Θεωρητική Μηχανική
Τεύχος II
Αναλυτική Μηχανική

Φωκίωνας Χατζηϊωάννου

Αθήνα, 1974

Στη Μέλισσα - Ίριδα
Δανάη - Ηλέκτρα
Αρίωνα - Ξενοφώντα

ΦΧ

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 5

Εξισώσεις Lagrange

5.1 Γενικευμένες συντεταγμένες

Έστω ένα σύστημα n-υλικών σημείων. Η θέση του συστήματος ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, καθορίζεται την τυχαία χρονική στιγμή t από τα διανύσματα θέσης των υλικών σημείων $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n$. Πολλές φορές, ανάλογα με τη συμμετρία του προβλήματος, η μελέτη του συστήματος απλοποιείται εάν αντί των καρτεσιανών συντεταγμένων των n πιο πάνω διανυσμάτων χρησιμοποιήσουμε άλλες μεταβλητές q_i, $i = 1, 2, \ldots, 3n$. Οι μεταβλητές αυτές καλούνται *γενικευμένες συντεταγμένες του συστήματος*.

Συχνά οι δυνάμεις μεταξύ των υλικών σημείων είναι τέτοιες ώστε μερικές από τις συντεταγμένες να πληρούν ορισμένες σχέσεις, για παράδειγμα σε στερεό σώμα n-υλικών σημείων οι δυνάμεις μεταξύ των υλικών σημείων είναι τέτοιες ώστε οι σχετικές αποστάσεις μεταξύ τους να διατηρούνται σταθερές

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = \text{const.}$$

Αυτές τις σχέσεις τις καλούμε *δεσμούς*.

Εν γένει, με την παρουσία των δεσμών, οι $3n$ γενικευμένες συντεταγμένες δεν είναι πλέον ανεξάρτητες μεταξύ τους. Το πλήθος των ανεξάρτητων συντεταγμένων m καλείται *βαθμός ελευθερίας* του συστήματος (βλ. Πρόβλημα 1).

Το υλικό σύστημα μπορεί να παρασταθεί με ένα σημείο

$$q = (q_1, q_2, \ldots, q_m),$$

στο χώρο των m-διαστάσεων, τον οποίο καλούμε και *θεσεογραφικό χώρο* (configuration space).

Οι διαστάσεις του χώρου των φυσικών καταστάσεων συστήματος υλικών σημείων στην Κλασσική Μηχανική (σχετικιστική ή όχι) είναι $2\times$διαστάσεις του θεσεογραφικού χώρου. Στην Κβαντική Μηχανική οι δύο χώροι έχουν τις διαστάσεις αυτές ίσες με ∞.

Ανάλογα με τη μορφή των δεσμών, τα συστήματα χαρακτηρίζονται ως:

α. **Ολόνομα**, όταν οι δεσμοί είναι της μορφής

$$f_j(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n, t) = 0,\ j = 1, 2, \ldots, k. \tag{5.1-1}$$

β. **Μη ολόνομα**, όταν οι δεσμοί δεν μπορούν να εκφραστούν στη μορφή της (5.1-1)· είναι δηλαδή ανισότητες ή μη ολοκληρώσιμες σχέσεις διαφορικών των συντεταγμένων του συστήματος.

Στην περίπτωση των ολόνομων συστημάτων τα διακρίνουμε σε σκληρόνομα εάν οι δεσμοί είναι ανεξάρτητοι του χρόνου:

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} = 0,\ j = 1, 2, \ldots, k, \tag{5.1-2}$$

και σε ρεόνομα όταν οι δεσμοί μεταβάλλονται με το χρόνο:

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} \neq 0,\ \text{για τουλάχιστον ένα δείκτη } j.$$

Ένα από παράδειγμα ολόνομου συστήματος είναι η κίνηση υλικού σημείου στην επιφάνεια σφαίρας ακτίνας R. Αν η ακτίνα R της σφαίρας είναι ανεξάρτητη του χρόνου , το σύστημα είναι σκληρόνομο αλλιώς είναι ρεόνομο. Υλική σφαίρα που κυλίεται σε κεκλιμένο επίπεδο χωρίς να ολισθαίνει αποτελεί παράδειγμα μη ολόνομου συστήματος.

5.2 Αρχή των δυνατών έργων

Εκτός από την κίνηση του υλικού συστήματος, δηλαδή της χρονικής δυναμικής μετατόπισής του, γίνεται πολλές φορές και η χρήση της έννοιας της δυνατής μετατόπισής ως απλή μαθηματική ευκολία. Το σύνολο των δυνατών μετατοπίσεων αποτελεί ομάδα μετασχηματισμών της θέσης του υλικού συστήματος στο θεσεογραφικό χώρο. Για παράδειγμα, για υλικό σημείο που μπορεί να κινείται μόνο στην επιφάνεια σφαίρας, ή στερεού που έχει ένα σταθερό σημείο, η ομάδα των δυνατών μετασχηματισμών είναι η ομάδα των περιστροφών. Η δυνατή μετατόπιση είναι μαθηματική έννοια ανεξάρτητη από τη χρονική εξέλιξη του συστήματος.

Έστω ένα σύστημα n-υλικών σημείων σε ισορροπία. Τότε όλες οι δυνάμεις $\vec{F}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ που δρουν σε κάθε υλικό σημείο είναι μηδέν, $\vec{F}_i = 0$.

Εάν θεωρήσουμε μια απειροστή δυνατή μετατόπιση του συστήματος $\delta\vec{r}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ το *δυνατό έργο* των δυνάμεων $\vec{F}_i$ θα είναι:

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0. \tag{5.2-1}$$

Αλλά η ολική δύναμη $\vec{F}_i$ που ασκείται στο σημείο i ισούται με το άθροισμα της ολικής δύναμης $\vec{f}_i$ που οφείλεται στα άλλα σημεία ή στα εξωτερικά πεδία και της ολικής δύναμης $\vec{F}_i^{\sigma}$ των δεσμών στο i

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\sigma} + \vec{f}_i, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Έτσι η (5.2-1) γράφεται:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\sigma} \cdot \delta\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0. \tag{5.2-2}$$

Εάν δεχτούμε ότι σε κανένα από τους δεσμούς δεν έχουμε δυνάμεις τριβής, τότε οι δυνάμεις $\vec{F}_i^{\sigma}$ είναι κάθετες προς τις δυνατές μετατοπίσεις $\delta\vec{r}_i$. Έτσι:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0. \tag{5.2-3}$$

Η εξίσωση (5.2-3) καλείται *αρχή των δυνατών έργων για τη στατική.*

Βάση της αρχής του D'Alembert,

$$\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i = 0, \; i = 1, 2, \ldots, n, \tag{5.2-4}$$

η δυναμική ανάγεται στη στατική και η εξίσωση (5.2-3) γενικεύεται στην:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\vec{f}_i - \dot{\vec{p}}_i \right) \cdot \delta\vec{r}_i = 0. \tag{5.2-5}$$

Έτσι:

> *Κατά τις δυνατές μετατοπίσεις το έργο των εξωτερικών δυνάμεων συν το έργο των δυνάμεων αδράνειας $(-\dot{\vec{p}}_i)$ ισούται με μηδέν.*

Η εξίσωση (5.2-5) καλείται *αρχή των δυνατών έργων στη δυναμική.*

Η εξίσωση αυτή είναι ισοδύναμη με τις εξισώσεις του Νεύτωνα. Πράγματι θεωρήσαμε κατ' αρχήν ότι δεν υπάρχουν δεσμοί. Τότε οι μετατοπίσεις $\delta\vec{r}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και η (5.2-5) συνεπάγει αμέσως τις εξισώσεις του Νεύτωνα.

Με την παρουσία δεσμών οι συντεταγμένες $\vec{r}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ αντικαθιστώνται με γενικευμένες συντεταγμένες ανεξάρτητες μεταξύ τους, q_k, $k = 1, \ldots, m$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_m). \tag{5.2-6}$$

Τα διαφορικά θέσεων $\delta\vec{r}_i$ γράφονται

$$\delta\vec{r}_i = \sum_k \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\,\delta q_k, \tag{5.2-7}$$

και η αρχή ελαχίστων έργων (5.2-5) παίρνει τη μορφή

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{f}_i - \dot{\vec{p}}_i\right)\cdot\sum_k \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\,\delta q_k = 0.$$

ή

$$\sum_k\left[\sum_{i=1}^{n}(\vec{f}_i - \dot{\vec{p}}_i)\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\right]\delta q_k = 0. \tag{5.2-8}$$

Από την (5.2-8) και επειδή τα διαφορικά δq_k είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, έχουμε

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{f}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k} - \sum_{i=1}^{n}\dot{\vec{p}}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k} = 0,\;\; k = 1, 2, \ldots, m. \tag{5.2-9}$$

Αυτό αποτελεί και τη *γενικευμένη έκφραση της αρχής D'Alembert*.

Η γενικευμένη δύναμη

$$F_k = \sum_{i=1}^{n}\vec{f}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\;\; k = 1, 2, \ldots, m. \tag{5.2-10}$$

συν τη γενικευμένη δύναμη αδράνειας

$$-\dot{P}_k = \sum_{i=1}^{n}\dot{\vec{p}}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k} \tag{5.2-11}$$

δίνουν άθροισμα μηδέν.

Βάσει των πιο πάνω ορισμών η (5.2-9) γράφεται και στη μορφή

$$-\dot{P}_k = F_k \tag{5.2-12}$$

Αυτή υποκαθιστά τις εξισώσεις του Νεύτωνα.

5.3 Εξισώσεις Lagrange

Στην εξίσωση (5.2-9) της αρχής των δυνατών έργων, η γενικευμένη δύναμη αδράνειας

$$
\begin{aligned}
-\dot{P}_k &= \sum_{i=1}^{n} \dot{\vec{p}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right) - \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right), \qquad (5.3\text{-}1)
\end{aligned}
$$

παρουσιάζεται ως μικτή συνάρτηση των γενικευμένων συντεταγμένων q και των ταχυτήτων $\vec{v}$ των αρχικών συντεταγμένων. Η μορφή αυτή δεν είναι βολική. Θα θέλαμε να απαλείψουμε τις ταχύτητες $\vec{v}$ έτσι ώστε να έχουμε τη γενικευμένη δύναμη αδράνειας $-\dot{P}_k$ εκφρασμένη συναρτήση των γενικευμένων συντεταγμένων q και ταχυτήτων $\dot{q}$.

Παραγωγίζοντας την (5.2-6) διαδοχικά βρίσκουμε

$$
\vec{v}_i \equiv \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{j=i}^{m} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\,\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}, \qquad (5.3\text{-}2)
$$

$$
\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k} = \sum_{j=i}^{m} \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_k \partial q_j}\,\dot{q}_j + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_k \partial t} \qquad (5.3\text{-}3)
$$

$$
\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \qquad (5.3\text{-}4)
$$

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right) = \sum_{j=i}^{m} \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial q_k}\,\dot{q}_j + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t \partial q_k} \qquad (5.3\text{-}5)
$$

Επίσης, συγκρίνοντας την (5.3-3) με την (5.3-5) και υποθέτοντας ότι μπορούμε να αντιμεταθέσουμε τις παραγωγίσεις

$$
\frac{\partial^2}{\partial q_j \partial q_k} = \frac{\partial^2}{\partial q_k \partial q_j} \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2}{\partial q_k \partial t} = \frac{\partial^2}{\partial t \partial q_k},
$$

έχουμε

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k}. \qquad (5.3\text{-}6)
$$

Εισάγοντας τις (5.3-4) και (5.3-6) στην (5.3-1), έχουμε τελικά την έκφραση που επιθυμούσαμε

$$
\begin{aligned}
\dot{P}_k &= \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k}\right) - \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k} = \\
&= \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i |\vec{v}_i|^2}{2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i |\vec{v}_i|^2}{2}\right). \qquad (5.3\text{-}7)
\end{aligned}
$$

Δηλαδή

$$\dot{P}_k = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k}, \tag{5.3-8}$$

όπου

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i |\vec{v}_i|^2}{2}, \tag{5.3-9}$$

η ολική κινητική ενέργεια του συστήματος.

Με τη βοήθεια της (5.3-8) οι εξισώσεις κίνησεις (5.2-11) του συστήματος εκφράζονται τώρα στη συμπαγή μορφή

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = F_k, \;\; k = 1, 2, \ldots, m. \tag{5.3-10}$$

Αυτές καλούνται *εξισώσεις του Lagrange*.

Στην ειδική περίπτωση κατά την οποία οι δυνάμεις $\vec{f}_i$ προέρχονται από δυναμικό, τότε (βλέπε §2.3)

$$\vec{f}_i = -\vec{\nabla}_i V, \tag{5.3-11}$$

και η γενικευμένη δύναμη F_k είναι

$$F_k = \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = -\sum_{i=1}^{n} \vec{\nabla}_i V \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial q_k}, \tag{5.3-12}$$

και οι εξισώσεις του Lagrange λαμβάνουν τη συνηθισμένη μορφή

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \;\; k = 1, 2, \ldots, m. \tag{5.3-13}$$

όπου $L = T - V$ η *Lagrangian* του συστήματος (βλ. Πρόβλημα 6).

Στη γενικότερη περίπτωση, όταν εκτός από τις δυνάμεις $F_k = -\partial V/\partial q_k$ ασκούνται στο σύστημα και άλλες δυνάμεις $\tilde{F}_k$ οι οποίες δεν πηγάζουν από δυναμικό, η (5.3-13) αντικαθιστάται από την

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \tilde{F}_k, \;\; k = 1, 2, \ldots, m. \tag{5.3-14}$$

Προβλήματα

1. Πόσοι είναι οι βαθμοί ελευθερίας συστήματος δύο υλικών σημείων που είναι συνδεδεμένα στα άκρα αβαρούς ράβδου η οποία κινείται ελεύθερη στον τρισδιάστατο χώρο; Προτείνετε γενικευμένες συντεταγμένες και εκφράστε την κινητική ενέργεια του συστήματος συναρτήσει αυτών.

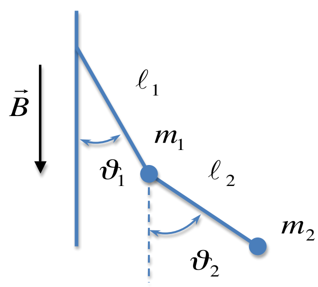
2. Υλικό σημείο μάζας m κινείται χωρίς τριβή σε επιφάνεια σφαίρας ακτίνας R. Ολοκληρώστε την κίνηση,

   (i) στις γενικές σφαιρικές πολικές συντεταγμένες με γωνίες (β, ϕ),

   (ii) σε κατάλληλες επίπεδες πολικές συντεταγμένες (ϕ), αφού πρώτα αποδείξετε ότι η κίνηση είναι επίπεδη.

