίσατε στην άσκηση 1β, αφαιρέστε, όπως πάντα, τη μετατόπιση του πυθμένα και… ορίστε το αποτέλεσμα της ζητούμενης συνολικής μετατόπισης της πέτρας από την κατακόρυφο. Το αποτέλεσμα μοιάζει πολύ διαφορετικό από όλα τα προηγούμενα! Παρατηρήστε ότι η γωνία μέσα στο ημίτονο είναι πολύ πολύ μικρή, οπότε μπορείτε να αναπτύξτε το ημίτονο. (γ) Αρχικά κρατήστε μόνο τον πρώτο όρο. Το αποτέλεσμα θα είναι αυτό του Νεύτωνα (της άσκησης 1). Κρατήστε και τον δεύτερο όρο του αναπτύγματος. Η απάντηση (ίδια με αυτή της άσκησης 2) είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με το προηγούμενο αποτέλεσμα. Τώρα που αρχίσατε να είστε καχύποπτοι δοκιμάστε μήπως πρέπει να κρατήσετε και τον τρίτο όρο του αναπτύγματος. Είναι χρήσιμος ή μήπως είναι ανώτερης τάξης; Ποιο είναι λοιπόν το σωστό αποτέλεσμα σε πρώτη προσέγγιση;

4. **Μα ποιο είναι τελικά το σωστό αποτέλεσμα;** Με το πρόβλημα αυτό μάλλον άρχισε να κλονίζετε η εμπιστοσύνη μας στο τι θα πρέπει να θεωρούμε μικρό και αμελητέο και τι μεγάλο και χρήσιμο. Δεν αισθανόμαστε σιγουριά σχετικά με το ποια μεγέθη πρέπει να λάβουμε υπόψη μας και ποια όχι. (Όσο για τη μεταβολή του g καθώς πέφτει η πέτρα δεν θα τη συμπεριλάβουμε, αφού όπως αποδεικνύεται οδηγεί σε διορθώσεις ανώτερης τάξης.) Ας ξεφύγουμε λοιπόν από την θεώρηση του Νεύτωνα και ας λύσουμε το πρόβλημά μας στο μη αδρανειακό σύστημα της Γης – άλλωστε γιατί να μην χρησιμοποιήσουμε τις γνώσεις μας όσον αφορά τα μη αδρανειακά συστήματα. (α) Δείξτε ότι η δύναμη Coriolis στην πέτρα καθώς αυτή κατευθύνεται προς τα κάτω, και το πηγάδι μαζί με τη Γη γυρίζει από τα αριστερά προς τα δεξιά στο σχήμα μας, έχει τη φορά που φαίνεται στο σχήμα και μέτρο $F_x = 2m\Omega v_y$. Υπολογίστε την κατακόρυφη ταχύτητα της πέτρας v_y ωσάν να επρόκειτο για απλή κατακόρυφη πτώση και στη συνέχεια ολοκληρώστε την εξίσωση κίνησης για την οριζόντια κίνηση (διπλή ολοκλήρωση) ώστε να υπολογίστε την οριζόντια μετατόπιση της πέτρας συναρτήσει του χρόνου. Προσέξτε ότι οι αρχικές συνθήκες εδώ είναι διαφορετικές· στο σύστημα της Γης η πέτρα είναι αρχικά ακίνητη. Τέλος θέστε το συνολικό χρόνο πτώσης της πέτρας στη συνάρτηση της οριζόντιας θέσης και ιδού η ζητούμενη μετατόπιση. Ίδια με της άσκησης 2 και της άσκησης 3 (με τον δεύτερο όρο του αναπτύγματος).



