ΦΩΚΙΩΝΟΣ Τ. ΧΑΤΖΗΙΩΑΝΝΟΥ
ΤΑΚΤΙΚΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

ΤΕΥΧΟΣ ΙΙ

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ

ΑΘΗΝΑΙ 1972

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον δέον ὅπως φέρῃ τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Εἰς τό παρόν, δεύτερον τεῦχος "Θεωρητικῆς Μηχανικῆς" περιλαμβάνεται σύντομος ἔκθεσις "'Αναλυτικῆς Δυναμικῆς", ὡς τήν ἐδίδαξα εἰς τεταρτοετεῖς Μαθηματικούς καί Φυσικούς τοῦ Πανεπιστημίου 'Αθηνῶν. 'Ως καί εἰς τό πρῶτον τεῦχος, κατεβλήθη καί ἐδῶ προσπάθεια νά τονισθοῦν αἱ βασικαί γενικαί ἀρχαί τῆς Μηχανικῆς.

Εἰς τό Κεφάλαιον 5 ἀναπτύσσονται αἱ ἐξισώσεις Lagrange, ἀκολουθεῖ ἡ ἀρχή τῆς ἐλαχίστης δράσεως, Κεφάλαιον 6, εἰς τά πλαίσια τῆς ὁποίας συνδέεται ἡ 'Αναλυτική Δυναμική μέ τήν Διαφορικήν Γεωμετρίαν. Τά ὁλοκληρώματα τῆς κινήσεως παράγονται ἐκ τῶν συμμετριῶν τῆς Lagrangian μέσῳ τοῦ θεωρήματος Noether . Οὕτω, εἰσάγεται καί ἡ Hamiltonian , εἰς τό Κεφάλαιον 7, ὅπου περιλαμβάνεται καί σύντομος ἔκθεσις τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων τοῦ Hamilton. καί ἀγκυλῶν τοῦ Poisson. 'Ακολουθεῖ ἡ κίνησις στερεοῦ, Κεφάλαιον 8. Ἕκαστον κεφάλαιον συνοδεύεται ἀπό ἀσκήσεις πρός καλυτέραν ἐμπέδωσιν καί συμπλήρωσιν τῆς ὕλης.

Εὐχαριστῶ τούς βοηθούς τῆς Ἕδρας τῆς Μηχανικῆς διά κάθε βοήθειαν εἰς τήν ἐπιμέλειαν τῶν σημειώσεων.

ΑΘΗΝΑΙ, ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 1971 ΦΩΚΙΩΝ Τ.ΧΑΤΖΗΙΩΑΝΝΟΥ

Στή Μέλισσα - Ίριδα
Δανάη - Ηλέκτρα
Αρίωνα - Ξενοφώντα
ΦΧ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Τ Ε Υ Χ Ο Σ II

" Α Ν Α Λ Υ Τ Ι Κ Η Δ Υ Ν Α Μ Ι Κ Η "

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

" Ε Ξ Ι Σ Ω Σ Ε Ι Σ L A G R A N G E "

5.1. ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑΙ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΑΙ

Ἔστω ἕν σύστημα n-ὑλικῶν σημείων. Ἡ θέσις τοῦ συστήματος ὡς πρός ἕν ἀδρανειακόν σύστημα ἀναφορᾶς, καθορίζεται εἰς τυχοῦσαν χρονικήν στιγμήν t ἐκ τῶν διανυσμάτων θέσεως τῶν ὑλικῶν σημείων $\vec{r}_1(t),\ldots,\vec{r}_n(t)$. Πολλάκις, ἀναλόγως τῆς συμμετρίας τοῦ προβλήματος ἡ μελέτη τῆς κινήσεως τοῦ συστήματος ἁπλουστεύεται ἐάν ἀντί τῶν καρτεσιανῶν συντεταγμένων τῶν n ἀνωτέρω διανυσμάτων χρησιμοποιήσωμεν ἄλλας μεταβλητάς $q_i(t)$, $i = 1,\ldots, 3n$. Αἱ μεταβληταί αὗται καλοῦνται γενικευμέναι συντεταγμέναι τοῦ συστήματος.

Συχνά αἱ δυνάμεις μεταξύ τῶν ὑλικῶν σημείων εἶναι τοιαῦται ὥστε μερικαί ἐκ τῶν συντεταγμένων νά πληροῦν ὡρισμένας σχέσεις, π.χ. διά στερεόν σῶμα n-ὑλικῶν σημείων αἱ δυνάμεις μεταξύ τῶν ὑλικῶν σημείων εἶναι τοιαῦται ὥστε αἱ σχετικαί αὐτῶν ἀποστάσεις νά διατηροῦνται σταθεραί ($|\vec{r}_i-\vec{r}_j|$ = σταθ.). Τάς σχέσεις ταύτας καλοῦμεν συνδέσμους.