3. Εκφράστε τις εξισώσεις Lagrange, οι οποίες διέπουν την κίνηση του υλικού συστήματος του προβλήματος 1 και ολοκληρώστε την κίνηση.

4. Εκφράστε τις εξισώσεις Lagrange οι οποίες διέπουν την κίνηση διπλού εκκρεμούς εντός πεδίου βαρύτητας έντασης $\vec{B}$. Δίδονται τα μήκη ℓ_1, ℓ_2 και οι μάζες m_1, m_2 των δύο απλών συνιστώντων εκκρεμών. Να ολοκληρωθεί η κίνηση για μικρά πλάτη.



5. Ολοκληρώστε τις εξισώσεις Lagrange του προβλήματος της κίνησης δύο σωμάτων μάζας m_1 και m_2 αντίστοιχα, οι οποίες έλκονται από Νευτώνειο δυναμικό
$$V = -f\frac{m_1 m_2}{r}$$
Χρησιμοποιείστε καρτεσιανές συντεταγμένες για την κίνηση του κέντρου μάζας και πολικές συντεταγμένες για τη σχετική κίνηση.

6. Οι εξισώσεις Lagrange (5.3-9) ισχύουν και στη γενικότερη περίπτωση κατά την οποία οι δυνάμεις προέρχονται από ένα «δυναμικό $V(q, \dot{q})$ που εξαρτάται και από την ταχύτητα» βάσει του τύπου
$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k}\right).$$
Σε αυτή την περίπτωση θέτουμε $L = T - V$.

   Επαληθεύσετε ότι στην περίπτωση των ηλεκτρομαγνητικών δυνάμεων
$$\vec{F} = e\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right),$$
το μέγεθος
$$V(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = e\left[\phi(\vec{x}, t) - \frac{\dot{\vec{x}}}{c}\cdot\vec{A}(\vec{x}, t)\right]$$

όπου
$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \qquad \text{και} \qquad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A},$$
αποτελεί ένα τέτοιο δυναμικό ταχυτήτων.

Κεφάλαιο 6

Αρχή της ελάχιστης δράσης

6.1 Αρχή της ελάχιστης δράσης

Έστω ένα μηχανικό σύστημα n βαθμών ελευθερίας, η κίνηση του οποίου περιγράφεται από την Lagrangian $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$. Συναρτήσεις Lagrange με παραγώγους ανωτέρας τάξης θα μελετηθούν στην §6.2. Η τροχιά του συστήματος στο χώρο των q περιγράφεται μέσω ενός συστήματος συναρτήσεων του χρόνου $q_i = q_i(t)$, όπου $i = 1, 2, \ldots, n$ και $-\infty < t < +\infty$.

Ως συνέπεια των εξισώσεων του Νεύτωνα σε κάθε σύνολο αρχικών τιμών $q_i(0)$, $\dot{q}_i(0)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ αντιστοιχεί μία και μοναδική τροχιά του συστήματος.

Κατ' αναλογία προς τη δυνατή μετατόπιση, ορίζουμε ως *δυνατή τροχιά* του συστήματος κάθε τυχαία χρονική συνάρτηση $q_i(t)$ που είναι συμβιβαστή με τους δεσμούς.

Ορίζουμε ως *δράση* του συστήματος μεταξύ δύο χρονικών στιγμών t_1, t_2, για τυχαία δυνατή τροχιά, το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q_i, \dot{q}_i, t\right)\, dt. \tag{6.1-1}$$

Είναι προφανές ότι η δράση I είναι συναρτησοειδές των δυνατών τροχιών, αφού είναι συνάρτηση των συναρτήσεων $q_i(t)$.

Η *Αρχή της ελάχιστης δράσης* του Hamilton διατυπώνεται ως εξής:

> *Η τροχιά υλικού συστήματος n βαθμών ελευθερίας, το οποίο περιγράφεται από την Lagrangian $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ είναι τέτοια ώστε το ολοκλήρωμα της δράσης να παίρνει στάσιμη τιμή.*

Δηλαδή, εάν $q_i(t)$ είναι η τροχιά του συστήματος, κάθε απειροστή συναρτησιακή μεταβολή

$$q_i(t) \to q_i'(t) = q_i(t) + \delta q_i(t),\ \ i = 1, 2, \ldots, n, \tag{6.1-2}$$

που υπακούει στη συνοριακή συνθήκη

$$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0, \tag{6.1-3}$$

είναι τέτοια ώστε $\delta I = 0$.

Η αρχή ελάχιστης δράσης είναι ισοδύναμη με τις εξισώσεις Lagrange.

Απόδειξη

Το συναρτησιακό διαφορικό της δράσης είναι:

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt. \tag{6.1-4}$$

Θα δείξουμε ότι:

α. *Εάν πληρούνται οι εξισώσεις του Lagrange η δράση παίρνει ακρότατη τιμή.*

Πράγματι, με τη βοήθεια των εξισώσεων Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,\ \ i = 1, 2, \ldots, n, \tag{6.1-5}$$

η (6.1-4) γράφεται:

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta \dot{q}_i \right] dt. \tag{6.1-6}$$

Αλλά από τον ορισμό (6.1-2) έχουμε:

$$\frac{d}{dt} \delta q_i = \delta \dot{q}_i \tag{6.1-7}$$

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) \delta t = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Bigg|_{t_1}^{t_2} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i(t_2) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i(t_1),$$

και λόγω των συνοριακών συνθηκών (6.3-1),

$$\delta I = 0. \tag{6.1-8}$$

β. *Εάν δεχτούμε την αρχή του Hamilton ως νόμο της Μηχανικής, τότε προκύπτουν οι εξισώσεις του Lagrange.*

Πράγματι, από την (6.1-4) έχουμε:

$$\begin{aligned} 0 = \delta I &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \right] dt = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \bigg|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i \, dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i \, dt. \end{aligned} \tag{6.1-9}$$

Από την (6.1-9) επειδή οι δq_i είναι τυχαίες συναρτήσεις έπεται αμέσως (άσκηση 1) ότι:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.1-10}$$

Από τα πιο πάνω διαπιστώνουμε ότι *δοθείσας μιας Lagrangian η αρχή του Hamilton είναι ισοδύναμη με τις εξισώσεις του Lagrange και έτσι αποτελεί μια άλλη διατύπωση του δυναμικού νόμου.*

Η αρχή της ελάχιστης δράσης έχει πολύ βασική σημασία. Εκτός του ότι αποτελεί ένα ισχυρότατο μαθηματικό εργαλείο στη μελέτη των δυναμικών συστημάτων, επιτρέπει και ένα βαθύτερο επίπεδο κατανόησής τους. Μέσω αυτής, ο δυναμικός νόμος εκφράζεται σε γεωμετρικά αναλλοίωτη συμπαγή και κομψή μορφή και οι βασικές αρχές και συμμετρίες, οι οποίες τον διέπουν καθίστανται πλέον ανάγλυφες. Αυτό θα γίνει πιο σαφές στις επόμενες παραγράφους.

Πέραν όμως αυτού η αξία της διατύπωσης της αρχής της ελάχιστης δράσης δεν πρέπει να υπερεκτιμάται. Με την αρχή της ελάχιστης δράσης δημιουργήθηκε ένας νέος φυσικός νόμος. Για την εύρεση μιας συνάρτησης Lagrange L, η οποία να περιγράφει ένα συγκεκριμένο δυναμικό σύστημα, απαιτείται η γνώση των εξισώσεων κίνησης του συστήματος οι οποίες θα ταυτιστούν με τις εξισώσεις Lagrange. Η παραδοχή μιας L μπορεί πολλές φορές να στηριχθεί πάνω σε γενικά επιχειρήματα από την ανάλυση της συμμετρίας του συστήματος. Στην τελευταία περίπτωση μπορούμε να μιλούμε περί πρόβλεψης των εξισώσεων κίνησης (βλ. Πρόβλημα 2).

Την ισοδυναμία και αλληλεξάρτηση των εξισώσεων κίνησης και της αρχής ελάχιστης δράσης αποδίδουμε και γραφικά στο πιο κάτω διάγραμμα.

Προβλήματα

1. Αποδείξετε ότι η ισχύς της (6.1-9) για τυχαία συνάρτηση $\delta q(t)$ για την οποία ισχύουν οι συνοριακές συνθήκες (6.3-1), συνεπάγει τις εξισώσεις (6.1-10) του Lagrange.

   Η συνάρτηση $\delta q(t)$ θεωρείται ότι ανήκει στο σύνολο C^∞ των άπειρα παραγωγίσιμων και συνεχών συναρτήσεων. Η δράση είναι συναρτησοειδές των τροχιών $q(t)$, $\dot{q}(t)$, ώστε η μέθοδος μπορεί να εφαρμοστή και όταν η Lagrangian είναι γενικευμένη συνάρτηση, κατανομή Schwartz.

2. Βρείτε την Lagrangian ελεύθερου υλικού σημείου χρησιμοποιώντας το αναλλοίωτο ως προς τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου.

3. «Βραχυστόχρονες» καλούνται οι τροχιές του συστήματος στο θεσεογραφικό χώρο οι οποίες όταν διαγραφούν με σταθερή ενέργεια αποτελούν τους συντομότερους χρονικά δρόμους μεταξύ των σημείων της. Αυτές καθιστούν το ολοκλήρωμα του χρόνου

   $$\int dt = \int \frac{ds}{v} = \int \frac{ds}{\sqrt{2(E-V)}},$$

   ελάχιστο.

   Βρείτε τις εξισώσεις Lagrange τις οποίες ικανοποιούν οι βραχυστόχρονες τροχιές.

4. Υλικό σημείο κινείται σε κατακόρυφο επίπεδο εντός πεδίου βαρύτητας έντασης g. Να βρεθούν οι βραχυστόχρονες τροχιές.

5. Βρείτε Lagrangian η οποία περιγράφει υλικό σημείο μάζας m, υπό την επίδραση δύο δυνάμεων, μιας προερχόμενης από δυναμικό

   $$V = \frac{k}{2}|\vec{x}|^2,$$

   και άλλης της μορφής

   $$\vec{F} = \vec{A}\sin(\omega t).$$

   Υπόδειξη:

   $$L = \frac{1}{2}m|\dot{\vec{x}}|^2 - \frac{1}{2}k|\vec{x}|^2 + \vec{F}\cdot\vec{x}.$$

6.1.1 Μη αδρανειακά συστήματα αναφοράς

Στα προηγούμενα κεφάλαια μελετήθηκε η κίνηση σε αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Η χρήση των εξισώσεων Lagrange μας επιτρέπει και την απευθείας επέκτασή και στα μη αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Πράγματι, αφού για την εξαγωγή των εξισώσεων του Lagrange από την αρχή της ελάχιστης δράσης δεν τέθηκε κανένας περιορισμός όσον αφορά στο σύστημα αναφοράς, οι εξισώσεις αυτές ισχύουν και στα μη αδρανειακά συστήματα.

Πιο κάτω θα περιοριστούμε σε στερεά μη αδρανειακά συστήματα. Ξεκινώντας συνήθως από τη γνωστή μορφή της L σε αδρανειακό σύστημα θα βρούμε τη νέα μορφή L' της Lagrangian στο μη αδρανειακό σύστημα. Σε αυτή την περίπτωση αν $L = T - V$, αρκεί να βρούμε τη νέα έκφραση της κινητικής ενέργειας, δηλαδή να καθορίσουμε το μετασχηματισμό της ταχύτητας.

Το γενικότερο αδρανειακό σύστημα Σ εκτελεί τόσο μεταφορική, με εν γένει μεταβαλλόμενη ταχύτητα, όσο και περιστροφική κίνηση ως προς αδρανειακό σύστημα Σ_α. Μια τέτοια κίνηση μπορούμε να την αναλύσουμε ως εξής:

Θεωρούμε σύστημα Σ_μ που κινείται παράλληλα με το Σ_α με ταχύτητα $\vec{U}(t)$ και έχει κοινή αρχή με το Σ, το οποίο περιστρέφεται περί του Σ_α με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}(t)$. Έστω $\vec{v}_\alpha$, $\vec{v}_\mu$ και $\vec{v}$ οι ταχύτητες ενός υλικού σημείου ως προς τα Σ_α, Σ_μ και Σ αντίστοιχα.

Έχουμε

$$\vec{v}_\alpha = \vec{v}_\mu + \vec{U}(t), \tag{6.1-11}$$

και

$$\vec{v}_\mu = \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r}, \tag{6.1-12}$$

όπου $\vec{r}$ το διάνυσμα θέσης του υλικού σημείου ως προς το Σ.

