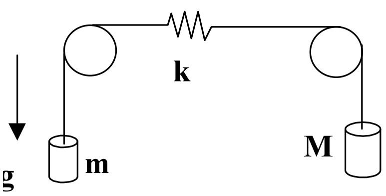
Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτος 5/4/00

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΙΙ (ΣΕΙΡΑ Στ΄)

1. Κατασκευάστε τον πίνακα στροφής κατά π/2 γύρω από τον άξονα-x και τον άξονα-y και στη συνέχεια δείξτε ότι η σειρά με την οποία γίνονται οι στροφές αυτές είναι καθοριστική στο τελικό αποτέλεσμα. Υπολογίστε τη γωνία στροφής και τον άξονα γύρω από τον οποίο συμβαίνει αυτή και ισοδυναμεί με τις παραπάνω διαδοχικές στροφές.



2. Υπολογίστε το μεταθέτη $\left[\hat{n}\cdot\vec{\mathbf{S}},\hat{m}\cdot\vec{\mathbf{S}}\right]$.

3. Βρείτε τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης του συστήματος του σχήματος.

4. Ο τελεστής της απειροστής στροφής $d\phi$ γύρω από άξονα με κατεύθυνση αυτή του μοναδιαίου διανύσματος $\hat{n}$ είναι ο $R_{ij} = \delta_{ij} + \varepsilon_{ikj} n_k d\phi$. Δείξτε ότι με αλλεπάλληλες τέτοιες απειροστές στροφές καταλήγει κανείς σε μια πεπερασμένη στροφή ίση με το $\int\left|\vec{\Omega}\right|dt$, εφόσον οι απειροστές στροφές γίνονται όλες γύρω από τον ίδιο άξονα (η $\vec{\Omega}$ δεν αλλάζει κατεύθυνση). [Υπόδειξη: τεμαχίστε το χρόνο σε απειροστά χρονικά διαστήματα τέτοια ώστε η απειροστή γωνία που αντιστοιχεί σε κάθε χρονικό διάστημα να είναι η ίδια: $\left|\vec{\Omega}(t_1)\right|dt_1 = \left|\vec{\Omega}(t_2)\right|dt_2 = \left|\vec{\Omega}(t_3)\right|dt_3 = \ldots$] Για να το δείξετε σχηματίστε τον πίνακα $A_{ij} = \varepsilon_{ikj} n_k$ καθώς και τη δεύτερη και τρίτη δύναμη αυτού. Θα δείτε ότι $A = -A^3 = A^5 \ldots$ και $A^2 = -A^4 = A^6 \ldots = n_i n_j - \delta_{ij}$. Οι περιττοί όροι προστιθέμενοι θα δώσουν το ημιτονοειδές κομμάτι του πίνακα της γενικής στροφής, ενώ οι υπόλοιποι το αντίστοιχο συνημιτονοειδές. Προσέξτε ότι

$$\cos(N\Delta\phi) + i\sin(N\Delta\phi) = e^{iN\Delta\phi} = \left(e^{i\Delta\phi}\right)^N = (1+i\Delta\phi)^N =$$

$$\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}(i\Delta\phi)^k = \left[\sum_{k=0}^{N/2}\binom{N}{2k}\left(-\Delta\phi^2\right)^k\right] + i\Delta\phi\left[\sum_{k=0}^{N/2-1}\binom{N}{2k+1}\left(-\Delta\phi^2\right)^k\right]$$

Τα τελευταία αυτά αθροίσματα θα σας χρειαστούν για να εκφράσετε τη δράση των αλλεπάλληλων στροφών.

5. Ένα αντικείμενο στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα η οποία εξαρτάται από το χρόνο ως ακολούθως:

$$\vec{\Omega}(t) = \frac{\pi}{4}\left|\sin t\right| \times \begin{cases} \hat{x}, & \text{αν } 2k\pi \le t < (2k+1)\pi \\ \hat{y}, & \text{αν } (2k+1)\pi \le t < (2k+2)\pi \end{cases},$$

όπου k φυσικός αριθμός. Υπολογίστε τον αντίστοιχο πίνακα στροφής σε κάθε περίοδο σταθερής κατεύθυνσης και στη συνέχεια υπολογίστε μετά από πόσο χρόνο το αντικείμενο θα επιστρέψει στην αρχική του θέση.

6. Σε ένα διδιάστατο χώρο ορίζουμε την ακόλουθη «στροφή» των διανυσμάτων του χώρου: $\vec{r}\,' = \mathbf{R}(\theta)\vec{r}$ με

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cosh\theta & -\sinh\theta \\ -\sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}.$$

