Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτος 28/2/00

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΙΙ (ΣΕΙΡΑ Β΄)

1. Ένα σωματίδιο διασχίζοντας μια κοσμική σήραγγα (wormhole = σκουληκότρυπα) εγκαταλείπει το ισότροπο και ομογενές στο χώρο και χρόνο Σύμπαν μας και εισέρχεται σε ένα άλλο Σύμπαν το οποίο είναι ομογενές στο χώρο και το χρόνο αλλά δεν διαθέτει την ισοτροπία του δικού μας. Αντί της ισοτροπίας του δικού μας Σύμπαντος, δηλαδή του αναλλοιώτου της Λαγκρανζιανής σε οποιαδήποτε στροφή, το καινούργιο Σύμπαν είναι συμμετρικό μόνο σε στροφές γύρω από κάποιο συγκεκριμένο άξονα, ας πούμε τον άξονα-z. Κατασκευάστε τη Λαγκρανζιανή ενός ελευθέρου σωματίου στο καινούργιο αυτό Σύμπαν. (Θεωρείστε επίσης ότι το νέο Σύμπαν είναι αναλλοίωτο και στους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου.)

2. Θεωρήστε τη Λαγκρανζιανή $L = \frac{1}{2} e^{(\gamma t/m)} \left(m\dot{x}^2 - kx^2 \right)$. Γράψτε την εξίσωση κίνησης και λύνοντάς τη, περιγράψτε την κίνηση για διάφορες τιμές των παραμέτρων. Τι φυσικό σύστημα περιγράφει η Λαγκρανζιανή;

3. Φυσικό σύστημα περιγράφεται με τη μονοδιάστατη Λακρανζιανή $L(q,\dot{q},t)$. Έστω τώρα μια νέα συντεταγμένη $q' = f(q,t)$. Η Λαγρανζιανή του φυσικού συστήματος στις νέες συντεταγμένες δίδεται από τη Λαγρανζιανή συνάρτηση L' η οποία ορίζεται ως :

$$L(q,\dot{q},t) = L'(q',\dot{q}',t) = L'\left(f(q,t), \frac{\partial f(q,t)}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial f(q,t)}{\partial t}, t \right).$$

Δείξτε ότι:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial f}{\partial q}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q'} \right].$$

Τι συμπεραίνετε;

4. Αποδείξαμε στην τάξη, χρησιμοποιώντας την αρχή της ελάχιστης δράσης, ότι οι Λαγκρανζιανές L και L' που συνδέονται με το μετασχηματισμό βαθμονόμησης (βαθμίδας):

$$L'(x,\dot{x},t) = L(x,\dot{x},t) + \frac{d}{dt} f(x,t)$$

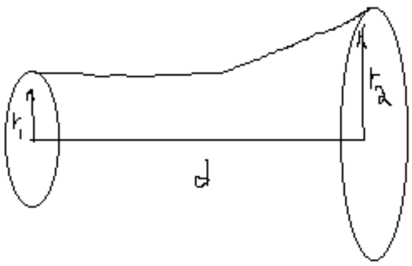
οδηγούν στις ίδιες εξισώσεις κίνησης. Δείξτε με κατευθείαν αντικατάσταση ότι η εξίσωση Euler-Lagrange για την καινούργια συνάρτηση L' οδηγεί στην ίδια εξίσωση με εκείνη για την L.

5. Αν η Λαγκρανζιανή φυσικού συστήματος δίδεται από μια συνάρτηση $L(x,\dot{x},\ddot{x},t)$ η αρχή του Hamilton γενικεύεται ως εξής: ‘οι τροχιές του συστήματος στο θεσεογραφικό χώρο $x(t)$ που ικανοποιούν τις συνθήκες $x(t_1) = x_1$ και $x(t_2) = x_2$, καθώς και $\dot{x}(t_1) = \dot{x}_1$, $\dot{x}(t_2) = \dot{x}_2$ (με $t_2 > t_1$) καθιστούν τη δράση $\int_{t_1}^{t_2} L(x,\dot{x},\ddot{x},t)dt$ ακρότατη’. Γράψτε την εξίσωση κίνησης (το αντίστοιχο της εξίσωσης Euler-Lagrange).