Ἐν γένει, παρουσίᾳ συνδέσμων, αἱ 3n γενικευμέναι συντεταγμέναι δέν εἶναι πλέον ἀνεξάρτητοι μεταξύ των. Τό πλῆθος τῶν ἀνεξαρτήτων συντεταγμένων m καλεῖται βαθμός ἐλευθερίας τοῦ συστήματος (ἄσκ. 1).

Τό ὑλικόν σύστημα δύναται νά παρασταθῇ δι'ἑνός σημείου $q(q_1,\ldots q_m)$ εἰς χῶρον m-διαστάσεων, τόν ὁποῖον καλοῦμεν θεσεογραφικόν χῶρον (configuration space).

Αἱ διαστάσεις τοῦ χώρου τῶν φυσικῶν καταστάσεων συστήματος ὑλικῶν σημείων εἰς τήν κλασσικήν Μηχανικήν (σχετικιστική ἤ μή) εἶναι 2 × διαστάσεις τοῦ θεσεογραφικοῦ χώρου. Εἰς τήν Κβαντικήν Μηχανικήν οἱ δύο χῶροι ἔχουν τάς αὐτάς διαστάσεις (=∞).

Ἀναλόγως τῆς μορφῆς τῶν συνδέσμων, τά συστήματα χαρακτηρίζονται ὡς :

α) Ὁ λ ό ν ο μ α , ὅταν οἱ σύνδεσμοι εἶναι τῆς μορφῆς

$$f_j(\vec{r}_1,\ldots,\vec{r}_n,t) = 0, \quad j=1,\ldots, k \quad . \qquad (5.1\text{-}1)$$

β) Μ ή ὁ λ ό ν ο μ α , ὅταν οἱ σύνδεσμοι δέν δύνανται νά ἐκφρασθοῦν ὡς ἐν (5.1-1), εἶναι δηλ. ἀνισότητες ἤ μή ὁλοκληρώσιμοι σχέσεις διαφορικῶν τῶν συντεταγμένων τοῦ συστήματος.

Εἰς τήν περίπτωσιν τῶν ὁλονόμων συστημάτων διακρίνομεν ταῦτα εἰς σκληρόνομα ἐάν οἱ σύνδεσμοι εἶναι ἀνεξάρτητοι τοῦ χρόνου :

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} = 0 \qquad j = 1,2,\ldots, k \quad , \qquad (5.1\text{-}2)$$

καί εἰς ρεόνομα ἐάν οἱ σύνδεσμοι μεταβάλλωνται μετά τοῦ χρόνου :

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} \neq 0 \quad \text{δι'ἕν τοὐλάχιστον δείκτην } j \; .$$

Ὡς ἁπλοῦν παράδειγμα ὁλονόμου συστήματος, ἀναφέρομεν τήν κίνησιν ὑλικοῦ σημείου ἐπί ἐπιφανείας σφαίρας ἀκτῖνος R· Ἄν ἡ ἀκτίς R τῆς σφαίρας εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ χρόνου, τό σύστημα εἶναι σκληρόνομον ἄλλως εἶναι ρεόνομον. Ὑλική σφαῖρα κυλιομένη ἐπί κεκλιμένου ἐπιπέδου, ἄνευ ὀλισθήσεως, ἀποτελεῖ παράδειγμα μή ὁλονόμου συστήματος.

5.2. ΑΡΧΗ ΤΩΝ ΔΥΝΑΤΩΝ ΕΡΓΩΝ.

Ἐκτός τῆς κινήσεως τοῦ ὑλικοῦ συστήματος, δηλ. τῆς χρονικῆς δυναμικῆς μετατοπίσεως αὐτοῦ, γίνεται πολλάκις χρῆσις τῆς ἐννοίας τῆς δυνατῆς μετατοπίσεως ὡς ἁπλῆς μαθηματικῆς εὐκολίας. Τό σύνολον τῶν δυνατῶν μετατοπίσεων ἀποτελεῖ τήν ὁμάδα μετασχηματισμῶν τῆς θέσεως τοῦ ὑλικοῦ συστήματος εἰς τόν θεσεογραφικόν χῶρον. Π.χ. διά ὑλικόν σημεῖον ὑποκείμενον εἰς τόν σύνδεσμον νά κινεῖται ἐπί ἐπιφανείας σφαίρας, ἤ στερεόν ἔχον ἕν σταθερόν σημεῖον, ἡ ὁμάς τῶν δυνατῶν μετατοπίσεων εἶναι ἡ ὁμάς τῶν περιστροφῶν. Ἡ δυνατή μετατόπισις εἶναι μαθηματική ἔννοια ἀνεξάρτητος τῆς χρονικῆς ἐξελίξεως τοῦ συστήματος.

