## Προβλήματα

1. Θεωρήστε ένα σωματίδιο σε ένα μονοδιάστατο κόσμο που βρίσκεται αρχικά στη θέση $(x_0, p_0)$ στο χώρο των φάσεων και διέπεται από Χαμιλτονιανή δυναμική. Η πυκνότητα πιθανότητας αυτού του βέβαιου φυσικού συστήματος είναι αρχικά $\rho(x,p,0) = \delta(x-x_0)\delta(p-p_0)$. Προφανώς αργότερα η πυκνότητα πιθανότητας θα είναι $\rho(x,p,t) = \delta(x-x_t)\delta(p-p_t)$ όπου $(x_t, p_t)$ η θέση και ορμή του σωματιδίου στο χρόνο $t$. Δείξτε ότι αυτή η πυκνότητα πυθανότητας ικανοποιεί την εξίσωση συνέχειας Δείξτε ότι η κατανομή αυτή ικανοποιεί την εξίσωση συνέχειας ενός ασυμπίεστου ρευστού:

$$\frac{D\rho}{Dt} \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \dot{x}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \dot{p}\frac{\partial \rho}{\partial p} = 0 .$$

Θεωρήστε τώρα ότι αρχικά η κατανομή πιθανότητας είναι $\rho_o(x,p)$. Γράφοντας τη κατανομή αυτή ως $\rho_o(x,p) = \iint dx_0 dp_0 \rho_0(x_0,p_0)\delta(x-x_0)\delta(p-p_0)$, προσδιορίστε τη κατανομή πιθανότητας $\rho(x,p,t)$ τη χρονική στιγμή $t$, και δείξτε εκ νέου ότι και αυτή η συνεχής κατανομή ικανοποιεί την εξίσωση συνέχειας ασυμπίεστου ρευστού.

2. **Γενική λύση της εξίσωσης Liouville** Δείξτε ότι εάν η αρχική κατανομή πιθανότητας ενός Χαμιλτονιανού συστήματος είναι $\rho_o(x,p)$ τότε η κατανομή τη χρονική στιγμή $t$ είναι η $\rho(x,p,t) = \rho_o(\xi)$ όπου $\xi$ το σημείο του χώρου των φάσεων το οποίο απεικονίζεται στο χρόνο $t$ στο σημείο του χώρου των φάσεων $(x,p)$.

3. Αποδείξτε τη εξίσωση συνέχειας ενός γενικού ρευστού (όχι αναγκαστικά ασυμπίεστου) πυκνότητας $\rho(\vec{x},t)$ υπολογίζοντας τη μεταβολή της μάζας που περικλείεται σε ένα τυχαίο αλλό χωρικά αμετακίνητο χωρίο. Το πεδίο ταχυτήτων του ρευστού είναι $\vec{u}(\vec{x},t)$. Τι συνθήκη ικανοποιείται από το πεδίο ταχυτήτων αν η ροή είναι ασυμπίεστη; Περαιτέρω: ένας μικροσκοπικός κόκκος σκόνης κινείται σε αυτή τη ροή. Προσδιορίστε την επιτάχυνση του. Ως παράδειγμα θεωρήστε τη διδιάστατη ροή με πεδίο ταχυτήτων $\vec{u} = (x,-y)$. Σχεδιάστε τη ροή αυτή. Ποία η επιτάχυνση ενός κόκκου σκόνης;

4. Θεωρήστε ότι αρχικά έχουμε τη κατανομή πιθανότητας $\rho(x,p,0) = A\exp\left(-x^2 - p^2\right)$.
Α)Προσδιορίστε τη σταθερά $A$ έτσι ώστε η κατανομή σε όλο το χώρο των φάσεων να νορμαλισθεί.
Β) Θεωρείστε ότι έχετε δυναμική που διέπεται από τις εξής Χαμιλτονιανές: $H_1 = \frac{p^2}{2} + \frac{(x-1)^2}{2}$, $H_2 = \frac{p^2}{2} - \frac{x^2}{2}$, $H_3 = \frac{p^2}{2} - x$. Υπολογίστε την κατανομή πιθανότητας $\rho(x,p,t)$ σε κάθε περίπτωση. Τι φυσικό σύστημα περιγράφει η κάθε Χαμιλτονιανή;
Γ) Σχεδιάστε με ακρίβεια (με το υπολογιστή) την εξέλιξη της πικνότητας πιθανότητας σε κάθε περίπτωση.

5) Γνωρίζουμε ότι η κατάσταση ενός φυσικού συστήματος που εκτελεί περιοδική κίνηση έχει δεδομένη ενέργεια $E$ αλλά δεν ξέρουμε τη συγκεκριμένη θέση και ορμή του. Η Χαμιλτονιανή του συστήματος είναι η $H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$ με κατάλληλο δυναμικό ώστε να έχουμε για όλες τις τιμές τις ενέργειας περιοδικές τροχιές. Σχεδιάστε στο χώρο των φάσεων τη τροχιά του συστήματος. Επειδή δεν γνωρίζουμε τη συγκεκριμένη θέση του συστήματος παρα μόνο την ενέργεια του $E$ θεωρούμε ότι η κατανομή πιθανότητας είναι $\rho(x, p) = A\delta(E - H)$. Δείξτε ότι αυτή η κατανομή είναι χρονικά αμετάβλητη και προσδιορίστε τησταθερά $A$ έτσι ώστε να νορμαλίσετε αυτή την κατανομή σε όλο το χώρο των φάσεων. Ποία η φυσική σημασία της σταθεράς $A$ ;