5. **Δίχως το Νεύτωνα και τα μη αδρανειακά συστήματα:** Ας ξεκινήσουμε κάπως διαφορετικά. Ας αποφύγουμε τη θεώρηση του Νεύτωνα που όπως είδαμε μας έμπλεξε πολύ και μας δημιούργησε ανασφάλεια σχετικά με το τι είναι και τι δεν είναι σημαντικό. Ας ξεχάσουμε και τα μη αδρανειακά συστήματα που ξέρουμε ότι περιγράφουν τα συστήματα βάσει ψευδοδυνάμεων. Υπάρχει καμιά διατηρήσιμη ποσότητα για την πέτρα; Βεβαίως, η στροφορμή της εφόσον κινείται σε πεδίο κεντρικών δυνάμεων. (α) Δείξτε ότι η διατήρηση της στροφορμής επιβάλει $\Omega R^2 = \omega(R-y)^2$, όπου ω η γωνιακή ταχύτητα περιφοράς της πέτρας γύρω από το κέντρο της Γης. Η πτώση κατά y της πέτρας μέσα στο βαρυτικό πεδίο της Γης δίνετε

με απαράμιλλη ορθότητα για μικρά βάθη από το γνωστό από το Λύκειο τύπο $y = gt^2 / 2$. (β) Ολοκληρώστε τη γωνιακή ταχύτητα $\int \omega dt$, αφού αναπτύξτε την ω σε όρους τάξης $(y/R)^k$, για να βρείτε τη *γωνιακή μετατόπιση* που θα έχει υποστεί η πέτρα μέχρι να φθάσει στον πυθμένα του πηγαδιού. (γ) Υπολογίστε και τη γωνιακή μετατόπιση του πυθμένα του πηγαδιού καθ' όλο αυτό το χρονικό διάστημα. (δ) Η διαφορά των δύο γωνιακών μετατοπίσεων πολλαπλασιασμένη με την ακτινική θέση του πυθμένα $R - H$, θα δόσει την πολυσυζητημένη μετατόπιση της πέτρας. Αποφασίστε μέχρι ποιας τάξης όρους πρέπει να κρατήσετε και γράψτε το αποτέλεσμα. Μήπως τώρα νοιώθετε περισσότερη σιγουριά για το σωστό αποτέλεσμα;

6. **Υπολογίστε το σχήμα της επιφάνειας της Γης**. Θεωρήστε ότι στην επιφάνεια του πλανήτη το βαρυτικό πεδίο είναι $-GM\frac{\vec{r}}{r^3}$. Αποδείξτε ότι $R_e - R_p = \frac{\Omega^2 R_e^3 R_p}{2GM}$, ($R_e$ η απόσταση του ισημερινού από το κέντρο του πλανήτη και R_p η απόσταση του πόλου από το κέντρο του πλανήτη). Εκτιμήστε τη διαφορά $R_e - R_p$, θεωρώντας ότι $R_e \approx R_p = 6400$ km. Δίδεται η μάζα του πλανήτη $M = 6\times10^{24}$ kg, $G = 6.67\times10^{11}\ Nm^2/kg^2$ και $\Omega = \frac{2\pi}{24\times3600}\ s^{-1}$.

7. **Υπολογισμός της πίεσης στο κέντρο ανεμοστρόβιλου**. Οι ανεμοστρόβιλοι είναι ισχυρότατοι, εντοπισμένοι, σχεδόν κατακόρυφοι, στρόβιλοι που επιφέρουν στα 30 min, που είναι η τυπική διάρκεια ζωής τους, τεράστιες καταστροφές. Μέχρι σήμερα η διαδικασία δημιουργίας τους είναι άγνωστη. Αποδείξτε ότι η πίεση στο έδαφος στο κέντρο του ανεμοστρόβιλου είναι $p = p_0 \exp\left(-\frac{\omega^2 r_0^2}{2R_* T}\right)$, όπου p_0 η πίεση στο έδαφος σε απόσταση r_0 από το κέντρο και T η θερμοκρασία. Ο στρόβιλος θεωρείται ισόθερμος. Εάν η θερμοκρασία έχει παρατηρηθεί ότι είναι 288K, και σε ακτίνα $r_0 = 100m$ η πίεση στο έδαφος είναι 1000mb, και η ταχύτητα του ανέμου $100\, ms^{-1}$, ποια είναι η κεντρική πίεση; (Για τον αέρα η τιμή της σταθεράς του αερίου είναι $R_* = R/M = 287\ JK^{-1}kg^{-1}$, όπου M η γραμμομοριακή μάζα του αέρα).