Ἔστω ἕν σύστημα n-ὑλικῶν σημείων ἐν ἰσορροπίᾳ. Τότε ὅλαι αἱ δυνάμεις $\vec{F}_i$,i = 1,2,...n δρῶσαι ἐπί ἑκάστου ὑλικοῦ σημείου εἶναι μηδέν, $\vec{F}_i = 0$.

Ἐάν θεωρήσωμεν μίαν ἀπειροστήν δυνατήν μετατόπισιν τοῦ συστήματος $\delta\vec{r}_i$, i = 1,...,n , τό "δυνατόν" ἔργον τῶν δυνάμεων $\vec{F}_i$ θά εἶναι :

$$'\delta W = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i . \delta\vec{r}_i = 0 \qquad (5.2\text{-}1)$$

Ἀλλά ἡ ὁλική ἐπί τοῦ σημείου i ἐξασκουμένη δύναμις $\vec{F}_i$ ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῆς ὁλικῆς ἐπί τοῦ σημείου ἐξασκουμένης δυνάμεως $\vec{f}_i$ τῆς ὀφειλομένης εἰς τά ἄλλα σημεῖα ἤ εἰς τά ἐξωτερικά πεδία καί τῆς ὁλικῆς δυνάμεως $\vec{F}_i^{\sigma}$ τῶν ἐπί τοῦ i σημείου συνδέσμων

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\sigma} + \vec{f}_i \quad i = 1,2,\ldots, n$$

Οὕτω ἡ (5.2-1) γράφεται :

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\sigma} . \delta\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i . \delta\vec{r}_i = 0 \qquad (5.2\text{-}2)$$

Ἐάν δεχθῶμεν ὅτι ἐπί οὐδενός τῶν συνδέσμων ἔχομεν δυνάμεις τριβῆς, τότε αἱ δυνάμεις $\vec{F}_i^{\sigma}$ εἶναι κάθετοι πρός τάς δυνατάς μετατοπίσεις $\delta\vec{r}_i$. 'Εκ τούτου :

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i . \delta\vec{r}_i = 0 \quad . \tag{5.2-3}$$

'Η ἐξίσωσις (5.2-3) καλεῖται καί ἀρχή τῶν δυνατῶν ἔργων διά τήν στατικήν.

Βάσει τῆς ἀρχῆς τοῦ D'Alembert,

$$\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i = 0 \quad , \quad i=1,2,\ldots,n \quad , \tag{5.2-4}$$

ἡ δυναμική ἀνάγεται εἰς τήν στατικήν καί ἡ ἐξίσωσις (5.2-3) γενικεύεται εἰς :

$$\sum_{i=1}^{n} (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i) . \delta\vec{r}_i = 0 \quad . \tag{5.2-5}$$

Ἤτοι : "Κατά τάς δυνατάς μετατοπίσεις τό ἔργον τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων σύν τό ἔργον τῶν δυνάμεων ἀδρανείας $(-\dot{\vec{p}}_i)$ ἰσοῦται πρός μηδέν".

'Η ἐξίσωσις (5.2-5) καλεῖται ἀρχή τῶν δυνατῶν ἔργων εἰς τήν δυναμικήν.

'Η ἐξίσωσις αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος πρός τάς ἐξισώσεις

τοῦ Νεύτωνος. Πράγματι θεωρήσωμεν κατ'ἀρχήν ὅτι δέν ὑπάρχουν σύνδεσμοι. Τότε αἱ μετατοπίσεις $\delta\vec{r}_i$ $i=1,\ldots,n$ εἶναι ἀνεξάρτητοι μεταξύ των καί ἡ (5.2-5) συνεπάγεται ἀμέσως τάς ἐξισώσεις τοῦ Νεύτωνος.