Έτσι:

$$\vec{v}_\alpha = \vec{v} + \vec{U}(t) + \vec{\omega} \times \vec{r}, \tag{6.1-13}$$

Η εξίσωση (6.1-13) δίνει το ζητούμενο μετασχηματισμό της ταχύτητας. Αν στο αδρανειακό σύστημα η έκφραση της Lagrangian είναι

$$L_\alpha = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left|(\dot{\vec{r}}_i)_\alpha\right|^2 - V, \tag{6.1-14}$$

η Lagrangian L_μ ως προς το μη αδρανειακό σύστημα λαμβάνεται αν αντικαταστήσουμε τη σχέση (6.1-13) στη σχέση (6.1-14). Έχουμε τότε

$$\begin{aligned} L_\mu &= \frac{1}{2}\sum_i m_i \left|\vec{v}_i + \vec{U} + \vec{\omega}\times\vec{r}_i\right|^2 - V = \\ &= \frac{1}{2}\sum_i m_i \left|\vec{v}_i + \vec{\omega}\times\vec{r}_i\right|^2 + \frac{1}{2} m_i |\vec{U}|^2 + m_i \left(\vec{v}_i + \vec{\omega}\times\vec{r}_i\right)\cdot\vec{U} - V, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m\left(\vec{v} + \vec{\omega}\times\vec{r}\right)\cdot\vec{U} &= m\vec{v}_\mu\cdot\vec{U} = m\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\vec{U} = \\ &= m\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\cdot\vec{U}\right) - m\vec{r}\cdot\frac{d\vec{U}}{dt} = m\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\cdot\vec{U}\right) - m\vec{r}\cdot\vec{\gamma}, \end{aligned}$$

όπου $\vec{\gamma}$ η επιτάχυνση της αρχής του Σ_μ ως προς το Σ_α,

$$\begin{aligned} L_\mu = \sum_i \Bigg[&\frac{1}{2} m_i |\vec{v}_i|^2 + \frac{1}{2} m_i |\vec{\omega}\times\vec{r}_i|^2 + m_i\vec{v}_i\cdot\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_i\right) + \frac{1}{2} m_i |\vec{U}|^2 + \\ &+ m_i\frac{d}{dt}\left(\vec{r}_i\cdot\vec{U}\right) - m_i\,\vec{r}_i\cdot\vec{\gamma}\Bigg] - V \end{aligned} \qquad (6.1\text{-}15)$$

Η πιο πάνω Lagrangian μπορεί να απλοποιηθεί περισσότερο. Ο τέταρτος και ο πέμπτος όρος της είναι ολικά διαφορικά ως προς το χρόνο και μπορούν να παραλειφθούν. Με αυτό το θέμα θα ασχοληθούμε περισσότερο στην επόμενη παράγραφο (§6.1.2) των μετασχηματισμών βαθμίδας. Τελικά, η Lagrangian του συστήματος ως προς το μη αδρανειακό παρατηρητή παίρνει τη μορφή

$$L_\mu = \frac{1}{2}\sum_i \left[\frac{1}{2} m_i |\vec{v}_i|^2 + \frac{1}{2} m_i \left|\vec{\omega}\times\vec{r}_i\right|^2 + m_i\vec{v}_i\cdot\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_i\right) - m_i\,\vec{r}\cdot\vec{\gamma}\right] - V. \qquad (6.1\text{-}16)$$

Οι αντίστοιχες εξισώσεις του Lagrange,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0, \qquad (6.1\text{-}17)$$

όπου

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} &= m_i\vec{v}_i + m_i\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_i\right), \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}\right) &= m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt} + m_i\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}_i\right) + m_i\left(\vec{\omega}\times\vec{v}_i\right), \\ \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} &= m_i\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_i\right)\times\vec{\omega} + m_i\left(\vec{v}_i\times\vec{\omega}\right) - m_i\vec{\gamma} - \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i}, \end{aligned}$$

δίνουν τις νέες εξισώσεις κίνησης,

$$
\begin{split}
m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} + m_i \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_i \right) + m_i \left(\vec{\omega} \times \vec{v}_i \right) - \\
- m_i \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i \right) \times \vec{\omega} - m_i \left(\vec{v}_i \times \vec{\omega} \right) + m_i \vec{\gamma} + \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} = 0,
\end{split}
\tag{6.1-18}
$$

ή

$$
m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} - m_i \vec{\gamma} + 2m_i \left(\vec{v}_i \times \vec{\omega} \right) + m_i \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i \right) \times \vec{\omega} - m_i \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_i \right).
\tag{6.1-19}
$$

Οι εξισώσεις (6.1-19) αντικαθιστούν το νόμο του Νεύτωνα για το σύστημα Σ.

Ως προς το μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς Σ, εκτός από την αρχική δύναμη $-\partial V/\partial \vec{r}$ παρουσιάζονται επιπλέον και οι εξής νέες δυνάμεις: η φυγόκεντρος δύναμη $\vec{F}_\alpha = m\left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right) \times \vec{\omega}$, και η δύναμη Coriolis $\vec{F}_c = 2m\left(\vec{v} \times \vec{\omega}\right)$, που οφείλονται στη γωνιακή ταχύτητα του Σ, η δύναμη $\vec{F}_\gamma = m\vec{\gamma}$ που οφείλεται στη γραμμική επιτάχυνση της αρχής του Σ και τέλος η δύναμη $\vec{F}_\omega = -m\left(d\vec{\omega}/dt \times \vec{r}\right)$, λόγω της γωνιακής (στροφικής) επιτάχυνσης $d\vec{\omega}/dt$ του Σ. Όλες οι πιο πάνω φαινομενικές δυνάμεις καλούνται *αδρανειακές* επειδή είναι ανάλογες της αδρανειακής μάζας των υλικών σημείων.

Λόγω της ισοδυναμίας βαρυτικής και αδρανειακής μάζας οι δυνάμεις αυτές μπορούν να ταυτιστούν, τουλάχιστον σε τοπικό πλαίσιο, με πεδία βαρύτητας (τεύχος I, §1.3). Το πεδίο «βαρύτητας» το οποίο περιγράφεται από τις παλιρροϊκές δυνάμεις Coriolis είναι ιδιάζουσας μορφής

$$
F_i = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} v_k,
$$

όπου

$$
a_{ik} = \sum_{\ell=1}^{3} \epsilon_{ik\ell}\, \omega_\ell .
$$

6.1.2 Μετασχηματισμοί βαθμίδας (Gauge transformations)

Στην προηγούμενη παράγραφο θεωρήσαμε το αναλλοίωτο των εξισώσεων κίνησης υπό μορφή Lagrange, κατά τους μετασχηματισμούς των συντεταγμένων. Σε αυτή την παράγραφο θα ασχοληθούμε με τους *μετασχηματισμούς βαθμίδας*, οι οποίοι μεταβάλλουν την Lagrangian, αφήνοντας αναλλοίωτες τις εξισώσεις κίνησης και συνεπώς και το φυσικό περιεχόμενο του δυναμικού συστήματος.

Οι εν λόγω μετασχηματισμοί έχουν τη μορφή:

$$L \to L' = L(q, \dot{q}, t) + G(q, t), \tag{6.1-20}$$

όπου

$$G(q, t) = \frac{d}{dt} g(q, t) = \frac{\partial g}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial g}{\partial t}. \tag{6.1-21}$$

Η συνάρτηση $G(q, t)$ καλείται *γεννήτορας των μετασχηματισμών*.

Το αναλλοίωτο των εξισώσεων κίνησης είναι προφανές από την αρχή ελάχιστης δράσης:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_1}^{t_2} \delta L' \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L \, dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta G \, dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \delta L \, dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta \left[\frac{d}{dt} g(q, t) \right] \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L \, dt + \delta g(q, t) \Big|_{t_1}^{t_2} = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \delta L \, dt + \frac{\partial g}{\partial q} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \delta L \, dt. \end{aligned}$$

Έτσι από την

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L \, dt = 0,$$

έπεται ότι

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L' \, dt = 0.$$

Σε αυτό το συμπέρασμα μπορούμε να καταλήξουμε και απευθείας από τις εξισώσεις Lagrange. Πράγματι, από την (6.1-21) έχουμε

$$\frac{\partial G}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left(\frac{\partial g}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial g}{\partial t} \right) = \frac{\partial g}{\partial q}, \tag{6.1-22}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial G}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial^2 g}{\partial^2 q}\dot{q} + \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial q}, \tag{6.1-23}$$

$$\frac{\partial G}{\partial q} = \frac{\partial^2 g}{\partial q^2}\dot{q} + \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial t}. \tag{6.1-24}$$

Συγκρίνοντας τις (6.1-23) και (6.1-24) μεταξύ τους και λαμβάνοντας υπόψη ότι με την προϋπόθεση ότι η συνάρτηση g είναι C^2, δηλαδή έχει δεύτερης τάξης παράγωγους ως προς q και t και αυτές είναι συνεχείς, ισχύει

$$\frac{\partial^2 g}{\partial q \partial t} = \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial q}$$

έχουμε

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial G}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial G}{\partial q} = 0, \tag{6.1-25}$$

και επιβεβαιώνουμε ότι οι εξισώσεις του Lagrange παραμένουν αναλλοίωτες στους μετασχηματισμούς βαθμίδας $L \to L'$ (6.1-21).

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q} = 0, \tag{6.1-26}$$

Γενικότεροι μετασχηματισμοί, που αφήνουν τις εξισώσεις κίνησης αναλλοίωτες, είναι οι μετασχηματισμοί επαφής (contact transformations):

$$L(q, \dot{q}, t) \to L'(q', \dot{q}', t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} g(q, q', t), \tag{6.1-27}$$

οι οποίοι αποτελούν συνδυασμό μετασχηματισμού βαθμίδας και συντεταγμένων.

Οι μετασχηματισμοί βαθμίδας βρίσκουν ιδιαίτερη χρήση στην ηλεκτρομαγνητική θεωρία (βλ. Πρόβλημα 2).

Προβλήματα

1. Δείξτε ότι οι μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου μπορούν να θεωρηθούν ως μετασχηματισμοί βαθμίδας.

2. Δείξτε ότι η Lagrangian

$$L = \frac{1}{2} m v^2 - e\phi(\vec{x}, t) + \frac{e\dot{\vec{x}}}{c} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t)$$

υλικού σημείου μάζας m και φορτίου e εντός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου (βλ. Πρόβλημα 6, §5.3), είναι αναλλοίωτη στο μετασχηματισμό βαθμίδας

$$\begin{aligned} \phi &\to \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \gamma}{\partial t}, \\ \vec{A} &\to \vec{A} + \vec{\nabla}\gamma \end{aligned}$$

των ηλεκτρομαγνητικών δυναμικών.

6.2 Επέκταση της αρχής ελαχίστου σε διαφορικές εξισώσεις ανωτέρης τάξης

Στην προηγούμενη παράγραφο εφαρμόσαμε την αρχή της ελάχιστης δράσης σε Lagrangian συναρτήσεις, $L(x, \dot{x}, t)$, οι οποίες εξαρτώνταν από τη θέση x και την πρώτη παράγωγο dx/dt ως προς το χρόνο, για την παραγωγή της εξίσωσης κίνησης ως δευτεροβάθμιας διαφορικής εξίσωσης ως προς το χρόνο.

Η μέθοδος της ελάχιστης δράσης μπορεί να επεκταθεί και σε διαφορικές εξισώσεις ανώτερης τάξης.

Έστω μια συνάρτηση Lagrange

$$L\left(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^{(2)}}{(dt)^2}x, \ldots, \frac{d^{(n)}}{(dt)^n}x, t\right),$$

συνάρτηση της θέσης x, του χρόνου t και των παραγώγων

$$\frac{dx}{dt}, \frac{d^{(2)}x}{(dt)^2}, \ldots, \frac{d^{(n)}x}{(dt)^n}$$

μέχρι n τάξης, που για απλότητα τη θεωρούμε στο μονοδιάστατο χώρο. Το ολοκλήρωμα της δράσης, συναρτησοειδές των δυνατών τροχιών $x(t)$, ορίζεται στην περίπτωση αυτή ως

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L\left(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^{(2)}}{(dt)^2}x, \ldots, \frac{d^{(n)}}{(dt)^n}x, t\right) dt, \tag{6.2-1}$$

και η αρχή του Hamilton γενικεύεται ως εξής:

Οι τροχιές του συστήματος στο θεσεογραφικό χώρο $x(t)$ καθιστούν το ολοκλήρωμα της δράσης ακρότατο ως προς συναρτησιακές μεταβολές των δυνατών τροχιών $\delta x(t)$ οι οποίες υπακούν στις συνοριακές συνθήκες

$$\begin{aligned} \delta x(t_1) &= \delta x(t_2) = 0 \\ \delta\frac{dx}{dt}(t_1) &= \delta\frac{dx}{dt}(t_2) = 0 \\ \delta\frac{d^{(2)}x}{(dt)^2}(t_1) &= \delta\frac{d^{(2)}x}{(dt)^2}(t_2) = 0 \\ &\cdots \\ \delta\frac{d^{(n-1)}x}{(dt)^{n-1}}(t_1) &= \delta\frac{d^{(n-1)}x}{(dt)^{n-1}}(t_2) = 0, \end{aligned} \tag{6.2-2}$$

για τυχαία t_1, t_2.

Μηδενίζοντας το συναρτησιακό διαφορικό της (6.2-1)

$$\delta I = 0, \tag{6.2-3}$$

και λαμβάνοντας υπόψη τις συνοριακές συνθήκες (6.2-2), έχουμε,

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial x}\delta x(t) + \frac{\partial L}{\partial \frac{dx}{dt}}\delta\left(\frac{dx}{dt}\right) + \ldots + \frac{\partial L}{\partial \frac{d^{(n)}x}{(dt)^n}}\delta\left[\frac{d^{(n)}x}{(dt)^n}\right] \right\} dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \frac{dx}{dt}}\right) + \ldots + (-1)^n \frac{d^{(n)}}{(dt)^n}\left[\frac{\partial L}{\partial \frac{d^{(n)}x}{(dt)^n}}\right] \right\} \delta x(t)\, dt = 0 \tag{6.2-4}$$

Για τη μετάβαση από το δεύτερο στο τρίτο μέλος της πιο πάνω ισότητας χρησιμοποιήθηκαν οι ταυτότητες

$$\delta\left[\frac{d^{(n)}x}{(dt)^n}\right] = \frac{d^{(n)}}{(dt)^n}\delta x(t), \tag{6.2-5}$$

και έγιναν οι προφανείς ολοκληρώσεις κατά μέρη. Οι συναρτήσεις $\delta x(t)$ θεωρούνται ότι είναι C^{∞}, δηλαδή απείρως παραγωγίσιμες και συνεχείς συναρτήσεις, ώστε η μέθοδος να μπορεί να εφαρμοστεί στη γενική περίπτωση που η Lagrangian και οι μερικές της παράγωγοι είναι γενικευμένες συναρτήσεις, κατανομές Schwartz.

Από την (6.2-4) έπονται οι εξισώσεις Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \frac{dx}{dt}}\right) + \ldots + (-1)^n \frac{d^{(n)}}{(dt)^n}\left[\frac{\partial L}{\partial \frac{d^{(n)}x}{(dt)^n}}\right] = 0. \tag{6.2-6}$$

Εφαρμογή

Έστω η Lagrangian

$$L = \frac{m}{2}\left(|\dot{\vec{x}}|^2 - \frac{1}{\omega}|\ddot{\vec{x}}|^2\right).$$

Ζητάμε τις εξισώσεις του Lagrange και την τροχιά της κίνησης.

Οι εξισώσεις του Lagrange για το συγκεκριμένο Πρόβλημα είναι,

$$\frac{d^{(2)}}{(dt)^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_i}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) + \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \ i = 1, 2, 3. \tag{6.2-7}$$

όπου

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_i} &= -\frac{m\ddot{x}_i}{\omega^2}, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} &= -m\dot{x}_i, \\ \frac{\partial L}{\partial x_i} &= 0. \end{aligned} \tag{6.2-8}$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις (6.2-8) στην (6.2-7) έχουμε την εξίσωση κίνησης

$$\frac{d^{(4)}}{(dt)^4}\vec{x} + \omega^2 \frac{d^{(2)}}{(dt)^2}\vec{x} = 0. \tag{6.2-9}$$

Αυτή, όταν ολοκληρωθεί, μας δίνει τη γενική κίνηση του συστήματος.

$$x_i(t) = a_i + tb_i + c_i \sin(\omega t + \alpha_i). \tag{6.2-10}$$

Η λύση (6.2-10) μας παρέχει τη δυνατότητα φυσικής ερμηνείας του δυναμικού συστήματος το οποίο περιγράφει η Lagrangian (6.2-7). Θέτοντας

$$\begin{aligned}
\vec{a} = \vec{X} &= \frac{1}{2}\left(\vec{r}_1 + \vec{r}_2\right), \\
\vec{b} = \vec{V} &= M\dot{\vec{X}}, \\
2C_i \sin(\omega t + \alpha_i) &= \left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right)_i, \\
\vec{x} = \vec{r}_1 &= \vec{x}_0 + \vec{r},
\end{aligned}$$

έχουμε ένα σύστημα δύο υλικών σημείων που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους μέσω δυναμικού αρμονικού ταλαντωτή $V(r) = \omega^2 r^2/2$.

