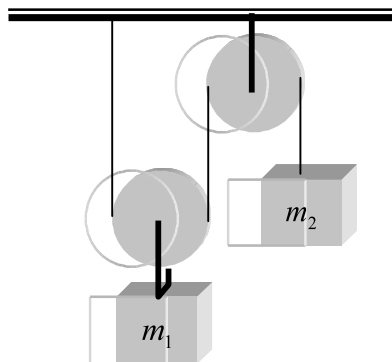


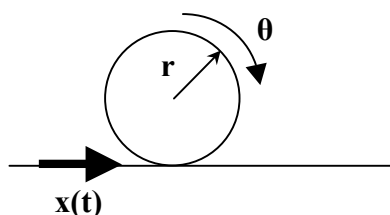
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΙΙ (ΣΕΙΡΑ Γ')

1. Μηχανές του Atwood είναι συστήματα που αποτελούνται από ιδανικές αβαρείς τροχαλίες, αβαρή σχοινιά και μάζες που συνδέονται π.χ. όπως στο σχήμα:



Για τη παραπάνω μηχανή του Atwood γράψτε την Λαγκρανζιανή συνάρτηση που διέπει την δυναμική της. Ποια η επιτάχυνση της μάζας m_2 ;

2. Κυκλικός δακτύλιος ακτίνας r κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει πάνω σε οριζόντιο δάπεδο που κινείται παράλληλα με τον εαυτό του κατά $x(t)$ όπως στο σχήμα:



Η μάζα του δακτυλίου, m , είναι συγκεντρωμένη στη περιφέρειά του. Προσδιορίστε το λόγο της μετατόπισης του κέντρου μάζας του δακτυλίου προς τη μετατόπιση του δαπέδου. Θεωρείστε τώρα ένα νόμισμα με την ίδια συνολική μάζα, m , την ίδια ακτίνα, r , και το ίδιο κέντρο μάζας, αλλά με τη μάζα κατανεμημένη ώστε η περιστροφική κινητική ενέργεια να είναι $K_\theta = \frac{1}{2} m' r^2 \dot{\theta}^2$, με $m' < m$. Προσδιορίστε

το νέο λόγο μετατόπισης του κέντρου βάρους προς τη μετατόπιση του δαπέδου. Τι θα συμβεί στις δύο περιπτώσεις αν τοποθετηθούν δύο δακτύλιοι διαφορετικής ακτίνας, ο ένας δίπλα στον άλλο, στο κινούμενο δάπεδο; Μπορείτε να κάνετε το πείραμα;

3. Η Λαγκρανζιανή ενός συστήματος είναι $L = A_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j$ (υπονοείται η αθροιστική σύμβαση). Ναδειχθεί ότι αν ο πίνακας A_{ij} είναι συμμετρικός η L διατηρείται κατά την κίνηση. Ναδειχθεί περαιτέρω ότι για κάθε συνάρτηση, $f(x)$, ότι η L και $f(L)$ παράγουν την ίδια φυσική κίνηση. Στις περιπτώσεις αυτές οι δυναμικές εξισώσεις μπορούν να παραχθούν από μια πολύ γενικευμένη κλάση Λαγκρανζιανών.

4. Θεωρούμε ένα σύστημα n ελευθέρων σωματιδίων (που δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους). Τα σωματίδια δεσμεύονται με $3n - k$ σκληρόνομους ολονομικούς δεσμούς (δηλαδή, υπάρχουν $3n - k$ σχέσεις της μορφής $f_i(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) = 0$, με $i = 1, \dots, 3n - k$)¹. Μπορούμε τότε να ορίσουμε k συντεταγμένες q_j , οι οποίες

¹ Σκληρόνομος ονομάζεται ο δεσμός που δεν εξαρτάται από το χρόνο.

