Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτος 20/3/00

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΙΙ (ΣΕΙΡΑ Δ΄)

1. Το νήμα ενός εκκρεμούς που εκτελεί επίπεδη κίνηση στο σταθερό πεδίο βαρύτητας της Γης είναι δεμένο στο υψηλότερο σημείο μιας ακλόνητης (μη περιστρεφόμενης) τροχαλίας ακτίνας R. Το μήκος του νήματος του εκκρεμούς είναι $l > \pi R/2$ έτσι ώστε να κρέμεται ένα μέρος του πέρα από την τροχαλία.. Εάν στο άκρο του αβαρούς νήματος είναι προσαρτημένη σημειακή μάζα m να γραφεί η Λαγκρανζιανή συνάρτηση που διέπει τη κίνησή της. Υπολογίστε τη συχνότητα μικρών ταλαντώσεων περί του σημείου ισορροπίας της.

2. Μηχανικό σύστημα n βαθμών ελευθερίας έχει μέγιστη ιδιοσυχνότητα ω_n και ελάχιστη ιδιοσυχνότητα ω_1. Το σύστημα περιορίζεται με την επιβολή κάποιων συνδέσμων έτσι ώστε να έχει k βαθμούς ελευθερίας με $k < n$. Το περιορισμένο μηχανικό σύστημα έχει μέγιστη ιδιοσυχνότητα ω'_{n-k} και ελάχιστη ω'_1. Χρησιμοποιείστε την αρχή Rayleigh-Ritz για να αποδείξτε ότι $\omega_1 \le \omega'_1$ και $\omega'_{n-k} \le \omega_n$.

3. Αλυσίδα μοναδιαίου μήκους έχει στερεωμένο το άνω άκρο της, ενώ το κάτω άκρο της είναι ελεύθερο. Η αλυσίδα βρίσκεται στο πεδίο βαρύτητας και εκτελεί μικρές ταλαντώσεις σε κάποιο κατακόρυφο επίπεδο. Το πλάτος της ταλάντωσης, που ορίζεται ως η απόσταση κάθε σημείου της αλυσίδας από το αντίστοιχο σημείο όταν η αλυσίδα είναι κατακόρυφη, είναι $y(z,t)$ (z η απόσταση από το κατώτερο σημείο). Η τάση της αλυσίδας σε κάθε σημείο αυτής είναι $T(z) = \rho g z$ εξαιτίας του βάρους του κομματιού της αλυσίδας κάτω από το σημείο αυτό (ρ είναι η σταθερή γραμμική πυκνότητα της αλυσίδας). Ακριβώς στο κάτω άκρο της αλυσίδας η τάση είναι μηδενική. Γράψτε τη Λαγκρανζιανή πυκνότητα της αλυσίδας και συνάγετε καθιστώντας τη δράση ακρότατη την εξίσωση κίνησης της αλυσίδας. (Οι συνοριακές συνθήκες είναι $y(1,t) = 0$ και $y(0,t)$ πεπερασμένο). Θέλουμε να βρούμε τις συχνότητες των πρώτων δύο θεμελιωδών ταλαντώσεων της αλυσίδας. Θεωρούμε λοιπόν ότι όλα τα τμήματα της αλυσίδας κινούνται με την ίδια συχνότητα: $y(z,t) = \varphi(z)\cos(\omega t)$. Αποδείξτε τότε ότι οι ιδιοσυχνότητες δίνονται από τα ακρότατα του εξής πηλίκου Rayleigh:

$$\omega^2 = \frac{(\varphi', T\varphi')}{(\varphi, \rho\varphi)},$$

όπου $\varphi' = \dfrac{d\varphi}{dz}$ και το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται ως $(f,g) = \int_0^1 f^*(z) g(z)\,dz$.

