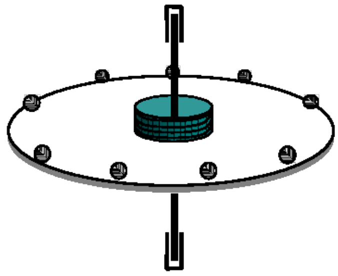
Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτος 27/3/2000

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΙΙ (Ε΄ ΣΕΙΡΑ)

1. Αβαρές σχοινί περνά γύρω από αβαρή τροχαλία που είναι στηριγμένη στην οροφή. Στη μία άκρη του σχοινιού είναι δεμένες μπανάνες μάζας M ενώ στην άλλη άκρη, πίθηκος μάζας M αναρριχάται με σκοπό να φθάσει τις μπανάνες. Η σχετική μετατόπιση του πιθήκου ως προς την άκρη του σχοινιού είναι $\varphi(t)$ με αρχικές συνθήκες $\varphi(0)=\dot{\varphi}(0)=0$. Γράψτε τη Λαγκρανζιανή συνάρτηση του συστήματος και μελετήστε τη κίνηση. Ποιες οι διατηρούμενες ποσότητες και ποία η φυσική σημασία των. Θα φθάσει ο πίθηκος τις μπανάνες;
2. Θεωρήστε τη Λαγκρανζιανή ελευθέρου σωματιδίου στο ιδιόμορφο σύμπαν που συναντήσαμε σε προηγούμενο φυλλάδιο ασκήσεων, στο οποίο η ισοτροπία περιορίζεται σε διευθύνσεις μόνο γύρω από τον άξονα-z. Σκεφθείτε ποιοι μετασχηματισμοί συντεταγμένων αποτελούν συμμετρίες της Λαγκρανζιανής και στη συνέχεια βρείτε τις αντίστοιχες διατηρούμενες ποσότητες.
3. Κατασκευάστε τις *ισοδρασικές καμπύλες* (τις καμπύλες σταθερής δράσης) σε ένα διάγραμμα x-t, για ένα ελεύθερο σωματίδιο που κινείται σε μία διάσταση και τη χρονική στιγμή $t=0$ βρισκόταν στη θέση $x=0$. Στο διάγραμμα αυτό, μόνο τις φυσικές διαδρομές που μπορεί να ακολουθήσει το σωματίδιο έχει νόημα να σχεδιάσει κανείς. Γιατί; Αν τώρα θεωρήσουμε έναν απειροστό μετασχηματισμό της θέσης και του χρόνου $x\rightarrow x(1+\varepsilon/2)$, $t\rightarrow t(1+\varepsilon)$ η δράση δεν μεταβάλλεται σε πρώτη τάξη ως προς ε. Δείξτε το, υπολογίζοντας απευθείας τη μεταβολή της δράσης ελευθέρου σωματιδίου σε πρώτη τάξη ως προς ε. Εφόσον ο μετασχηματισμός αυτός αφήνει αναλλοίωτη τη δράση, υπολογίστε την αντίστοιχη διατηρούμενη ποσότητα. Τι είναι αυτή η διατηρούμενη ποσότητα;
4. Θεωρείστε μια Λαγκρανζιανή της μορφής $L=a\left(\frac{\dot{x}}{x}\right)^2$. Είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι η Λαγκρανζιανή αυτή είναι συμμετρική σε μετασχηματισμούς της μορφής $x\rightarrow x+\varepsilon x$. Υπολογίστε την αντίστοιχη διατηρούμενη ποσότητα και στη συνέχεια βρείτε μέσω αυτής την εξίσωση κίνησης. Δοκιμάστε να βρείτε την εξίσωση κίνησης από την εξίσωση Euler-Lagrange. Ποιος είναι ο ευκολότερος τρόπος;
5. Δύο σωματίδια είναι δεσμευμένα να κινούνται στην επιφάνεια μιας σφαίρας με ακτίνα 1. Τα δύο σωματίδια είναι συνδεδεμένα μεταξύ τους με ελατήριο σταθεράς k και φυσικού μήκους 0. Γράψτε τη Λαγκρανζιανή του συστήματος σε σφαιρικές συντεταγμένες και δείξτε ότι είναι συμμετρική σε μετασχηματισμούς των αζιμουθιακών γωνιών $\phi_i\rightarrow\phi_i+\varepsilon$, όπου $i=1,2$ ο δείκτης του εκάστοτε σωματιδίου. Ποια είναι η αντίστοιχη διατηρούμενη ποσότητα; Ποια η φυσική της σημασία;
6. Η εξίσωση κίνησης του ισότροπου αρμονικού ταλαντωτή με απόσβεση: $m\ddot{\vec{x}}+\gamma\dot{\vec{x}}+k^2\vec{x}=0$ είναι αναλλοίωτη στις στροφές. Διατηρείται η στροφορμή $\vec{M}=\vec{x}\times\vec{p}$; Γράψτε την εξίσωση εξέλιξης της στροφορμής και λύστε την. Αποδείξτε ότι μια Λαγκρανζιανή που παράγει τη δυναμική του συστήματος είναι η $L=\frac{e^{\gamma t/m}}{2}\left(m\,|\,\dot{\vec{x}}\,|^2-k^2\,|\,\vec{x}\,|^2\right)$. Με το θεώρημα της Noether προσδιορίστε τη διατηρητέα ποσότητα.