Η χρησιμοποίηση της Lagrangian συναρτήσεων με ανώτερες παραγώγους επιτρέπει την περιγραφή των δυναμικών συστημάτων στους θεσεογραφικούς χώρους με λιγότερες από τις συνηθισμένες διαστάσεις.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα συστήματος δύο σωματιδίων έξι βαθμών ελευθερίας στο συνηθισμένο θεσεογραφικό χώρο ή δώδεκα βαθμών ελευθερίας στο χώρο των φάσεων των φυσικών καταστάσεων χρησιμοποιείται θεσεογραφικός χώρος τριών διαστάσεων αντί του συνηθισμένου χώρου έξι διαστάσεων.

6.3 Αναλυτική Δυναμική και Διαφορική Γεωμετρία

Η έκφραση των εξισώσεων κίνησης μέσω της αρχής της ελάχιστης δράσης μας επιτρέπει τη θεμελιακή σύνδεση της Αναλυτικής Μηχανικής με τη Διαφορική Γεωμετρία.

Θεωρήστε ένα σύστημα n υλικών σημείων, αρχικά χωρίς την επίδραση καμίας δύναμης εκτός των δυνάμεων των δεσμών. Το σύστημά μας συνεπώς περιγράφεται πλήρως από την κινητική του ενέργεια.

$$T = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{2} m_\ell |\dot{\vec{x}}|^2 = \sum_{i,k=1}^{m} T_{ik}(q)\, \dot{q}_i\, \dot{q}_k, \tag{6.3-1}$$

όπου
$$T_{ik}(q) = \sum_\ell \frac{\partial \vec{x}_\ell}{\partial q_i}\frac{\partial \vec{x}_\ell}{\partial q_k}.$$
Ο πίνακας $T_{ik}(q)$ της κινητικής ενέργειας, όντας συμμετρικός ως προς i, k είναι θετικός (positive definite) (βλ. Πρόβλημα 1), και βάσει αυτού το τετράγωνο του *κινηματικού στοιχείου τόξου*
$$(ds)^2 = T(dt)^2 = \sum_{i,k}^m T_{ik}(q)\, dq_i\, dq_k, \tag{6.3-2}$$
ορίζει μια μετρική Riemann στο θεσεογραφικό χώρο.

Οι Γεωδαισιακές γραμμές του χώρου αυτού είναι εξ' ορισμού οι καμπύλες $q_i(s)$ οι οποίες καθιστούν το ολοκλήρωμα
$$\int ds = \int \sqrt{\sum_{i,k}^m T_{ik}(q)\, dq_i\, dq_k}, \tag{6.3-3}$$
ακρότατο, δηλαδή
$$\delta \int ds = \sum_{\ell=1}^m \int_{s_1}^{s_2} \left[\frac{\partial}{\partial q_\ell}\sqrt{T} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial}{\partial \frac{dq_\ell}{ds}}\sqrt{T}\right)\right] \delta q_\ell\, ds = 0, \tag{6.3-4}$$
όπου $\delta q_\ell(s_1) = \delta q_\ell(s_2) = 0, \;\; \ell = 1, 2, \ldots, m$.

Από την (6.3-4) έπονται και οι διαφορικές εξισώσεις των γεωδαισιακών γραμμών,
$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial}{\partial \frac{dq_\ell}{ds}}\sqrt{T}\right) - \frac{\partial}{\partial q_\ell}\sqrt{T} = 0. \tag{6.3-5}$$

Οι εξισώσεις αυτές δίνονται συνήθως υπό τη μορφή[1] (βλ. Πρόβλημα 2),
$$\frac{d^2 q_i}{(ds)^2} + \Gamma^i_{k\ell}\frac{dq_k}{ds}\frac{dq_\ell}{ds} = 0, \tag{6.3-6}$$
όπου
$$\Gamma^i_{k\ell} = \frac{T^{ir}}{2}\left(\frac{\partial}{\partial q_\ell}T_{rk} + \frac{\partial}{\partial q_k}T_{r\ell} - \frac{\partial}{\partial q_r}T_{k\ell}\right). \tag{6.3-7}$$

Θα δείξουμε τώρα το θεμελιώδες θεώρημα:

Θεώρημα: *Οι τροχιές του ελεύθερου συστήματος και οι γεωδαισιακές γραμμές του θεσεογραφικού χώρου, εφοδιασμένοι με την μετρική της κινητικής ενέργειας ταυτίζονται.*

[1] Βλέπε π.χ. *Ηλεκτρομαγνητική Θεωρία, Τεύχος Ι, Κεφ. 1* του συγγραφέα.

Για την απόδειξη του πιο πάνω θεωρήματος θα χρησιμοποιήσουμε το εξής λήμμα.

Οι γεωδαισιακές γραμμές (6.3-3), (6.3-4) καθιστούν ακρότατο $\delta I = 0$ για τυχαίο «ολοκλήρωμα δράσης» της μορφής

$$I = \int F\left(T_{ik}(q)\frac{dq_i}{ds}\frac{dq_k}{ds}\right) ds, \qquad (6.3\text{-}8)$$

όπου $F(T)$ τυχαία συνάρτηση της «κινητικής ενέργειας».

Απόδειξη

Από την (6.3-5) έχουμε

$$\begin{aligned}
&\delta I = \\
&= \int F'\left[\frac{\partial}{\partial q_\ell}\left(\sqrt{T_{ik}\frac{dq_i}{ds}\frac{dq_k}{ds}}\right)\delta q_\ell + \frac{\partial}{\partial\frac{dq_\ell}{ds}}\left(\sqrt{T_{ik}(q)\frac{dq_i}{ds}\frac{dq_k}{ds}}\right)\delta\dot{q}_\ell\right] ds = \\
&= \int F'\left\{\frac{\partial}{\partial q_\ell}\left(\sqrt{T_{ik}\frac{dq_i}{ds}\frac{dq_k}{ds}}\right) - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\frac{dq_\ell}{ds}}\left(\sqrt{T_{ik}(q)\frac{dq_i}{ds}\frac{dq_k}{ds}}\right)\right]\right\}\delta q_\ell\, ds,
\end{aligned} \qquad (6.3\text{-}9)$$

όπου για τη μετάβαση από το δεύτερο μέλος στο τρίτο μέλος της πιο πάνω ισότητας έγινε μερική ολοκλήρωση και χρησιμοποιήθηκε η ταυτότητα

$$\frac{d}{ds}\left[F'\left(\sqrt{T_{ik}\frac{dq_i}{ds}\frac{dq_k}{ds}}\right)\right] = 0. \qquad (6.3\text{-}10)$$

Συγκρίνοντας τις (6.3-9) με την (6.3-4) η απόδειξη του λήμματος έχει τελειώσει. Υποτίθεται ότι $F' \neq 0$ (αφού είναι πυρήνας μη μηδενικού συναρτησοειδούς).

Για την απόδειξη του θεωρήματος αρκεί να εκφράσουμε τη δράση

$$\int T_{ik}\frac{dq_i}{dt}\frac{dq_k}{dt}\, dt = 0,$$

στη μορφή (6.3-8). Έτσι έχουμε

$$\int T_{ik}\frac{dq_i}{dt}\frac{dq_k}{dt}\, dt = \int T_{ik}\frac{dq_i}{ds}\frac{dq_k}{ds}\frac{ds}{dt}\, ds = \int F\left(\sqrt{x}\right)\frac{ds}{dt}\, ds, \qquad (6.3\text{-}11)$$

όπου $F(x) = x^2$.

Η παρουσία του επιπρόσθετου παράγοντα ds/dt απλά προκαλεί μια αλλαγή μεταβλητής της ολοκλήρωσης και δεν αλλοιώνει τη γεωμετρία των Γεωδαισιακών γραμμών.

Τα πιο πάνω μπορούν να επεκταθούν και σε γενικά συντηρητικά συστήματα παρουσία δυναμικού $U \neq 0$. Για ένα τέτοιο σύστημα $L = T - U$ οι τροχιές σταθερής ενέργειας E, συμπίπτουν με τις γεωδαισιακές γραμμές του μετρικού στοιχείου τόξου

$$\sum_{i,k=1}^{\nu} \sqrt{2\,[E - U(q)]\, T_{ik}\, dq_i dq_k},$$

του Jacobi. Φυσικά ο πρόσθετος συντελεστής $E - U = T$ ορίζει τη στάθμη της κινητικής ενέργειας στην εφαπτομενική περιοχή κάθε σημείου q. Έτσι η Δυναμική έχει μετατραπεί σε Γεωμετρία. Η αντίστροφη πορεία είναι επίσης χρήσιμη. Η μετάθεση του μοναδιαίου εφαπτομενικού διανύσματος μιας γεωδαισιακής γραμμής ενός χώρου Riemann παράλληλα προς αυτή μπορεί να ερμηνευθεί ως *μετάθεση του διανύσματος της ταχύτητας ελεύθερου υλικού σημείου*.

Αντί του συνηθισμένου νόμου της αδράνειας:

> *Τα ελεύθερα υλικά σημεία κινούνται ισοταχώς και ευθύγραμμα, ως προς αδρανειακά συστήματα αναφοράς,*

έχουμε:

> *Ελεύθερα υλικά συστήματα κινούνται «ισοταχώς» κατά μήκος των γεωδαισιακών γραμμών του θεσεογραφικού χώρου.*

Προβλήματα

1. Δείξετε ότι το γενικευμένο κινηματικό στοιχείο τόξου ορίζει ένα μετρικό τανυστή Reimann στο θεσεογραφικό χώρο.

2. Ξεκινώντας από τις εξισώσεις Lagrange (6.3-5), επιβεβαιώσετε τη μορφή (6.3-6) των εξισώσεων των Γεωδαισιακών γραμμών.

3. Υλικό σημείο κινείται χωρίς τριβή πάνω σε επιφάνεια σφαίρας. Να βρεθούν οι τροχιές και να δειχθεί ότι αυτές αποτελούν γεωδαισιακές με τη μετρική της συνηθισμένης απόστασης.

4. Δείξετε ότι με την παρουσία ℓ πρόσθετων δεσμών

   $$\phi_k(q_1, q_2, \ldots, q_m, t) = 0, \;\; k = 1, 2, \ldots, \ell,$$

   οι εξισώσεις του Lagrange τροποποιούνται ως εξής

   $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{\ell} \lambda_k(t) \frac{\partial \phi_k}{\partial q_i}.$$

   Οι συντελεστές λ καλούνται πολλαπλασιαστές του Lagrange.

5. Αν $g_{ij}(q)$ είναι ο μετρικός τανυστής του θεσεογραφικού χώρου, δείξτε ότι οι αντιδράσεις κάθε δεσμού ϕ_k δίνονται από τον τύπο

$$\lambda_k(t)\sqrt{g_{ij}\frac{\partial\phi_k}{\partial q_i}\frac{\partial\phi_k}{\partial q_j}}.$$

6. Να βρεθούν οι γεωδαισιακές κυλινδρικής επιφάνειας και η αντίδραση του δεσμού πάνω σε υλικό σημείο μάζας $m = 1$ που κινείται σε αυτή χωρίς την επίδραση της τριβής.

7. Υλικό σημείο μάζας m κινείται χωρίς την επίδραση της τριβής πάνω σε κυκλική στεφάνη ακτίνας α. Βρείτε την αντίδραση του δεσμού όταν η στεφάνη περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega(t)$.

Κεφάλαιο 7

Συμμετρίες - Θεωρήματα διατηρήσεως - Κανονικές εξισώσεις Hamilton

7.1 Θεώρημα Noether

Έστω $t \to t'(t)$, $q(t) \to q'(t')$ μια ομάδα μετασχηματισμών του χωρόχρονου, δηλαδή των συντεταγμένων q_i του θεσεογραφικού χώρου και του χρόνου t. Οι μετασχηματισμοί αυτοί μπορούν να θεωρηθούν και ως αλλαγή παρατηρητών. Εάν πρόκειται για συνεχή τοπολογική ομάδα μετασχηματισμών, ομάδας Lie, οι απειροστοί μετασχηματισμοί εκφράζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} t' &= t + \tau\delta t \\ q'_i(t) &= q_i(t) + \sum_{\mu=1}^{\nu} Q_{i\mu}\delta\lambda^{\mu},\ \ i = 1, 2, \ldots, \mu, \end{aligned} \tag{7.1-1}$$

όπου οι πίνακες (τ, Q) αποτελούν τους γεννήτορες του μετασχηματισμού, ο δείκτης i χαρακτηρίζει τους βαθμούς ελευθερίας του συστήματος και το δείκτης μ τους μετασχηματισμούς.