προσδιορίζουν τις αρχικές συντεταγμένες μέσω σχέσεων της μορφής: $x_i = x_i(q)$. Να δειχθεί ότι η Λαγκρανζιανή δίδεται από την $L = A_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j$ (χρησιμοποιείται η αθροιστική σύμβαση). Αυτή είναι η έκφραση της κινητικής ενέργειας στις γενικευμένες συντεταγμένες q_j . Δείξτε επίσης ότι ο πίνακας $A_{ij}(q)$ είναι συμμετρικός. Σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση δείξτε ότι κατά την κίνηση διατηρείται η ενέργεια L .

Για όσους αρέσκονται να αντιμετωπίζουν τα προβλήματα από μια πιο μαθηματική σκοπιά: Ορίζουμε τώρα στο θεσεογραφικό χώρο των q το διαφορικό μήκος καμπύλης ως $ds = \sqrt{A_{ij}(q)dq_i dq_j}$. Μπορείτε να σκεφθείτε γιατί επιλέξαμε αυτή την έκφραση (στα μαθηματικά θα λέγαμε αυτή τη μετρική) για το διαφορικό μήκος; Στο θεσεογραφικό αυτό χώρο, γεωδαισιακές γραμμές είναι οι καμπύλες $q_i(\tau)$ (τ κάποια παράμετρος), οι οποίες καθιστούν το μήκος μεταξύ δύο σημείων του χώρου αυτού ακρότατο. Δείξτε ότι η τροχιά της φυσικής κίνησης μεταξύ δύο σημείων του θεσεογραφικού χώρου ταυτίζεται με τη γεωδαισιακή που τα ενώνει, και ότι το μέτρο της ταχύτητας ds/dt είναι σταθερό κατά την κίνηση. Με τον τρόπο αυτό γενικεύουμε την κίνηση ελευθέρου σωματιδίου σε οποιοδήποτε χώρο.

5. Η Λαγκρανζιανή μιας έκρηξης: Θεωρήστε ως απλουστευμένο μοντέλο μιας έκρηξης ένα σύστημα δύο μαζών που μπορούν να κινούνται πάνω σε έναν άξονα δίχως τριβές. Μεταξύ των δύο μαζών υπάρχει συμπιεσμένο ελατήριο το οποίο αυθόρμητα αφήνεται ελεύθερο να αποσυμπιεστεί μέχρι, το πολύ, το φυσικό του μήκος. Γράψτε τη Λαγκρανζιανή και υπολογίστε την κίνηση των δύο σωμάτων αν αρχικά αυτά ήταν ακίνητα. Στο όριο που η σταθερά του ελατηρίου τείνει στο άπειρο αλλά η ενέργεια του συμπιεσμένου ελατηρίου είναι δεδομένη ποια είναι η εξίσωση κίνησης; Κατόπιν του αποτελέσματος αυτού μήπως θα μπορούσατε να γράψετε τη Λαγκρανζιανή συνάρτηση του συστήματος με μόνο τις κινητικές ενέργειες των σωμάτων με δεδομένη τη σχετική ταχύτητα των δύο σωμάτων;

6. Στηριζόμενοι στο αποτέλεσμα της προηγούμενης άσκησης γράψτε τη Λαγκρανζιανή ενός πυραύλου ο οποίος προωθείται, απουσία οποιοδήποτε πεδίου, από την εκτόξευση αερίων με σταθερό ρυθμό και σχετική ταχύτητα V . Στη συνέχεια υπολογίστε την εξίσωση κίνησης του πυραύλου.

7. Κατασκευάστε τη Λαγκρανζιανή ενός σωματιδίου το οποίο κινείται επί ευθείας υπό την επίδραση ενός δυναμικού $V(x)$ και μιας χρονοεξαρτώμενης δύναμης $F(t)$;

8. Κατασκευάστε τη Λαγκρανζιανή και στη συνέχεια υπολογίστε την κίνηση ενός συστήματος που αποτελείται από ένα δακτύλιο μάζας M και ακτίνας R ο οποίος μπορεί να κυλιέται σε οριζόντιο επίπεδο και ενός σωματιδίου μάζας m που γλιστράει χωρίς τριβές πάνω στο δακτύλιο ξεκινώντας από το ανώτερο σημείο αυτού. Πού βρίσκονται τα δύο σώματα όταν συμβαίνει ο διαχωρισμός τους;