7. Δύο σωματίδια αλληλεπιδρούν με Νευτώνειο δυναμικό και βρίσκονται υπό την επίδραση εξωτερικού δυναμικού τις μορφής $U(r, z-a\theta)$ (όπου (r,θ,z) κυλινδρικές συντεταγμένες). Γράψτε την Λαγκρανζιανή και προσδιορίστε τις διατηρούμενες ποσότητες.
8. Ο Feynman, στο περίφημο βιβλίο του "*Lectures on Physics*" περιγράφει το εξής παράδοξο: Ένας δίσκος μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από τον κατακόρυφο άξονά του. Στην περιφέρεια του δίσκου και σε σταθερή απόσταση, η μια από την άλλη, τοποθετούνται μια σειρά από όμοιες φορτισμένες σφαίρες. Στο κέντρο του δίσκου είναι στερεωμένο ένα πηνίο από υπεραγώγιμο υλικό το οποίο διαρρέεται από ρεύμα. Ανυψώνοντας τη θερμοκρασία του περιβάλλοντος το υπεραγώγιμο πηνίο αποκτά αντίσταση οπότε σύντομα το ρεύμα καταργείται. Το πρώην σταθερό μαγνητικό πεδίο αλλάζει και το γεγονός αυτό συνεπάγεται την εμφάνιση ηλεκτρικού πεδίου που ασκώντας ροπή στις φορτισμένες σφαίρες θέτει το δίσκο σε περιστροφή. Από την άλλη πλευρά η στροφορμή του δίσκου θα πρέπει να μην μεταβάλλεται από τη στιγμή που δεν υπάρχει εξωτερικό πεδίο δυνάμεων. Θα αρχίσει λοιπόν να περιστρέφεται ο δίσκος ή όχι; Αντιμετωπίστε το πρόβλημα ως εξής: (α) Θεωρήστε τον δίσκο και το πηνίο αβαρή και υποθέστε ότι όλη η μάζα του συστήματος βρίσκεται στις φορτισμένες σφαίρες οι οποίες είναι τοποθετημένες στην περιφέρεια του δίσκου. Γράψτε σε κυλινδρικές συντεταγμένες τη Λαγκρανζιανή του συστήματος λαμβάνοντας υπόψη την αξονική συμμετρία του και αγνοώντας το ηλεκτρικό πεδίο των σφαιρών το οποίο εξάλλου θα παρέμενε σταθερό κατά την περιστροφή του δίσκου αν αντικαθιστούσαμε τις σφαίρες με ένα συνεχή φορτισμένο δακτύλιο. (β) Η γωνία περιστροφής είναι κυκλική μεταβλητή. Ποια ποσότητα διατηρείται ως επακόλουθο; (γ) Διατηρείται η στροφορμή; Τι θα συμβεί όταν το ανυσματικό δυναμικό, μαζί με το μαγνητικό πεδίο εξαφανισθεί;



9. Προσδιορίστε τη συχνότητα ταλαντώσεως ενός φορτισμένου ταλαντωτή που βρίσκεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$. Όταν απουσιάζει το πεδίο η συχνότητα ταλαντώσεων είναι ω_0.
10. α) Υπολογίστε τις ποσότητες $\delta_{ik}\varepsilon_{ikm}$, $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijl}$, $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk}$. β) Κάνοντας χρήση δεικτών αποδείξτε τη ταυτότητα: $\frac{1}{2}\vec{\nabla}(\vec{u}\cdot\vec{u}) = (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} + \vec{u}\times\vec{\omega}$, όπου $\vec{\omega} = \vec{\nabla}\times\vec{u}$.