Οι μετασχηματισμοί αυτοί δεν αφορούν σε χρονική εξέλιξη. Εάν τους συσχετίσουμε με την χρονική εξέλιξη του συστήματος έχουμε τη συναρτησιακή μεταβολή

$$\begin{aligned} \tilde{\delta} q_i \equiv q'_i(t') - q_i(t') &= q'_i(t') - q_i(t) + q_i(t) - q_i(t') = \\ &= \sum_{\mu} Q_{i\mu}\delta\lambda^{\mu} - [q_i(t + \tau\delta t) - q_i(t)] = \end{aligned}$$

$$= \sum_{\mu=1}^{n} Q_{i\mu}\delta\lambda^{\mu} - \dot{q}_i(t)\tau\delta t + O(\delta^2). \tag{7.1-2}$$

Ώστε η συναρτησιακή μεταβολή του συστήματος είναι

$$\tilde{\delta} q_i = -\dot{q}_i(t)\tau\delta t + \sum_{\mu=1}^{\nu} Q_{i\mu}\delta\lambda^{\mu}. \tag{7.1-3}$$

Θεωρούμε τώρα τη μεταβολή της δράσης που οφείλεται σε ένα τέτοιο μετασχηματισμό:

$$\begin{aligned}
\delta\left(\int_{t_1}^{t_2} L(q_i,\dot{q}_i,t)\,dt\right) &= \int_{t_1}^{t_2'} L(q_i',\dot{q}_i',t)\,dt' + \int_{t_1}^{t_2} L(q_i,\dot{q}_i,t')\,dt' = \\
= \int_{t_1}^{t_2} L(q_i',\dot{q}_i',t')\,dt' - \int_{t_1}^{t_2} L(q_i,\dot{q}_i,t')\,dt' + \int_{t_1'}^{t_1} L(q_i',\dot{q}_i',t')\,dt' - \\
- \int_{t_2}^{t_2'} L(q_i',\dot{q}_i',t')\,dt' = \\
= \int_{t_1}^{t_2} \tilde{\delta} L(q_i,\dot{q}_i,t)\,dt + \tau_2 L_2 \delta t_2 - \tau_1 L_1 \delta t_1 = \\
= \int_{t_1}^{t_2} \tilde{\delta} L(q_i,\dot{q}_i,t)\,dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(L\tau\delta t\right)\,dt = \\
= \int_{t_1}^{t_2} \left[\tilde{\delta}(q_i,\dot{q}_i,t) + \frac{d}{dt}\left(L\tau\,\delta t\right)\right] dt = \\
= \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\tilde{\delta} q_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\tilde{\delta}\dot{q}_i + \frac{d}{dt}\left(L\tau\,\delta t\right)\right] dt = \\
= \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\tilde{\delta} q_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\tilde{\delta}\dot{q}_i + \frac{d}{dt}\left(L\tau\,\delta t\right)\right] dt = \\
= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\tilde{\delta} q_i + L\tau\,\delta t\right) dt = \\
= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\sum_\mu Q_{i\mu}\delta\lambda^{\mu} - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\,\tau\,\delta t + L\tau\,\delta t\right) dt = \\
= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left[\sum_\mu \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} Q_{i\mu}\right)\delta\lambda^{\mu} - \tau\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L\right)\delta\tau\right] dt
\end{aligned} \tag{7.1-4}$$

Αν η Lagrangian είναι τέτοια ώστε το ολοκλήρωμα της δράσης να είναι αναλλοίωτο στο μετασχηματισμό (7.1-1), δηλαδή $\delta I = 0$, έχουμε

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{\mu}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}Q_{i\mu}\right)\delta\lambda^{\mu} - \tau\left(\sum_{i}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L\right)\delta t\right] = 0. \tag{7.1-5}$$

Από την (7.1-5), επειδή τα $\delta\lambda^{\mu}$ και δt είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, έπεται ότι

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}Q_{i\mu}\right) = 0, \tag{7.1-6}$$

και

$$\frac{d}{dt}\left[\tau\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L\right)\right] = 0, \tag{7.1-7}$$

ή

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}Q_{i\mu} = \text{const}, \tag{7.1-8}$$

και

$$\tau\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L\right) = \text{const} \tag{7.1-9}$$

Οι εξισώσεις (7.1-8) και (7.1-9) εκφράζουν βασικά θεωρήματα διατηρήσεως. Έτσι αποδείχτηκε το θεμελειώδες θεώρημα της Noether:

> *Σε κάθε γεννήτορα μιας συνεχούς ομάδας συμμετρίας του ολοκληρώματος της δράσης, δηλαδή ομάδας η οποία αφήνει το ολοκλήρωμα της δράσης αναλλοίωτο, αντιστοιχεί και ένα διατηρούμενο μέγεθος.*

Για τη διατήρηση δεν αρκεί το αναλλοίωτο των εξισώσεων της κίνησης αλλά απαιτείται και το αναλλοίωτο της δράσης (βλ. Πρόβλημα 1).

7.2 Χωροχρονικές συμμετρίες - Ολοκληρώματα κίνησης

7.2.1 Διατήρηση της γραμμικής ορμής

Έστω σύστημα n-υλικών σημείων που περιγράφονται από τα διανύσματα θέσης $\vec{q}(m)$, $m = 1, 2, \ldots, n$. Θεωρείστε την ομάδα μετασχηματισμών μεταθέσεως των συντεταγμένων:

$$\vec{q}(m) \to \vec{q}\,'(m) = \vec{q}(m) + \delta\vec{q}. \tag{7.2-1}$$

Συγκρίνοντας αυτούς τους μετασχηματισμούς με τους μετασχηματισμούς της (7.1-1) βρίσκουμε

$$Q_{i\mu}(m) = \delta_{i\mu}, \quad i, \mu = 1, 2, 3, \; m = 1, 2, \ldots, n,$$

όπου $\delta_{i\mu}$ το δέλτα του Kronecker.

Εισάγοντας τα $Q_{i\mu}(m)$ στο θεώρημα της Noether

$$\sum_{m=1}^{N} \left[\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(m)} Q_{i\mu}(m) \right] = \text{const},$$

όπου στην προκειμένη περίπτωση $\partial L / \partial \dot{q}_i(m) = P_i(m)$, η i-οστή συνιστώσα της γραμμικής ορμής του υλικού σημείου m. Δηλαδή

$$\sum_{m=1}^{N} \left[\sum_{i=1}^{3} P_i(m) \delta_{i\mu} \right] = \sum_{m=1}^{N} P_\mu(m) = P_\mu = \text{const}, \; \mu = 1, 2, 3, \tag{7.2-2}$$

ή

$$\sum_{m=1}^{n} \vec{P}(m) = \vec{P} = \text{const}. \tag{7.2-3}$$

Ώστε τελικά δείξαμε ότι

> *Το αναλλοίωτο του ολοκληρώματος της δράσης σε παράλληλη μετάθεση έχει ως αποτέλεσμα τη διατήρηση της ολικής γραμμικής ορμής του συστήματος.*

7.2.2 Διατήρηση της στροφορμής

Θεωρούμε το μετασχηματισμό περιστροφής του δυναμικού συστήματος κατά γωνία $\delta\vec{\alpha}$

$$\delta\vec{q}(m) = \delta\vec{\alpha} \times \vec{q}(m), \tag{7.2-4}$$

ή αναλυτικά

$$\begin{aligned} \delta q_1 &= \delta\alpha_2 \, q_3(m) - \delta\alpha_3 \, q_2(m) \\ \delta q_2 &= \delta\alpha_3 \, q_1(m) - \delta\alpha_1 \, q_3(m) \\ \delta q_3 &= \delta\alpha_1 \, q_2(m) - \delta\alpha_2 \, q_1(m) \end{aligned} \tag{7.2-5}$$

Οι τύποι (7.2-5) εκφράζονται συνήθως με τη χρήση του αντισυμμετρικού συμβόλου $\epsilon_{ik\ell}$,

$$\delta q_i(m) = \sum_{\substack{k=1 \\ \ell=1}}^{3} \epsilon_{ijk} \, \delta\alpha_k \, q_\ell(m). \tag{7.2-6}$$

Υπενθυμίζουμε ότι το αντισυμμετρικό σύμβολο $\epsilon_{ik\ell}$ ορίζεται ως εξής:

$$\epsilon_{ik\ell} = \begin{cases} 1 & \text{αν τα } i, k, \ell \text{ αποτελούν άρτια μετάθεση των } 1\,2\,3 \\ -1 & \text{αν τα } i, k, \ell \text{ αποτελούν περιττή μετάθεση των } 1\,2\,3 \\ 0 & \text{εάν } i = k \text{ ή } k = \ell \text{ ή } \ell = i. \end{cases}$$

Πιο κάτω θα ακολουθήσουμε ένα άλλο συμβολισμό σε συνδυασμό με τελεστές πινάκων, ο οποίος θα μας χρησιμεύσει στο κεφάλαιο 8 της στροφικής κίνησης στερεού. Το διάνυσμα της θέσης μπορεί να παρασταθεί ως ένα πίνακας μιας στήλης

$$\left|\vec{q}(m)\right\rangle = \begin{pmatrix} q_1(m) \\ q_2(m) \\ q_3(m) \end{pmatrix}, \tag{7.2-7}$$

και

$$\begin{aligned} \left|\vec{q}(m)\right\rangle &= \begin{pmatrix} \delta q_1(m) \\ \delta q_2(m) \\ \delta q_3(m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta\alpha_3 & \delta\alpha_2 \\ \delta\alpha_3 & 0 & -\delta\alpha_1 \\ -\delta\alpha_2 & \delta\alpha_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta q_1(m) \\ \delta q_2(m) \\ \delta q_3(m) \end{pmatrix} = \\ &= \left\{ \delta\alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta\alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \right. \\ &\left. +\delta\alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \delta q_1(m) \\ \delta q_2(m) \\ \delta q_3(m) \end{pmatrix} = \\ &= (\delta\alpha_1\, J_1 + \delta\alpha_2\, J_2 + \delta\alpha_3\, J_3) \left|\vec{q}(m)\right\rangle = \left(\vec{J} \cdot \delta\vec{\alpha}\right) \left|\vec{q}(m)\right\rangle . \end{aligned} \tag{7.2-8}$$

όπου ο πίνακας διάνυσμα $\vec{J}$ είναι ο γεννήτορας της ομάδας των περιστροφών (βλ. §8.1). Ο πίνακας $\vec{J}$ έχει ως συνιστώσες του τους 3×3 πίνακες

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.2-9}$$

Παρατηρούμε ότι τα στοιχεία των πινάκων αυτών μπορούν να εκφραστούν και μέσω του αντισυμμετρικού συμβόλου

$$\{J_\ell\}_{ik} = \epsilon_{i\ell k}.$$

Από την (7.2-8) έχουμε

$$\delta\vec{q}(m) = \left(\vec{J} \cdot \delta\vec{\alpha}\right) \left|\vec{q}(m)\right\rangle = \sum_{k=1}^{3} J_k\, \delta\alpha^k \left|\vec{q}(m)\right\rangle = \sum_{k=1}^{3} \left(J_k \left|\vec{q}(m)\right\rangle\right) \delta\alpha^k,$$

ή

$$\delta q_i(m) = \sum_k \left(J_k \left| \vec{q}(m) \right\rangle \right) \delta\alpha^k. \tag{7.2-10}$$

Από τη σύγκριση αυτής με την (7.1-2) παίρνουμε

$$Q_{ik}(m) = \left(J_k \left| \vec{q}(m) \right\rangle \right)_i \tag{7.2-11}$$

Εισάγοντας αυτή τη σχέση στη (7.2-8) η οποία στην προκειμένη περίπτωση παίρνει τη μορφή

$$\sum_{m=1}^{N} \left[\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(m)} Q_{ik}(m) \right] = \text{const}, \tag{7.2-12}$$

όπου

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(m)} = P_i(m)$$

έχουμε

$$\sum_{m=1}^{N} \left[\sum_{i=1}^{3} P_i(m) \left(J_k \left| \vec{q}(m) \right\rangle \right)_i \right] = \text{const}, \;\; k = 1, 2, 3,$$

ή

$$\sum_{m=1}^{N} \left\langle \vec{P}(m) \right| J_k \left| \vec{q}(m) \right\rangle = \text{const}. \tag{7.2-13}$$

Η εξίσωση (7.2-13) εκφράζει τη διατήρηση της ολικής στροφορμής του συστήματος. Η k συνιστώσα $J_k(m)$ στροφορμής του m σωματιδίου είναι

$$J_k^{o\lambda} = \sum_{m=1}^{n} J_k(m), \;\; k = 1, 2, 3. \tag{7.2-14}$$

Διανυσματικά η διατήρηση της στροφορμής εκφράζεται μέσω του

$$\vec{J}^{o\lambda} = \sum_{m=1}^{n} \left\langle \vec{P}(m) \right| \vec{J} \left| \vec{q}(m) \right\rangle = \sum_{m=1}^{n} \vec{J}(m) = \text{const}.$$

άρα $\vec{J} = \text{const}$.

Έτσι τελικά αποδείχτηκε το θεώρημα διατήρησης της στροφορμής.

Το αναλλοίωτο της δράσης σε μετασχηματισμούς περιστροφής έχει ως αποτέλεσμα τη διατήρηση της συνολικής στροφορμής του συστήματος.

Τα πιο πάνω είναι δυνατό να εξαχθούν και με απλούστερο τρόπο ως εξής.

Η σύγκριση της (7.2-6) και της (7.1-1) μας δίνει αρχικά

$$Q_{ik}(m) = \sum_{\ell=1}^{3} \epsilon_{ik\ell}\, q_\ell(m). \tag{7.2-15}$$

Έτσι η (7.2-12) γράφεται

$$\sum_{m=1}^{n} \left\{ \sum_{i=1}^{3} \left[P_i(m) \sum_{\ell=1}^{3} \epsilon_{ik\ell}\, q_\ell(m) \right] \right\} = \text{const}, \tag{7.2-16}$$

ή

$$\sum_{m=1}^{n} \left[\sum_{\substack{i=1\\ \ell=1}} P_i(m)\, \epsilon_{ik\ell}\, q_\ell(m) \right] = \text{const}. \tag{7.2-17}$$

Αλλά εξ' ορισμού

$$\sum_{\substack{k=1\\ \ell=1}} \epsilon_{ik\ell}\, P_k\, q_\ell = \vec{P} \times \vec{q}. \tag{7.2-18}$$

Επομένως η (7.2-16) γράφεται

$$\sum_{m=1}^{n} \left[\vec{P}(m) \times \vec{q}(m) \right]_k = \text{const},$$

ή

$$\sum_{m=1}^{n} J_k(m) = \text{const}, \;\; k = 1, 2, 3.$$

και ήταν αυτό ακριβώς που θέλαμε να δείξουμε.

7.2.3 Διατήρηση της ενέργειας

Θεωρείστε την ομάδα μετασχηματισμών της χρονικής μετάθεσης

$$t \to t' = t + \delta t.$$

Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε ότι $\tau = 1$ και η (7.1-9) δίνει:

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = \text{const}. \tag{7.2-19}$$

Η δυναμική συνάρτηση $\sum_i(\partial L/\partial \dot{q}_i)\dot{q}_i - L$ καλείται *Hamiltonian* και συμβολίζεται με H. Στην περίπτωση του συντηρητικού συστήματος $L = T - V$, η Hamiltonian αντιστοιχεί προς την ολική ενέργεια του συστήματος (βλ. Πρόβλημα 2).

Πράγματι σε αυτή την περίπτωση

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = 2T. \tag{7.2-20}$$

(θεώρημα του Euler), και

$$H = 2T - (T - V) = T + V = E. \tag{7.2-21}$$

Ώστε η ολική ενέργεια (Hamiltonian) αποτελεί γεννήτορα της ομάδας των μετασχηματισμών της χρονικής μετάθεσης. Αυτό σήμερα γίνεται δεκτό αξιωματικά ως θεμελιακός ορισμός της Hamiltonian και για συστήματα των οποίων αγνοούμε τη δυναμική (βλ. επίσης *Τεύχος I*, §2.3).