Παρουσίᾳ συνδέσμων, αἱ συντεταγμέναι $\vec{r}_i$ $i=1,2,\ldots,n$ ἀντικαθίστανται ὑπό τῶν ἀνεξαρτήτων ἀλλήλοις γενικευμένων συντεταγμένων q_k , $k=1,\ldots,m$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1,\ldots,q_m,t) \quad . \tag{5.2-6}$$

Τά διαφορικά θέσεως $\delta\vec{r}_i$ γράφονται

$$\delta\vec{r}_i = \sum_k \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\,\delta q_k \quad , \tag{5.2-7}$$

καί ἡ ἀρχή τῶν δυνατῶν ἔργων (5.2-5) λαμβάνει τήν μορφήν

$$\sum_{i=1}^{n} (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i) \sum_k \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k} \quad \delta q_k = 0 \quad .$$

ἤ

$$\sum_k \left\{ \sum_{i=1}^{n} (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i) . \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k} \right\} \delta q_k = 0 \quad . \tag{5.2-8}$$

'Εκ τῆς (5.2-8) καί ἐπειδή τά διαφορικά δq_k εἶναι ἀνεξάρτητα μεταξύ των, ἔχομεν

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} - \sum_{i=1}^{n} \dot{\vec{p}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = 0 \,. \qquad k=1,\ldots,m \qquad (5.2\text{-}9)$$

Αὕτη ἀποτελεῖ τήν γενικευμένην ἔκφρασιν τῆς ἀρχῆς τοῦ D'Alembert.

"'Η γενικευμένη δύναμις

$$F_k = \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \,, \qquad k=1,\ldots m \qquad (5.2\text{-}10)$$

σύν τήν γενικευμένην δύναμιν ἀδρανείας

$$-\dot{P}_k = \sum_{i=1}^{n} \dot{\vec{p}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \,, \qquad (5.2\text{-}11)$$

δίδουν ἄθροισμα μηδέν".

Βάσει τῶν ἀνωτέρω ὁρισμῶν ἡ (5.2-9) γράφεται καί ὑπό τήν μορφήν

$$\dot{P}_k = F_k \qquad . \quad k=1,\ldots,m \qquad (5.2\text{-}12)$$

Αὕτη ὑποκαθιστᾶ τάς ἐξισώσεις τοῦ Νεύτωνος.

5.3. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ LAGRANGE.

Εἰς τήν ἐξίσωσιν (5.2-9), τῆς ἀρχῆς τῶν δυνατῶν ἔργων, ἡ γενικευμένη δύναμις ἀδρανείας

$$-\dot{P}_k = \sum_{i=1}^{n} \dot{\vec{p}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} =$$

$$= \left[\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} - \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right] , \qquad (5.3\text{-}1)$$

παρουσιάζεται ὡς μικτή συνάρτησις τῶν γενικευμένων συντεταγμένων q καί τῶν ταχυτήτων $\vec{v}$ τῶν ἀρχικῶν συντεταγμένων. 'Η μορφή αὕτη εἶναι ἀδέξιος. 'Επιθυμοῦμεν νά ἀπαλείψωμεν τάς ταχύτητας $\vec{v}$ ὥστε νά ἔχωμεν τήν γενικευμένην δύναμιν ἀδρανείας $-\dot{P}_k$ ὑπό ἐκπεφρασμένην μορφήν συνάρτησιν τῶν γενικευμένων συντεταγμένων q καί ταχυτήτων $\dot{q}$.

Παραγωγίζοντες τήν (5.2-6) διαδοχικῶς εὑρίσκομεν

$$\vec{v}_i \equiv \frac{d}{dt} \vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \,, \qquad (5.3\text{-}2)$$

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \vec{r}_j}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_k \partial t} \,, \qquad (5.3\text{-}3)$$

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{r}_i}{q_k} , \qquad (5.3\text{-}4)$$

καί

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \sum_j \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial q_k}\dot{q}_j + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t \partial q_k} . \qquad (5.3\text{-}5)$$

'Επίσης, συγκρίνοντες τήν (5.3-3) μετά τῆς (5.3-5), ὑποθέτοντες τήν μεταθετικότητα τῶν παραγωγίσεων

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial q_j \partial q_k} = \frac{\partial^2}{\partial q_k \partial q_j} \text{ καί } \frac{\partial^2}{\partial q_k \partial t} = \frac{\partial^2}{\partial t \partial q_k}\right), \text{έχομεν}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k} . \qquad (5.3\text{-}6)$$

Εἰσάγοντες τάς (5.3-4) καί (5.3-6) εἰς τήν (5.3-1), ἔχομεν τελικῶς τήν ἐπιθυμητήν ἔκφρασιν

$$\dot{P}_k = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k}\right) - \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k} =$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i \vec{v}_i^{\,2}}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i \vec{v}_i^{\,2}}{2}\right) . \qquad (5.3\text{-}7)$$

Ἤτοι

$$P_k = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} , \qquad (5.3\text{-}8)$$

ὅπου

$$T = \sum_{i=1}^{n}\frac{m_i \vec{v}_i^{\,2}}{2} , \qquad (5.3\text{-}9)$$

ἡ ὁλική κινητική ἐνέργεια τοῦ συστήματος.