Ισχύει ότι $\mathbf{R}(\theta_1)\mathbf{R}(\theta_2) = \mathbf{R}(\theta_1+\theta_2)$; Δείξτε ότι οι στροφές αυτές διατηρούν αναλλοίωτο το $(r_1)^2 - (r_2)^2$ αντί του γνωστού μέτρου $(r_1)^2 + (r_2)^2$. Οι κλασικές στροφές του ευκλείδειου χώρου είναι τέτοιες ώστε αν στρίψουμε με τον ίδιο τρόπο δύο διανύσματα το εσωτερικό τους γινόμενο να παραμείνει αναλλοίωτο. Ακολουθώντας αυτή τη συνταγή, πώς θα ορίζατε το εσωτερικό γινόμενο στον ιδιόμορφο αυτό χώρο; Κατασκευάστε τον πίνακα απειροστών στροφών στο χώρο αυτό και στη συνέχεια τον γεννήτορα των στροφών. Υπολογίστε το $d\mathbf{R}/d\theta$. Επιβεβαιώστε ότι $\mathbf{R}(\theta)=e^{\mathbf{S}\theta}$ όπου $\mathbf{S}$ ο γεννήτορας των στροφών. Μετά από μια απείρως μεγάλη στροφή τη μορφή παίρνει ένα διάνυσμα; Ένα διάνυσμα της μορφής (α,α) πώς μετασχηματίζεται μετά από μια τυχαία στροφή;

Αν το στοιχείο 1-2 (το πάνω δεξιά) του πίνακα της στροφής ήταν διαιρεμένο με το τετράγωνο ενός εκπληκτικά μεγάλου αριθμού c θα μπορούσατε να αναδιαμορφώσετε λίγο τη μορφή των διανυσμάτων ώστε να επιστρέψει ο πίνακας στη συμμετρική του μορφή και να ισχύουν όλες οι παραπάνω πανέμορφες ιδιότητες των ιδιόμορφων αυτών στροφών; Προτού σκεφθεί κανείς τον νέο αυτό τρόπο γραφής των διανυσμάτων τι θα πίστευε για τη δράση ενός τέτοιου πίνακα απειροστής στροφής στα διανύσματα και ειδικά για την πρώτη συνιστώσα αυτών; Θα την θεωρούσε μήπως απόλυτη και ανεξάρτητη του καινούριου στραμμένου συστήματος αναφοράς; Για τη δεύτερη συνιστώσα τι θα ίσχυε μετά από μια τέτοια απειροστή στροφή;

Όπως θα έχετε ήδη διαπιστώσει ο χώρος που περιγράψαμε είναι ο χώρος του Minkowski (για την ακρίβεια μια διδιάστατη φέτα αυτού) και οι στροφές αντιπροσωπεύουν τους μετασχηματισμούς Lorentz. Δεν έχετε παρά να ονομάσετε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{r}$ (t,x) και έχετε αμέσως μπροστά σας τους γνωστούς από τη σχετικότητα μετασχηματισμούς των χωροχρονικών συντεταγμένων από το ένα αδρανειακό σύστημα στο άλλο. Αν μάλιστα έχετε ακόμη αμφιβολίες για το τι νόημα έχει η παράμετρος θ χρησιμοποιήστε το μετασχηματισμό της δεύτερης συνιστώσας σε απειροστό μετασχηματισμό και ενθυμούμενοι το πείραμα του Γαλιλαίου δώστε στην θ το φυσικό της νόημα.

Αν τελικά οι μετασχηματισμοί Lorentz δεν είναι τίποτε άλλο από γενίκευση των στροφών στον τετραδιάστατο χωρόχρονο (απλές ευκλείδειες στροφές όταν αναφέρονται στις τρεις χωρικές συνιστώσες και ιδιόμορφες στροφές σαν της άσκησής μας όταν αφορούν και τη χρονική συνιστώσα) τα διάφορα αδρανειακά συστήματα δεν είναι τίποτε άλλο παρά στραμμένα χωροχρονικά συστήματα. Η γαλιλαϊκή λοιπόν σχετικότητα που γενικεύεται στην αρχή της ισοδυναμίας: «όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς είναι ισοδύναμα για την περιγραφή της φύσης» αντιμετωπίζει τον τετραδιάστατο χωρόχρονο ως ομογενή και ισότροπο προς *όλες* τις κατευθύνσεις (δεν εξαρτάται ούτε από την κατεύθυνση των χωρικών αξόνων ούτε από τις ταχύτητες (τις νέες στροφές) των συστημάτων αναφοράς). Το αντίστοιχο της δράσης σε ένα τέτοιο χώρο θα είναι η ποσότητα $\int L\left(x^{\mu}, dx^{\mu}/d\tau\right)d\tau$, όπου το τ είναι ο ιδιόχρονος κατά μήκος της κοσμικής γραμμής του σωματιδίου, αφού αυτός είναι ανεξάρτητος του συστήματος αναφοράς, έχει δηλαδή απόλυτο νόημα. Εφόσον ο χωρόχρονος είναι ομογενής και ισότροπος ως προς όλες τις κατευθύνσεις από τι δεν θα εξαρτάται η Λαγκρανζιανή ενός ελευθέρου σωματίου; Αφού $\left(dx^{\mu}/d\tau\right)\left(dx_{\mu}/d\tau\right)=-c^{2}$ η μοναδική μεταβλητή από την οποία θα μπορεί να εξαρτάται η Λαγκρανζιανή είναι εξαρτημένη από το μέτρο της ταχύτητας, συνεπώς δεν είναι δυνατόν να εξαρτάται ούτε από αυτή. Τι απομένει λοιπόν να είναι η Λαγκρανζιανή;