Έτσι φτάσαμε στο θεμελιώδες θεώρημα διατήρησης της ολικής ενέργειας

> *Το αναλλοίωτο του ολοκληρώματος της δράσης σε χρονική μετάθεση, ή συμμετρία ως προς χρονική μετάθεση, έχει ως αποτέλεσμα τη διατήρηση της ολικής ενέργειας του συστήματος.*

7.3 Κανονικές εξισώσεις του Hamilton

Στην προηγούμενη παράγραφο η Hamiltonian ορίστηκε ως ο γεννήτορας του διαφορικού της δράσης στους μετασχηματισμούς των χρονικών μεταθέσεων

$$H = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L. \tag{7.3-1}$$

Αν στην έκφραση αυτή εισάγουμε τις *κανονικές ορμές* p_i των γενικευμένων θέσεων q_i (βλ. Πρόβλημα 3),

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \tag{7.3-2}$$

η Hamiltonian παίρνει τη μορφή

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L. \tag{7.3-3}$$

Μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι η Hamiltonian η οποία παρουσιάζεται στην (7.3-3) ως συνάρτηση των p, q και $\dot{q}$, είναι συνάρτηση μόνο των p

και q (και ενδεχομένως και του t). Πράγματι, διαφορίζοντας την (7.3-3) έχουμε

$$dH = \sum_i p_i\, d\dot{q}_i + \sum_i \dot{q}_i\, dp_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (7.3\text{-}4)$$

Αλλά εξ' ορισμού

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (7.3\text{-}5)$$

και από τις εξισώσεις του Lagrange

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}. \quad (7.3\text{-}6)$$

Έτσι η (7.3-4) γίνεται

$$dH = \sum_i \dot{q}_i\, dp_i - \sum_i \dot{p}_i\, dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (7.3\text{-}7)$$

Δηλαδή δείξαμε ότι η Hamiltonian είναι συνάρτηση μόνο των p, q και t.

$$H = H(p_i, q_i, t). \quad (7.3\text{-}8)$$

Διαφορίζοντας την (7.3-8) έχουμε

$$dH = \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt, \quad (7.3\text{-}9)$$

και συγκρίνοντας αυτή με την (7.3-7) λαμβάνουμε τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= -\frac{\partial L}{\partial t}. \end{aligned} \quad (7.3\text{-}10)$$

Οι εξισώσεις (7.3-10) αποτελούν τις *κανονικές εξισώσεις του Hamilton*.

Μέσω αυτών των εξισώσεων Hamilton οι δευτέρας τάξης διαφορικές εξισώσεις της κίνησης στο θεσεογραφικό χώρο των m διαστάσεων μετατράπηκαν σε σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης ως προς το χρόνο στο χώρο των p και q, ο οποίος καλείται *χώρος των φάσεων*, διάστασης $2m$.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση κατά την οποία η Hamiltonian είναι κυκλική ως προς μια γενικευμένη μεταβλητή, συντεταγμένη q ή ορμή p, δηλαδή $\partial H/\partial q = 0$ ή $\partial H/\partial p = 0$. Τότε η συζυγής μεταβλητή διατηρείται!

Έτσι για παράδειγμα έχουμε διατήρηση της ολικής γραμμικής ορμής όταν η Hamiltonian είναι ανεξάρτητη της μεταβλητής της «θέσης του κέντρου μάζας» (αναλλοίωτη σε μετάθεση του κέντρου μάζας), ή διατήρηση της ολικής στροφορμής όταν η Hamiltonian είναι ανεξάρτητη των γωνιών προσανατολισμού του συστήματος.

Αυτό μας επιτρέπει την άμεση ολοκλήρωση της κίνησης και τον υποβιβασμό του πλήθους των μεταβλητών του συστήματος. Αν οι $q_1, q_2, \ldots, q_r$ αποτελούν κυκλικές συντεταγμένες και $c_1, c_2, \ldots, c_r$ είναι οι σταθερές τιμές των συζυγών τους διατηρούμενων μεταβλητών, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το σύστημα περιγράφεται από μια νέα συνάρτηση Hamilton, H'

$$H'(q_{r+1}, \ldots, q_m; p_{r+1}, \ldots, p_m; t) = H(c_1, \ldots, c_r; q_{r+1}, \ldots, q_m; p_1, \ldots, p_m). \tag{7.3-11}$$

Αντί της Hamiltonian (7.3-11) για την απαλειφή των κυκλικών συντεταγμένων πολλές φορές χρησιμοποιείται η Ruthian

$$R = \sum_{i=1}^{r} p_i\, q_i - H \tag{7.3-12}$$

ως Lagrangian συνάρτηση (βλ. Πρόβλημα 2)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial R}{\partial q_k} = 0,\;\; k = r+1, \ldots, n. \tag{7.3-13}$$

7.4 Κανονικοί μετασχηματισμοί

Η εύρεση κυκλικών μεταβλητών δεν είναι πάντοτε εύκολη, αλλά πολλές φορές απαιτείται κατάλληλος μετασχηματισμός για την αποκάλυψή τους. Για αυτό το σκοπό η χαμιλτονιανή διατύπωση των εξισώσεων κίνησης στην κανονική μορφή (7.3-10) προσφέρεται ιδιαίτερα, λόγω της συμμετρίας με την οποία παρουσιάζονται σε αυτές οι γενικευμένες συντεταγμένες και συζυγείς ορμές. Το γεγονός αυτό υποδεικνύει τη δυνατότητα εφαρμογής *κανονικών μετασχηματισμών*.

$$\begin{aligned} (q, p) &\to (q', p'), \\ H(q, p) &\to H'(q', p'), \end{aligned} \tag{7.4-1}$$

ώστε

$$\begin{aligned} \dot{q}' &= \frac{\partial H'}{\partial p}, \\ \dot{p}' &= -\frac{\partial H'}{\partial q}. \end{aligned} \tag{7.4-2}$$

Οι κανονικοί μετασχηματισμοί αφήνουν τις κανονικές εξισώσεις κίνησης και το φυσικό περιεχόμενό τους αναλλοίωτο.

Σύμφωνα με την (6.1-27) και τον ορισμό (7.3-3) της Hamiltonian έχουμε (βλ. Πρόβλημα 7) όπου $g(q,q',t) = -\phi(q,q',t)$

$$\sum_i p_i\,\dot{q}_i - H = \sum_i p_i'\,\dot{q}_i' - H' + \frac{d}{dt}\phi(q,q',t), \tag{7.4-3}$$

και

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial}{\partial q_i}\phi(q,q',t), \\ p_i' &= -\frac{\partial}{\partial q_i'}\phi(q,q',t), \\ H' &= H + \frac{\partial}{\partial t}\phi(q,q',t) \end{aligned} \tag{7.4-4}$$

Η συμμετρία της Hamiltonian ως προς p και q μας επιτρέπει και γενικότερους μετασχηματισμούς παρραγόμενους από γεννήτορες συναρτήσεις $\chi(q,p',t)$, $\gamma(p,q',t)$ ή $\omega(p,p',t)$ (βλ. Πρόβλημα 7). Σε αυτές τις περιπτώσεις έχουμε αντίστοιχα:

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial}{\partial q_i}\chi(q,p',t), \\ p_i' &= \frac{\partial}{\partial q_i'}\chi(q,p',t), \\ H' &= H + \frac{\partial}{\partial t}\chi(q,p',t) \end{aligned} \tag{7.4-5}$$

ή

$$\begin{aligned} p_i &= -\frac{\partial}{\partial q_i}\gamma(p,q',t), \\ p_i' &= -\frac{\partial}{\partial q_i'}\gamma(p,q',t), \\ H' &= H + \frac{\partial}{\partial t}\gamma(p,q',t) \end{aligned} \tag{7.4-6}$$

ή

$$
\begin{aligned}
p_i &= -\frac{\partial}{\partial q_i}\omega(p, p', t),\\
p'_i &= \frac{\partial}{\partial q'_i}\omega(p, p', t).
\end{aligned}
\tag{7.4-7}
$$

Με κατάλληλο κανονικό μετασχηματισμό η H μπορεί να έρθει σε απλή μορφή. Αναφέρουμε το κλασσικό παράδειγμα του αρμονικού ταλαντωτή (βλ. Πρόβλημα 7).

$$
H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}.
$$

Χρησιμοποιώντας ως γεννήτορα μετασχηματισμών τη συνάρτηση

$$
\alpha(q, q') = \frac{m}{2}\omega q^2 \cot q', \tag{7.4-8}
$$

όπου $\omega = \sqrt{k/m}$ η κυκλική συχνότητα του ταλαντωτή, έχουμε:

$$
\begin{aligned}
p &= m\omega q \cot q',\\
p' &= \frac{m\omega q^2}{2\sin^2 q'},
\end{aligned}
\tag{7.4-9}
$$

και

$$
H' = H = \omega\, p' \left(\cos^2 q' + \sin^2 q'\right) = \omega\, p'. \tag{7.4-10}
$$

Η Hamiltonian έγινε κυκλική ως προς q' και η συζυγής ορμή p' διατηρείται. Αυτή είναι ανάλογη της ενέργειας του συστήματος!

7.5 Αγκύλες Poisson

Θεωρούμε το δυναμικό μέγεθος A, συνάρτηση των p_i, q_i και t,

$$
A = A(p_i, q_i, t).
$$

Η ολική του παράγωγος ως προς το χρόνο είναι

$$
\frac{dA}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial A}{\partial q_i}\dot{q}_i\right) + \frac{\partial A}{\partial t}, \tag{7.5-1}
$$

ή λαμβάνοντας υπόψην και τις εξισώσεις του Hamilton

$$
\frac{dA}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial A}{\partial t}. \tag{7.5-2}
$$

Η ποσότητα

$$\{A,H\} = \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \right), \tag{7.5-3}$$

ονομάζεται *αγκύλη του Poisson* των μεγεθών A και H και συμβολίζεται με $\{A,H\}$. Έτσι η (7.5-2) γράφεται

$$\frac{dA}{dt} = \{A,H\} + \frac{\partial A}{\partial t}. \tag{7.5-4}$$

Η εξίσωση αυτή διέπει τη χρονική εξέλιξη του μεγέθους A.

Συνήθως μας ενδιαφέρει για δυναμικές μεταβλητές, οι οποίες δεν εξαρτώνται από το χρόνο ($\partial A/\partial t = 0$). Τότε η (7.5-4) γράφεται:

$$\frac{dA}{dt} = \{A,H\}. \tag{7.5-5}$$

Αν θεωρήσουμε την αγκύλη Poisson ως πράξη γινομένου (μη μεταθετικού) $\{A,B\} = iA \oplus B$, η εξίσωση (7.5-5) λαμβάνει τη μορφή

$$-i\frac{dA}{dt} = H \oplus A. \tag{7.5-6}$$

Δηλαδή ξαναβρήκαμε ότι η συνάρτηση Hamilton αποτελεί το γεννήτορα της χρονικής μετάθεσης των φυσικών μεγεθών. Ανάλογη εξίσωση θα δούμε και στην §8 όπου η στροφορμή αποτελεί το γεννήτορα των στροφών (8.1-4).

Μερικές από τις πλέον τυπικές ταυτότητες των αγκύλων Poisson είναι οι ακόλουθες

- αντισυμμετρία:

$$\{A,B\} = -\{B,A\}, \tag{7.5-7}$$

- προσεταιρισμός:

$$\{A,BC\} = \{A,B\}C + B\{A,C\}, \tag{7.5-8}$$

- ταυτότητα Jacobi:

$$\{A,\{B,C\}\} + \{B\{C,A\}\} + \{C,\{A,B\}\} = 0. \tag{7.5-9}$$

Οι αγκύλες Poisson μεταξύ ζεύγων κανονικών μεταβλητών είναι (βλ. Πρόβλημα 7)

$$\begin{aligned} \{q_i,q_j\} &= 0, \\ \{p_i,p_j\} &= 0, \\ \{q_i,p_j\} &= \delta_{ij}. \end{aligned} \tag{7.5-10}$$

Αυτές παραμένουν αναλλοίωτες σε κανονικούς μετασχηματισμούς και αυτό αποτελεί και ένα άλλο συνηθισμένο ορισμό τους.

Οι εξισώσεις (7.5-4) και (7.5-10) έχουν βασική σημασία αφού αποτελούν συνδετική έκφραση για τη μετάβαση από την Κλασσική Μηχανική στην Κβαντομηχανική,

$$\{A, B\} \leftrightarrow \frac{1}{i\hbar}[A, B], \tag{7.5-11}$$

όπου $\hbar$ η σταθερά του Planc και $[A, B]$ ο *μεταθέτης* $AB - BA$ *των Κβαντομηχανικών τελεστών των αντίστοιχων στα κλασσικά μεγέθη* A *και* B!

Προβλήματα

1. Βρείτε τη συνάρτηση Lagrange, η οποία περιγράφει το γραμμικό αρμονικό ταλαντωτή με απόσβεση. Παρατηρείστε ότι ενώ οι εξισώσεις κίνησης στην προκειμένη περίπτωση είναι αναλλοίωτες σε χρονικές μεταθέσεις, το ολοκλήρωμα της δράσης δεν παραμένει αναλλοίωτο και συνεπώς η ενέργεια του συστήματος δε διατηρείται.

   Υπόδειξη:

   $$L = \frac{1}{2}\left(m|\dot{\vec{x}}|^2 - k^2|\vec{x}|^2\right)e^{\frac{R}{m}t}$$

2. Η Hamiltonian εφαρμόζεται και σε δυναμικά U τα οποία εξαρτώνται και από την ταχύτητα. Δείξτε ότι η κίνηση σημειακού φορτίου e και μάζας m εντός εξωτερικού ηλεκτρομαγνητικού πεδίου $(\phi, \vec{A})$ δίνεται επίσης από την έκφραση

   $$H = \frac{1}{2m}\left|\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right|^2 + e\phi = \frac{1}{2}mv^2 + e\phi,$$

   της ολικής ενέργειας του σημείου. Επειδή οι μαγνητικές δυνάμεις είναι κάθετες στην τροχιά του σημείου μόνο το βαθμωτό δυναμικό παρουσιάζεται στη ενέργεια. Η ορμή $\vec{p}$ πιο πάνω είναι η «κανονική ορμή» (βλ. Πρόβλημα 3)

3. Οι κανονικές ορμές εν γένει, δεν ταυτίζονται με τις συνηθισμένες κινητικές ορμές. Δείξτε όιτ η κανονική ορμή $\vec{p}$ φορτίου e εντός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου είναι

   $$\vec{p} = m\vec{v} + \frac{e}{c}\vec{A},$$

   όπου $m\vec{v}$ η συνηθισμένη κινητική ορμή, μάζα του σημείου επί την ταχύτητα. Σε αντίθεση προς την $m\vec{v}$, η κανονική ορμή δεν είναι παρατηρήσιμο μέγεθος αλλά μεταβάλλεται μαζί με τη χρησιμοποιούμενη βαθμίδα δυναμικού.

