Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτος 23/5/00

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΙΙ (ΣΕΙΡΑ Ι΄)

1. Δείξτε ότι αν για κάποιον μετασχηματισμό από τις κανονικές συντεταγμένες q, p (για τις οποίες ισχύουν οι εξισώσεις του Χάμιλτον) στις Q, P για τις οποίες και πάλι ισχύουν οι εξισώσεις του Χάμιλτον με Χαμιλτονιανή την ίδια όπως και προηγουμένως ($H(q,p)$) θεωρώντας την όμως ως συνάρτηση των Q, P ύστερα από την αντικατάσταση του q με $q(Q,P)$ και του p με $p(Q,P)$, τότε ο μετασχηματισμός αυτός έχει Ιακωβιανή ορίζουσα ίση με τη μονάδα, δηλαδή είναι κανονικός.

2. Δίδεται η Χαμιλτονιανή του αρμονικού ταλαντωτή: $H = \dfrac{p^2}{2m} + \dfrac{\omega^2 m}{2} q^2$. Ορίζουμε νέες συντεταγμένες: $Q = \dfrac{1}{\sqrt{i\omega}}\left(\dfrac{p}{\sqrt{2m}} + i\omega\sqrt{\dfrac{m}{2}}q\right)$ και $P = \dfrac{1}{\sqrt{i\omega}}\left(\dfrac{p}{\sqrt{2m}} - i\omega\sqrt{\dfrac{m}{2}}q\right)$ Αποδείξτε ότι ο μετασχηματισμός $(q,p) \to (Q,P)$ είναι κανονικός. Γράψτε και λύστε τις κανονικές εξισώσεις στις συντεταγμένες (Q,P).

3. Ένα φορτισμένο σωμάτιο κινείται μέσα σε σχεδόν ομογενές μαγνητικό πεδίο, δηλαδή σε μαγνητικό πεδίο της μορφής $\vec{B} = B(z)\hat{z}$. Γράψτε την Λαγκρανζιανή του σωματιδίου σε κυλινδροπολικές συντεταγμένες θεωρώντας ότι το ανυσματικό δυναμικό έχει μόνο πολική συνιστώσα η οποία εξαρτάται μόνο από τα ρ, z. Κατ' αρχάς θεωρήστε το μαγνητικό πεδίο σταθερό και προσδιορίστε τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του σωματιδίου ώστε αυτό να κινείται σε ορθή έλικα (η τροχιά που γνωρίζεται ότι θα ακολουθήσει). Στη συνέχεια υπολογίστε το $\oint p_\theta d\theta$. Το αναλλοίωτο του ολοκληρώματος αυτού όταν το μαγνητικό πεδίο μεταβάλλεται αργά με το z οδηγεί σε ποια εξέλιξη της ακτίνας περιστροφής καθώς το σωματίδιο προχωρά ελικοειδώς στον άξονα z

4. Θεωρήστε τη Χαμιλτονιανή του αρμονικού ταλαντωτή: $H = \dfrac{p^2}{2} + \dfrac{\omega^2 q^2}{2}$. Στη συνέχεια α) θεωρήστε ως χωρίο για να εφαρμόστε το θεώρημα Liouville τα σημεία που κείνται στην επιφάνεια $H = E$ μεταξύ δύο γειτονικών σημείων της έλλειψης. Παραμένει το μήκος αυτού του τόξου σταθερό; Το θεώρημα Liouville δεν ισχύει σε αυτή την περίπτωση; β) Υπολογίστε την περίμετρο της καμπύλης που αντιστοιχεί στην ενέργεια $H = E$. Ισούται με την τιμή του $\int \delta(H-E)\,dp\,dq$, όπου δ η συνάρτηση του Dirac; Γιατί υπάρχει διαφορά;