6. Γράψτε την έκφραση για το στοιχειώδες μήκος τόξου πάνω σε μια σφαίρα ακτίνας ίσης με 1 χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες, και στη συνέχεια ορίστε το ολοκλήρωμα που περιγράφει το μήκος μιας τυχαίας διαδρομής που ξεκινά από το σημείο $(\theta = 0, \phi = 0)$ —τον Βόρειο Πόλο— και καταλήγει στο σημείο

$(\theta = \pi/2, \phi = 0)$ —ένα σημείο του ισημερινού. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Euler-Lagrange δείξτε ότι το μήκος της διαδρομής καθίσταται ακρότατο όταν $\phi =$ σταθερό. Αυτό συνεπάγεται δύο δυνατές διαδρομές: μια κατά μήκος του μεσημβρινού $\phi = 0$ απευθείας από τον Βόρειο Πόλο προς τον Ισημερινό και μία κατά μήκος του ίδιου μεσημβρινού μέσω, όμως, του Νότιου Πόλου. Από τις δύο διαδρομές η πρώτη είναι ολικό ελάχιστο σε σχέση με κάθε άλλη δυνατή διαδρομή όπως εύκολα μπορεί να διαπιστώσει κανείς από τη μορφή του ολοκληρώματος. Η δεύτερη είναι κάποιο τοπικό ελάχιστο; Μέγιστο μήπως; [Υπόδειξη: ως εναλλακτική της δεύτερης διαδρομής θεωρήστε (α) μια διαδρομή που ακολουθεί έναν άλλο μεσημβρινό από τον Βόρειο Πόλο μέχρι τον Νότιο Πόλο και στη συνέχεια προχωρά κατά μήκος του μεσημβρινού $\phi = 0$ μέχρι το τελικό σημείο, (β) την αρχική μεγάλη διαδρομή αντικαθιστώντας όμως ένα πολύ μικρό τόξο αυτής (σχεδόν ευθύγραμμο τμήμα) με ένα μικρό ελιγμό ζιγκ-ζάγκ και (γ) τη μεγαλύτερη από τις δύο τοξοειδείς κυκλικές διαδρομές που προκύπτουν αν τμήσουμε τη σφαίρα με ένα επίπεδο που περιέχει το αρχικό και το τελικό σημείο και περνά σε μικρή απόσταση από το κέντρο της σφαίρας —σκεφτείτε ότι ο κύκλος που προκύπτει από την τομή αυτή έχει μικρότερη περιφέρεια από τον Ισημερινό και το μικρό τόξο έχει μεγαλύτερο μήκος από το ολικό ελάχιστο.]

7. Το σχήμα που παίρνουν οι σαπουνόφουσκες είναι αυτό με την ελάχιστη επιφάνεια ούτως ώστε να ελαχιστοποιηθεί η επιφανειακή ενέργεια. Σχηματίζουμε μία σαπουνόφουσκα μεταξύ δύο ομοαξονικών δακτυλίων ακτίνας r_1 και r_2 οι οποίοι βρίσκονται σε απόσταση d μεταξύ των (βλ. σχήμα). Διατυπώστε το πρόβλημα μεταβολών που διέπει το σχήμα της σαπουνόφουσκας και προσδιορίστε από αυτό το σχήμα της σαπουνόφουσκας.



8. **(Κατασκευάστε ένα βλήμα)** Δείξτε ότι ένα αξονικά συμμετρικό στερεό σώμα, δοσμένης διατομής S και μήκους L (κατά τον άξονα συμμετρίας), παρουσιάζει το πιο αεροδυναμικό σχήμα όταν η καμπύλη που εκ περιστροφής παράγει το στερεό είναι η ακόλουθη:

$$y \cos\theta \sin^3\theta = \sigma\tau\alpha\theta$$

(θ είναι η γωνία μεταξύ της εφαπτομένης της καμπύλης και του άξονα συμμετρίας.) Υπολογίστε πρώτα την αντίσταση του σώματος, που περιγράφεται από τυχαία συνάρτηση *y(x)*, όταν αυτό κινείται με ταχύτητα *v* παράλληλα με τον άξονά του μέσα σε ένα αέριο τα μόρια του οποίου θεωρήστε ακίνητα. Στη συνέχεια αναζητήστε τη συνάρτηση, μέσω των εξισώσεων Euler-Lagrange, που καθιστά την αντίσταση ελάχιστη. [Το πρόβλημα αυτό λύθηκε για πρώτη φορά από το Νεύτωνα (Principia, Scholium to Proposition XXXIV) και είναι μάλλον από τα πιο δύσκολα που κατόρθωσε να λύσει ο μεγάλος αυτός επιστήμονας. Η διάνοιά του μάλιστα γίνεται περισσότερο έκδηλη όταν καταφέρνει να υπολογίσει και την ελεύθερη παράμετρο που προκύπτει από την παραπάνω σχέση: η γωνία θ στο μπροστινό μέρος του βλήματος πρέπει να είναι 45°.]