4. Να εκφραστούν οι κανονικές εξισώσεις κίνησης για υλικό σημείο όπως την άσκηση 5 του §5.1.

5. Ποιά είναι η μεταβολή της κανονικής ορμής του σωματιδίου i κατά τη μετάβαση από την (6.1-15) στην (6.1-16); Συσχετίστε την με τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου (βλ. Πρόβλημα 1, §6.1).

6. Δείξτε ότι η Ruthian, η οποία ορίζεται από την (7.3-12) ικανοποιεί την εξίσωση Lagrange (7.3-13).

7. Χρησιμοποιώντας την αρχή της ελάχιστης δράσης αποδείξετε την (7.4-4). Λόγω συμμετρίας (p, q) στη Hamiltonian στους κανονικούς μετασχηματισμούς μπορούμε να περιλάβουμε και τους μετασχηματισμούς από γεννήτορες της μορφής $\chi(q, p', t)$, $\gamma(p, q', t)$ ή $\omega(p, p', t)$.

   Αποδείξετε με παρόμοιο τρόπο τις εξισώσεις (7.4-5), (7.4-6) και (7.4-7), οι οποίες αντιστοιχούν στους μετασχηματισμούς αυτούς.

8. Να θεωρηθεί το θεώρημα της Noether για συναρτήσεις Lagrange με ανώτερης τάξης παραγώγους (§6.2).

9. Δείξτε ότι η Αγκύλη Poisson $\{A, B\}$ μεταξύ δύο δυναμικών μεταβλητών $A = A(q, p, t)$ και $B = B(q, p, t)$ παραμένει αναλλοίωτη σε κανονικό μετασχηματισμό των συντεταγμένων $(q, p) \to (q', p')$.

Κεφάλαιο 8

Κίνηση στερεού με ένα σταθερό σημείο

8.1 Άλγεβρα και Γεωμετρία των στροφών

Για να περιγράψουμε την κίνηση στερεού το οποίο έχει ένα σημείο O σταθερό, θεωρούμε το τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων (X, Y, Z), ακλόνητα συνδεδεμένο με το στερεό. Η θέση του στερεού στο χώρο είναι πλήρως καθορισμένη από ένα πίνακα στροφής R, ο οποίος εάν εφαρμοστεί πάνω στο (X, Y, Z) το φέρνει στη θέση του ακίνητου αδρανειακού συστήματος αναφοράς (x, y, z) του χώρου. Στην περιγραφεί κατά Euler (σχήμα 8.1), η πιο πάνω στροφή R εκφράζεται ως γινόμενο

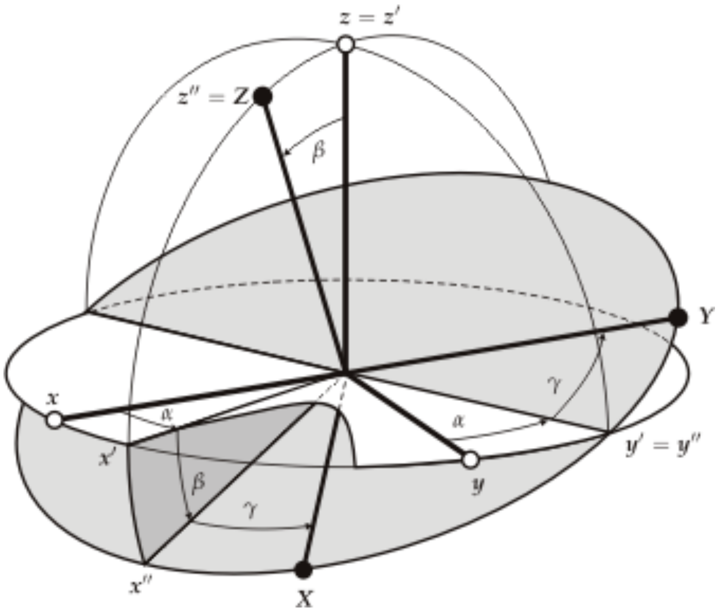
$$R = R_{z''}(\gamma) R_{y'}(\beta) R_z(\alpha) \tag{8.1-1}$$

τριών διαδοχικών περιστροφών $R_z(\alpha)$, $R_{y'}(\beta)$ και $R_{z''}(\gamma)$ γύρω από τους άξονες z, y' και z'' αντίστοιχα. Οι γωνίες (γ, β, α) καλούνται γωνίες του Euler. Η περιστροφή του στερεού γύρω από τον άξονα z κατά γωνία α μας δίνει το νέο σύστημα αξόνων $(x', y', z' = z)$ και φέρνει τον άξονα Z πάνω στο επίπεδο x'–z'. Η επόμενη περιστροφή του στερεού γύρω από τον άξονα y' κατά γωνία β μας δίνει το νέο σύστημα αξόνων $(x'', y'' = y', z'')$ και φέρνει τον Z πάνω στον z''. Τέλος η περιστροφή του στερεού γύρω από τον άξονα z'' κατά γωνία γ φέρνει τελικά σε πλήρη σύμπτωση τους (x, y, z) και τους (X, Y, Z).

Η συνισταμένη στροφή R της (8.1-1) συναρτήσει των γωνιών του Euler δίνεται αναλυτικά από τον πίνακα (βλ. Πρόβλημα 4)

$$R(\gamma, \beta, \alpha) = \begin{pmatrix} \mathrm{c}\gamma\,\mathrm{c}\alpha - \mathrm{c}\beta\,\mathrm{s}\gamma\,\mathrm{s}\alpha & \mathrm{c}\gamma\,\mathrm{s}\alpha + \mathrm{c}\beta\,\mathrm{s}\gamma\,\mathrm{c}\alpha & \mathrm{s}\beta\,\mathrm{s}\gamma \\ -\mathrm{s}\gamma\,\mathrm{c}\alpha - \mathrm{c}\beta\,\mathrm{c}\gamma\,\mathrm{s}\alpha & -\mathrm{s}\gamma\,\mathrm{s}\alpha + \mathrm{c}\beta\,\mathrm{c}\gamma\,\mathrm{c}\alpha & \mathrm{s}\beta\,\mathrm{c}\gamma \\ \mathrm{s}\beta\,\mathrm{s}\alpha & -\mathrm{s}\beta\,\mathrm{c}\alpha & \mathrm{c}\beta \end{pmatrix} \tag{8.1-2}$$

όπου με s συμβολίζεται το $\sin$ και με c συμβολίζεται το $\cos$.



Σχήμα 8.1: Ορισμός των γωνίων Euler.

Οι γωνίες του Euler αποτελούν γενικευμένες συντεταγμένες του στερεού.

Το σύνολο των στροφών αποτελεί ομάδα. Η ομάδα αυτή δεν είναι μεταθετική. Αν $R(\vec{\varphi}_1)$ και $R(\vec{\varphi}_2)$ δύο περιστροφές γύρω από τυχαίους άξονες, τότε εν γένει $R(\vec{\varphi}_1)R(\vec{\varphi}_2) \neq R(\vec{\varphi}_2)R(\vec{\varphi}_1)$. Εξαιρούνται οι περιστροφές γύρω από κοινό άξονα $\vec{\varphi} = \varphi\hat{n}$. Αυτές αποτελούν μεταθετικές (αβελιανές) υποομάδες των στροφών.

$$R(\varphi_1\hat{n})R(\varphi_2\hat{n}) = R(\varphi_2\hat{n})R(\varphi_1\hat{n}) = R((\varphi_1+\varphi_2)\hat{n}). \tag{8.1-3}$$

Από την (8.1-3) έπεται ότι οι περιστροφές γύρω από σταθερό άξονα $\hat{n}$ ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d}{d\varphi}R(\vec{\varphi}) = (\vec{J}\cdot\hat{n})R(\vec{\varphi}). \tag{8.1-4}$$

Η εξίσωση αυτή ολοκληρώνεται αμέσως (βλ. Πρόβλημα 1) και δίνει την εκθετική μορφή

$$R(\varphi\hat{n}) = e^{i(\vec{J}\cdot\hat{n})\varphi}, \tag{8.1-5}$$

όπου

$$\vec{J}\cdot\hat{n} = J^1 n_1 + J^2 n_2 + J^3 n_3.$$

Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{J}\cdot\hat{n}$, ο 3×3 πίνακας

$$\begin{pmatrix} 0 & in_3 & -in_2 \\ -in_3 & 0 & in_1 \\ in_2 & -in_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{8.1-6}$$

ισούται με την παράγωγο

$$-i \frac{\partial}{\partial \varphi} R(\varphi \hat{n}) \bigg|_{\varphi=0} .$$

Οι πίνακες

$$J^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J^3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8.1-7}$$

αποτελούν γεννήτορες των υποομάδων των περιστροφών γύρω από τους άξονες 1, 2 και 3 αντίστοιχα.

Οι γεννήτορες J^1, J^2 και J^3 των περιστροφών δεν είναι μεταθετικοί μεταξύ τους, αλλά ικανοποιούν, ως προς την πράξη της μετάθεσης

$$[J^k, J^\ell] \equiv J^k J^\ell - J^\ell J^k, \tag{8.1-8}$$

την ακόλουθη άλγεβρα

$$[J^k, J^\ell] = i\epsilon_{k\ell m} J^m \tag{8.1-9}$$

Αυτή καλείται Άλγεβρα Lie της ομάδας των περιστροφών και είναι προφανώς τρισδιάστατη.

8.2 Κινηματική της στροφικής κίνησης στερεού

Η κίνηση στερεού με ένα σημείο σταθερό αποτελεί μια συνεχή χρονολογική διαδοχή απειροστών περιστροφών $R(t_{k+1}, t_k) = e^{i\vec{J}\cdot\delta\vec{\varphi}_k}$ γύρω από στιγμιαίους άξονες

$$R(t) = \prod_{\substack{k \\ t_{i+1}-t_i \to 0 \\ k\to\infty}} R(t, t_k) R(t_k, t_{k-1}) \cdots R(t_1, t_0) R_0. \tag{8.2-1}$$

Από την πιο πάνω έκφραση (8.2-1), έπεται αμέσως ότι αν $\vec{\omega}(t) = d\vec{\varphi}/dt$ είναι η εκάστοτε στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα, η στροφή $R(t)$ του στερεού ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d}{dt} R(t) = \vec{J} \cdot \vec{\omega} R(t). \tag{8.2-2}$$

Έχοντας δεδομένη τη γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}(t)$, π.χ. μετά από λύση των εξισώσεων Euler (βλ. πιο κάτω), η διαφορική εξίσωση (8.2-2) μπορεί αμέσως να ολοκληρωθεί. Έχουμε

$$R(t) = \tau \left[\exp \left(i \int_{t_0}^{t} \vec{J} \cdot \vec{\omega}(t')\, dt' \right) \right] R_0, \tag{8.2-3}$$

όπου τ το σύμβολο της χρονολογικής διάταξης.

Η λύση (8.2-3), με τη χρονολογική διάταξη, αποτελεί στην ουσία μια άλλη ισοδύναμη έκφραση της (8.2-2). Το σύμβολο τ σημαίνει ότι στο ανάπτυγμα της εκθετικής συνάρτησης οι παράγοντας του κάθε γινομένου πινάκων

$$[\vec{J}\cdot\vec{\omega}(t_1)][\vec{J}\cdot\vec{\omega}(t_2)]\cdots[\vec{J}\cdot\vec{\omega}(t_n)]$$

διατάσσονται σε χρονολογική σειρά

$$\tau\left([\vec{J}\cdot\vec{\omega}(t_1)][\vec{J}\cdot\vec{\omega}(t_2)]\cdots[\vec{J}\cdot\vec{\omega}(t_n)]\right) = [\vec{J}\cdot\vec{\omega}(t_{i_1})][\vec{J}\cdot\vec{\omega}(t_{i_2})]\cdots[\vec{J}\cdot\vec{\omega}(t_{i_n})], \tag{8.2-4}$$

όπου $t_{i_1} > t_{i_2} > \cdots > t_{i_n}$.

Ιδιαίτερα απλή είναι η περίπτωση περιστροφικής κίνησης γύρω από σταθερό άξονα $\hat{n}$, οπότε το χρονολογικό σύμβολο είναι περιττό,

$$R(t) = \left[\exp\left(i\vec{J}\cdot\hat{n}\int_{t_0}^{t}\omega(t')\,dt'\right)\right]R_0. \tag{8.2-5}$$

Στη γενική περίπτωση η χρήση του τ είναι απαραίτητη. Λόγω της μη μεταθετικότητας των στροφών, οι γωνιακές ταχύτητες δεν αποτελούν ολοκληρώσιμες συναρτήσεις των γωνιών.

Η κινηματική των στροφών στερεού μπορεί να εκφραστεί και στη μορφή ολοκληρωτικής εξίσωσης (βλ. Πρόβλημα 5)

$$R(t) = R_0 + \int_{t_0}^{t}\vec{J}\cdot\vec{\omega}(t')R(t')\,dt'. \tag{8.2-6}$$

Προβλήματα

1. Παρατηρείστε ότι η περιστροφή $R(\varphi\hat{n})$ παραγωγίζεται ως προς φ, η παράγωγος

$$-i\frac{\partial}{\partial\varphi}R(\varphi\hat{n})$$

   είναι μεταθετή με την $R(\varphi\hat{n})$ και αποδείξετε τον τύπο (8.1-5).

   Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την (8.1-3).

2. Επιβεβαιώστε την Lie Άλγεβρα (8.1-9) των γεννητόρων των στροφών.

3. Αποδείξετε την ταυτότητα

$$e^{i\vec{J}\cdot\vec{\varphi}} = \left[1 - \frac{(\vec{J}\cdot\vec{\varphi})^2}{\varphi^2}\right] + \frac{(\vec{J}\cdot\vec{\varphi})^2}{\varphi^2}\cos\varphi + i\frac{\vec{J}\cdot\vec{\varphi}}{\varphi}\sin\varphi. \tag{8.2-7}$$

4. Χρησιμοποιείστε την ταυτότητα (8.2-7) και συνθέστε τρεις διαδοχικές περιστροφές $R_Z(\varphi)$, $R_Y(\varphi)$, $R_Z(\psi)$ για να αποδείξετε τον τύπο (8.1-2).

5. Δείξετε ότι η ολοκληρωτική εξίσωση (8.2-6) είναι ισοδύναμη με τη διαφορική εξίσωση (8.2-2) με τη συνοριακή συνθήκη $R(t_0) = R_0$.