Αποδείξτε ότι οι κανονικές συχνότητες είναι πραγματικές καθώς και οι ιδιοσυναρτήσεις. Ποιος ο νόμος ορθογωνιότητας των ιδιοσυναρτήσεων. Για να προσεγγίστε τις πρώτες δύο θεμελιώδεις ταλαντώσεις υποθέστε ότι $\varphi(z) = (1-z)(1+\alpha z)$ και ελαχιστοποιείστε το πηλίκο Rayleigh ως προς α. Σχεδιάστε τις πρώτες δύο θεμελιώδεις ταλαντώσεις. Η ακριβής τιμή της πρώτης θεμελιώδους ταλάντωσης είναι $\omega_1^2 = 1.44587\dfrac{g}{l}$, όπου l το μήκος της αλυσίδας. Ποία είναι η ακρίβεια της προσεγγιστικής λύσης;

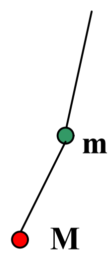
4. Θεωρήστε μία χορδή μήκους l και μάζας m που βρίσκεται υπό τάση T, η οποία εκτελεί εγκάρσιες ταλαντώσεις πλάτους $y(x,t)$ με τα άκρα της ακίνητα ($y(0,t) = y(l,t) = 0$). Γράψτε την Λαγκρανζιανή πυκνότητα της χορδής και τις εξισώσεις κίνησής της. (Αγνοήστε τη δύναμη της βαρύτητας.) Αποδείξτε ότι οι κανονικές ταλαντώσεις της είναι οι $y_n(x,t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\cos(\omega_n t + \varphi)$. Προσδιορίστε την κανονική συχνότητα ω_n. Στο κέντρο της χορδής τοποθετείται σημειακή μάζα M. Γράψτε τη Λαγκρανζιανή πυκνότητα που διέπει την κίνηση μάζας και χορδής (αγνοήστε τη δύναμη της βαρύτητας). Προσδιορίστε το πηλίκο Rayleigh που δίνει τις ιδιοσυχνότητες του συστήματος. Θεωρήστε τώρα ότι κατά προσέγγιση η $\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)\cos(\omega_1 t + \varphi)$ εξακολουθεί να είναι η θεμελιώδης κανονική ταλάντωση Αποδείξτε ότι κατά προσέγγιση η αρχή Rayleigh-Ritz προβλέπει ότι η θεμελιώδης συχνότητα είναι:

$$\omega_1^2 = \pi^2 \frac{T}{ml} \frac{1}{1 + \frac{2M}{m}}.$$

Ακριβής υπολογισμός δίνει τις εξής τιμές του λόγου $\omega_1 / \sqrt{T/(ml)}$:

M/m	$\omega_1 / \sqrt{T/(ml)}$	Προσέγγιση
0	3.1416	3.1416
0.2	2.6277	2.6552
0.5	2.1542	2.2115
1	1.7198	1.8138
5	0.8657	0.9375

5. Η κίνηση του επίπεδου διπλού εκκρεμούς (δύο αβαρείς ράβδοι μήκους l, οι οποίες κρέμονται η μία κάτω από την άλλη, και στα άκρα των οποίων είναι αναρτημένες μάζες m, M) χαρακτηρίζεται από τη γωνία φ που σχηματίζει η πρώτη ράβδος με την κατακόρυφο και από τη γωνία ϑ που σχηματίζει η δεύτερη ράβδος με την κατακόρυφο. Το σύστημα έχει 4 σημεία ισορροπίας (ποια;) Προσδιορίστε τις χαρακτηριστικές ταλαντώσεις και την ευστάθεια της θέσης ισορροπίας $\varphi = 0$, $\vartheta = \pi$. Σχεδιάστε τις χαρακτηριστικές ταλαντώσεις σε αυτή την περίπτωση και εξηγήστε τη συμπεριφορά τους.



6. Τρεις ίδιες μάζες μπορούν να κινούνται ελεύθερα πάνω σε μια κυκλική στεφάνη ακτίνας R. (Η βαρύτητα απουσιάζει.) Μεταξύ κάθε ζεύγους μαζών υπάρχει ένα πανομοιότυπο ελατήριο σταθεράς k και φυσικού μήκους $2\pi R/3$ που συνδέει τις δύο μάζες. Να βρεθούν οι ιδιοσυχνότητες του συστήματος. Ποιο το φυσικό νόημα μηδενισμού της μιας ιδιοσυχνότητας; Περιγράψτε τις χαρακτηριστικές ταλαντώσεις του συστήματος.