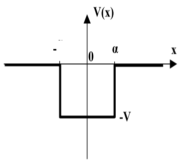
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΙΙ (Α΄ ΣΕΙΡΑ)

1. Ένας κολυμβητής ευρισκόμενος στην παραλία, σε απόσταση α από την ακροθαλασσιά, αντιλαμβάνεται ότι κάποιος πνίγεται ενώ βρίσκεται σε απόσταση β από την ακτή. Αν η παράλληλη με την ακτή απόσταση μεταξύ του κολυμβητή και του ανθρώπου που πνίγεται είναι γ και η ταχύτητα του κολυμβητή στην αμμουδιά και στη θάλασσα είναι u_1, u_2 αντίστοιχα βρείτε την συντομότερη σε χρόνο διαδρομή που πρέπει να επιλέξει ο κολυμβητής για να φτάσει στον άνθρωπο που πνίγεται. Επιβεβαιώστε ότι για την καλύτερη αυτή διαδρομή ισχύει ο νόμος του Snell για τη διάθλαση του φωτός: $\sin\theta_1 / u_1 = \sin\theta_2 / u_2$, όπου θ_1, θ_2 είναι οι γωνίες πρόσπτωσης και ανάκλασης, δηλαδή οι γωνίες των δύο ευθυγράμμων διαδρομών (εκτός και εντός θάλασσας) σε σχέση με την κάθετη στην ακτογραμμή.

2. Όταν δοκιμάσαμε να ελαχιστοποιήσουμε τη δράση για μια μπάλα που ανεβαίνει και κατεβαίνει, καταλήγοντας στο αρχικό σημείο μέσα σε χρόνο T, μέσα στο βαρυτικό πεδίο της Γης, μια από τις οικογένειες διαδρομών που δοκιμάσαμε ήταν της μορφής $h(t) = \dfrac{4at(T-t)}{T^2}$. Αναζητώντας το ελάχιστο της αντίστοιχης δράσης ως προς την ελεύθερη παράμετρο α καταλήξαμε και στο σωστό ύψος και στη σωστή εξίσωση κίνησης. Σύμφωνα με τα όσα είπαμε στο μάθημα για την κβαντομηχανική θεώρηση των σωματιδίων, αν η δράση αλλάζει ραγδαία συγκριτικά με την κβαντομηχανική ποσότητα $\hbar = 1.054\text{x}10^{-34}$ Joule·s, τότε γίνεται εξαιρετικά απίθανο να πραγματοποιηθεί η αντίστοιχη διαδρομή οπότε και δεν παρατηρείται. Υπολογίστε τη διαφορά ύψους μεταξύ της κλασικά σωστής διαδρομής και μιας παραπλήσιας, με τη σωστή, διαδρομής, της παραπάνω μορφής, που διαφοροποιεί τη δράση ακριβώς κατά $\hbar$.

3. Στο μάθημα, ξεκινώντας από την αρχή ελάχιστης δράσης καταλήξαμε στο 2ο νόμο του Νεύτωνα για ένα σωμάτιο που κινείται σε μία διάσταση. Επαναλάβατε τη διαδικασία για ένα σωμάτιο που κινείται στον τρισδιάστατο χώρο.

4. Υλικό σωμάτιο κινείται σε μία διάσταση σε πηγάδι δυναμικού που έχει τη μορφή του σχήματος. Αν οι αρχική και τελική θέση του σωματιδίου είναι $x(0) = -b < -a$ και $x(T) = b > a$, υπολογίστε τη δράση ως συνάρτηση των χρόνων που περνά το σωματίδιο από τα σημεία $-\alpha$ και α (τι κίνηση κάνει στα ενδιάμεσα διαστήματα σταθερού δυναμικού ώστε οι επί μέρους δράσεις να είναι ελάχιστες;) Για ποιες τιμές των δύο αυτών χρόνων ελαχιστοποιείται η ολική δράση; Ποιος ο λόγος των ταχυτήτων του σωματιδίου στα τρία αυτά διαστήματα;



5. Γράψτε τη δράση (την ελάχιστη) ενός ελευθέρου σωματιδίου σε τρεις διαστάσεις ως συνάρτηση της αρχικής και τελικής θέσης $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ και χρόνου t_1, t_2 και επιβεβαιώστε ότι η ορμή και η ενέργεια αυτού δίδονται από $\vec{p} = \dfrac{\partial S}{\partial \vec{x}_2} = -\dfrac{\partial S}{\partial \vec{x}_1}$ και $E = -\dfrac{\partial S}{\partial t_2} = \dfrac{\partial S}{\partial t_1}$. Δείξτε ακόμη ότι η δράση του ελευθέρου σωματιδίου ικανοποιεί την εξίσωση Hamilton-Jacobi: $\dfrac{\partial S}{\partial t} + \dfrac{|\vec{\nabla} S|^2}{2m} = 0$.

6. Υλικό σημείο μάζας m εκτελεί κίνηση σε μια ευθεία υπό την επήρεια δυναμικού αρμονικού ταλαντωτή. Υποθέστε ότι δεν γνωρίζετε την κίνηση αλλά έχετε διαπιστώσει ότι η κίνηση είναι περιοδική (όχι κατ' ανάγκη ημιτονοειδής). Προσδιορίστε τη φυσική κίνηση βρίσκοντας για ποια τιμή των παραμέτρων $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ η δράση γίνεται στάσιμη για διαδρομές της μορφής $x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cos(j\omega t)$, για $0 \le t \le T$, όπου $\omega = 2\pi / T$.