6. Ορίστε τη λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης (8.2-5) μέσω της επαναληπτικής μεθόδου

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} R_n, \;\; R_n(t) = R_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{J} \cdot \vec{\omega} R_{n-1}(t')\, dt',$$

και επιβεβαιώστε ότι ισούται ταυτοτικά με το χρονολογικό εκθετικό ανάπτυγμα (8.2-3).

8.3 Εξισώσεις Euler-Lagrange της κίνησης στερεού

Στην προηγούμενη παράγραφο ασχοληθήκαμε βασικά με την κινηματική της στροφικής κίνησης στερεού γύρω από σταθερό σημείο. Σε αυτή την παράγραφο θα αντιμετωπίσουμε το δυναμικό πρόβλημα της κίνησης, δηλαδή τη διατύπωση των εξισώσεων οι οποίες διέπουν τη χρονική εξέλιξη των γωνιακών ταχυτήτων συναρτήσει των εξωτερικών δυνάμεων που επιδρούν στο στερεό.

Το κέντρο των στροφών, το οποίο θα ληφθεί και ως αρχή των αξόνων, θα είναι είτε ένα φυσικό σημείο συνδέσμου (εξάρτησης) του στερεού ή, στην περίπτωση μηδενικής συνολικής εξωτερικής δύναμης, θα ταυτίζεται με το κέντρο μάζας του στερεού (βλ. Πρόβλημα 1).

Ως γενικευμένες συντεταγμένες θέσης του στερεού μπορούν να χρησιμεύσουν οι γωνίες του Euler. Για να βρούμε τις εξισώσεις κίνησης κατά Lagrange θα ζητήσουμε πρώτα την έκφραση της κινητικής ενέργειας T. Θεωρώντας το στερεό ως σύνολο υλικών σημείων $k = 1, 2, \ldots$ μάζας $m(k)$, στη θέση $\vec{r}(k)$ και με ταχύτητα (βλ. Πρόβλημα 2)

$$\vec{v}(k) = \vec{r}(k) \times \omega, \tag{8.3-1}$$

όπου $\vec{\omega}(t)$ η στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα του κινητού, έχουμε:

$$\begin{aligned}
T &= \sum_k \frac{m(k)}{2} |\vec{v}(k)|^2 = \sum_k \frac{m(k)}{2} |\vec{r}(k) \times \vec{\omega}|^2 = \\
&= \frac{1}{2} \sum_k m(k) \left[|\vec{r}(k)|^2 |\vec{\omega}|^2 - (\vec{r}(k) \cdot \vec{\omega})^2 \right] = \\
&= \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \left\{ \sum_k m(k) \left[\vec{r}(k) \cdot \vec{r}(k) - \vec{r}(k) \vec{r}(k) \right] \right\} \cdot \vec{\omega} = \\
&= \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot I \cdot \vec{\omega}, \text{ [1]}
\end{aligned} \tag{8.3-2}$$

όπου

$$I_{mn} = \sum_k m(k) \left[r^2(k) \delta_{mn} - r_m(k) r_n(k) \right], \tag{8.3-3}$$

ο πίνακας τανυστής των ροπών αδρανείας του στερεού.

Εάν πρόκειται για συνεχή κατανομή μάζας τότε ο τανυστής των ροπών αδράνειας δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$I_{mn} = \int \rho(\vec{x}) \left[x^2 \delta_{mn} - x_m x_n \right] \, d^3x. \tag{8.3-4}$$

Ο τανυστής αδράνειας είναι προφανώς ένας συμμετρικός τανυστής δευτέρας τάξης. Οι συνιστώσες του I_{mn} εξαρτώνται από την κατανομή της μάζας ως προς την αρχή και τον προσανατολισμό του συστήματος αξόνων αναφοράς.

Αν I^0_{mn} οι ροπές αδράνειας ως προς ένα σύστημα που έχει ως αρχή του το κέντρο μάζας, τότε η μετάθεση της αρχής κατά

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{R}, \tag{8.3-5}$$

δίνει

$$I_{mn} = \int \rho \left[x^2 \delta_{mn} - x_m x_n \right] \, d^3x = I^0_{mn} + M \left(R^2 \delta_{mn} - R_m R_n \right), \tag{8.3-6}$$

όπου M η ολική μάζα.

> *Ο τανυστής των ροπών αδράνειας I_{mn} μιας κατανομής ισούται προς τον τανυστή αδράνειας I^0_{mn} που αναφέρεται στο κέντρο μάζας συν τον τανυστή αδράνειας $M \left(R^2 \delta_{mn} - R_m R_n \right)$ του κέντρου μάζας της κατανομής.*

Η πιο πάνω πρόταση διέπει το μετασχηματισμό της ροπής αδράνειας ως προς παράλληλη μετάθεση του συστήματος αναφοράς. Ως προς στροφή R του συστήματος έχουμε τον απλό μετασχηματισμό ενός τανυστή δευτέρας τάξης

$$I'_{mn} = \sum_{k,\ell} R_{mk} R_{n\ell} I_{k\ell}. \tag{8.3-7}$$

Βάσει της (8.3-7) και λαμβάνοντας υπόψη τη συμμετρία $I_{mn} = I_{nm}$ η ροπή αδράνειας μπορεί να γραφτεί σε διαγώνια μορφή. Στα πιο κάτω θα υποθέσουμε ότι η ροπή αδράνειας που αναφέρεται στους άξονες του σώματος είναι ήδη σε διαγώνια μορφή

$$I^0_{mn} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}. \tag{8.3-8}$$

Η διαγωνιοποίηση της ροπής αδράνειας επιτυγχάνεται πολύ απλά με εκλογή ως σύστημα αναφοράς το σύστημα που ορίζουν οι τρεις πρωτεύοντες άξονες του ελλειψοειδούς της αδράνειας (βλ επίσης §4.2).

$$\sum_{m,n=1}^{3} I_{mn} x_m x_n = 1. \tag{8.3-9}$$

Ας επανέλθουμε στη δυναμική της κίνησης. Η έκφραση (8.3-2) της κινητικής ενέργειας στερεού, θυμίζει την κινητική ενέργεια υλικού σημείου. Στη θέση της ταχύτητας $\vec{v}$ βρίσκεται η γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ και η μάζα αντικαθίσταται από τη ροπή αδράνειας. Η κανονική ορμή, συζυγής γωνιών περιστροφής, $\vec{\varphi}$, (βλ. Πρόβλημα 2) είναι στην προκειμένη περίπτωση η στροφορμή

$$\vec{L} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{\varphi}}} = I \cdot \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = I \cdot \vec{\omega}. \tag{8.3-10}$$

Πιο αναλυτικά, η συζυγής ορμή περιστροφής $\vec{\varphi} = \varphi \hat{n}$ γύρω από τον άξονα $\hat{n}$ ισούται με την προβολή $\vec{L} \cdot \hat{n}$ της στροφορμής γύρω από τον άξονα περιστροφής, δηλαδή:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \vec{L} \cdot \hat{n}. \tag{8.3-11}$$

Εισάγοντας την (8.3-10) στην εξίσωση κίνησης της στροφορμής (2.2-5), παρουσία ροπής δύναμης $\vec{M}$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

έχουμε αμέσως, υπό μορφή Lagrange, τη ζητούμενη δυναμική εξίσωση του στερεού

$$\frac{d}{dt}(I \cdot \vec{\omega}) = \vec{M}, \tag{8.3-12}$$

ή

$$\left(\frac{dI}{dt}\right) \cdot \vec{\omega} + I \cdot \dot{\vec{\omega}} = \vec{M}. \tag{8.3-13}$$

8.4 Εξισώσεις Euler

Οι Lagrange εξισώσεις της κίνησης (8.3-13) δεν είναι πολύ εύχρηστες. Ο τανυστής αδράνειας I ο οποίος παρουσιάζεται σε αυτές, αναφέρεται στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς και συνεπώς, καθώς κινείται το στερεό αυτός μεταβάλλεται με το χρόνο. Για να το αποφύγει αυτό ο Euler εισήγαγε το περιστρεφόμενο σύστημα του σώματος. Ο τανυστής αδράνειας I_0 που αναφέρεται σε αυτό το σύστημα αξόνων του στερεού είναι προφανώς ανεξάρτητος του χρόνου

$$\frac{\partial}{\partial t} I_0 = 0. \tag{8.4-1}$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας την ταυτότητα (βλ. Πρόβλημα 4)

$$\left(\frac{dI}{dt}\right) \cdot \vec{\omega} = \vec{\omega} \times (I \cdot \vec{\omega}), \tag{8.4-2}$$

η οποία αναφέρεται σε αδρανειακό σύστημα αναφοράς το οποίο στιγμιαία συμπίπτει με το (OX_o, OY_o, OZ_o) έχουμε τελικά

$$\vec{M} = I\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times (I \cdot \vec{\omega}). \tag{8.4-3}$$

Οι εξισώσεις (8.4-3) είναι οι περίφημες *εξισώσεις του Euler*. Αυτές λαμβάνουν την απλούστερη μορφή όταν η ροπή αδράνειας αναφερθεί ως προς του πρωτεύοντες άξονες αδράνειας του στερεού. Τότε

$$\begin{aligned} M_1 &= I_1\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3(I_3 - I_2) \\ M_2 &= I_2\dot{\omega}_2 + \omega_3\omega_2(I_1 - I_3) \\ M_3 &= I_3\dot{\omega}_3 + \omega_1\omega_1(I_2 - I_1) \end{aligned} \tag{8.4-4}$$

Εξισώσεις Hamilton

Η κανονική ορμή συζυγής μιας γωνιάς στροφής φ του στερεού είναι (βλ. εξίσωση (8.3-10))

$$\frac{\partial T}{\partial \vec{\omega}} = I \cdot \vec{\omega} = \vec{L}. \tag{8.4-5}$$

Έστω I^{-1} ο «αντίστροφος» του πίνακα αδράνειας I. Όταν ο πίνακας I δεν έχει μηδενικά διανύσματα, δηλαδή αν το $I \cdot \vec{\omega} = 0$ συνεπάγεται $\vec{\omega} = 0$, ο πίνακας I^{-1} υπάρχει. Τότε έχουμε

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot I \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{L} \cdot I^{-1} I \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{L} \cdot I^{-1} \cdot \vec{L}. \tag{8.4-6}$$

Αναφερόμενοι στους πρωτεύοντες άξονες αδράνειας

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{L_1^2}{I^1} + \frac{L_2^2}{I^2} + \frac{L_3^2}{I^3}\right). \tag{8.4-7}$$

Αν υπάρχουν μηδενικά διανύσματα του , όπως π.χ. στην περίπτωση ευθύγραμμης κατανομής μάζας (βλ. Πρόβλημα 5), ο I^{-1} ορίζεται μόνο για $\vec{\omega}'$ τα οποία να είναι μη μηδενικές εικόνες του I, δηλαδή $\vec{\omega}' \to I\vec{\omega} \neq 0$. Τον πίνακα αυτό θα το συμβολίζουμε I_n. Όταν $\vec{\omega} = 0$, ορίζουμε $I_n I\vec{\omega} = 0$ ώστε το $I_n^{-1}I$ να είναι πίνακας προβολή του ορθογώνιου συμπληρώματος $R - \eta$ του χώρου η των μηδενικών διανυσμάτων του I, $\eta = \{\vec{\omega} : \ I\vec{\omega} = 0\}$,

$$I_n^{-1}I\vec{\omega} = \begin{cases} \vec{\omega} & \text{για } \vec{\omega} \in R - \eta, \\ 0 & \text{για } \vec{\omega} \notin R - \eta. \end{cases} \tag{8.4-8}$$

Για αυτά τα $\vec{\omega}$ έχουμε

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot I \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot I_n^{-1} \cdot I \cdot I \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{L} \cdot I_n^{-1} \cdot \vec{L}. \tag{8.4-9}$$

Ο χώρος η είναι το πολύ μιας διάστασης, ευθύγραμμη κατανομή μάζας (βλ. Πρόβλημα 6) $I_1 \neq 0$, $I_2 \neq 0$, $I_3 = 0$,

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad I_n{-}1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{I_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{8.4-10}$$

και

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{L_1^2}{I_1} + \frac{L_2^2}{I_2}\right). \tag{8.4-11}$$

Προβλήματα

1. Στην περίπτωση που η συνισταμένη εξωτερική δύναμη σε στερεό είναι μηδέν, δείξετε ότι η κίνηση του αναλύεται σε μια ευθύγραμμη μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζας O, με σταθερή ταχύτητα, και μια στροφική κίνηση γύρω από το O. Στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας η κίνηση είναι καθαρά στροφική γύρω από το O.

2. Δείξετε ότι η κανονική ορμή στερεού, έχοντας ένα σημείο σταθερό, συζυγής μιας γωνιάς περιστροφής $\vec{\varphi}$ ισούται με την προβολή $\vec{L}\cdot\vec{\varphi}/\varphi$ της στροφορμής επί του άξονα περιστροφής $\hat{n} = \vec{\varphi}/\varphi$.

3. Δείξετε τον τύπο

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{A}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{A}',$$

ο οποίος δίνει το μετασχηματισμό της χρονικής παραγώγου τυχαίου διανυσματικού μεγέθους $\vec{A}$ από αδρανειακό σύστημα αναφοράς $\vec{A}'$.

4. Με βάση το Πρόβλημα 3 να δείξετε ότι

$$\left(\frac{dI}{dt}\right)\vec{\omega} = \vec{\omega} \times (I \cdot \vec{\omega}) = \vec{\omega} \times \vec{L}.$$

5. Δείξετε ότι η ευθύγραμμη κατανομή μάζας κατά μήκος του άξονα Z, έχει $I_1 = I_2$, $I_3 = 0$.

6. Είναι δυνατόν να έχουμε στερεό με $I_1 = I_2 = 0$ και $I_3 \neq 0$; Δικαιολογήστε.

Βιβλιογραφία

[1] Παπαϊωάννου, Κ., *Μηχανική, Τεύχος I, II*, Πανεπιστήμιο Αθηνών, 1954.

[2] Berkley Physics Course, *Mechanics*, Mc Graw-Hill, 1970.

[3] Goldstein H., *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, 1964.

[4] Corben, H. C. & Stehle, P., *Classical Mechanics*, John Wiley, 1960.

[5] Kibble, T. W. B., *Classical Mechanics*, Mc Graw-Hill, 1966.

[6] Landau, L., *Mechanics*, Pergamon Press, 1960.

[7] Mach, E., *The Science of Mechanics*, Open Court, Chicago, 1970.

[8] Sommerfeld, A., *Mechanics*, Academic Press, 1966.

[9] Sygne, J. L. & Griffith, B. A., *Principles of Mechanics*, Mc Graw-Hill, 1942.

[10] Whittaker, E. T., *Analytical Dynamics*, Dover Pub., 1944.