Δυνάμει τῆς (5.3-8), αἱ ἐξισώσεις τῆς κινήσεως (5.2-11) τοῦ συστήματος ἐκφράζονται τώρα ὑπό συμπαγῆ μορφήν

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = f_k , \quad k=1,\dots,m . \qquad (5.3\text{-}10)$$

Αὗται καλοῦνται ἐξισώσεις τοῦ Lagrange.

Εἰς τήν εἰδικήν περίπτωσιν κατά τήν ὁποίαν αἱ δυνάμεις $\vec{F}_i$ ἀπορρέουν ἐκ δυναμικοῦ, ἤτοι (§ 2.3)

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V , \qquad (5.3\text{-}11)$$

ἡ γενικευμένη δύναμις f_k εἶναι

$$f_k = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = -\sum_{i=1}^{n}\vec{\nabla}_i V \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial q_k} , \qquad (5.3\text{-}12)$$

καί αἱ ἐξισώσεις τοῦ Lagrange λαμβάνουν τήν συνήθη μορφήν

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \qquad k = 1,\ldots n \qquad (5.3\text{-}13)$$

ὅπου $L = T-V$ ἡ Lagrangian τοῦ συστήματος (ἄσκ. 6).

Εἰς τήν γενικωτέραν περίπτωσιν ὅταν, ἐπιπροσθέτως τῶν δυνάμεων $f_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$ ἀσκοῦνται ἐπί τοῦ συστήματος καί ἄλλαι δυνάμεις $\bar{F}_k$ αἱ ὁποῖαι δέν ἀπορρέουν ἐκ δυναμικοῦ, ἡ (5.3-13) ἀντικαθίσταται ὑπό τῆς

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \bar{F}_k . \qquad (5.3\text{-}14)$$

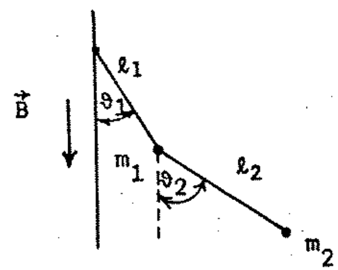
Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ.

1. Πόσοι εἶναι οἱ βαθμοί ἐλευθερίας συστήματος δύο ὑλικῶν σημείων, στερεῶς συνδεδεμένων εἰς τά ἄκρα στερεᾶς ἀβαροῦς ράβδου, κινουμένης ἐλευθέρως εἰς τόν τρισδιάστατον χῶρον; Προτείνατε γενικευμένας συντεταγμένας καί ἐκφράσατε συναρτήσει αὐτῶν τήν κινητικήν ἐνέργειαν τοῦ συστήματος.

2. Ὑλικόν σημεῖον μάζης m κινεῖται ἄνευ τριβῆς ἐπί ἐπιφανείας σφαίρας ἀκτῖνος R. Ὁλοκληρώσατε τήν κίνησιν,
(α) εἰς γενικάς σφαιρικάς πολικάς συντεταγμένας γωνίας (θ,φ),
(β) εἰς καταλλήλους ἐπιπέδους πολικάς συντεταγμένας (φ), ἀφοῦ ἀποδείξητε ὅτι ἡ κίνησις εἶναι ἐπίπεδος.

3. Ἐκφράσατε τάς ἐξισώσεις Lagrange, αἱ ὁποῖαι διέπουν τήν κίνησιν τοῦ ὑλικοῦ συστήματος τῶν δύο σημείων τῆς ἀσκήσεως 1 καί ὁλοκληρώσατε τήν κίνησιν.

4. Ἐκφράσατε τάς ἐξισώσεις Lagrange, αἱ ὁποῖαι διέπουν τήν κίνησιν διπλοῦ ἐκκρεμοῦς ἐντός πεδίου βαρύτητος ἐντάσεως $\vec{B}$. Δίδονται τά μήκη ℓ_1, ℓ_2 καί αἱ μᾶζαι m_1, m_2 τῶν



δύο ἁπλῶν συνιστώντων ἐκκρεμῶν. Νά ὁλοκληρωθῆ ἡ κίνησις διά μικρά πλάτη.

5. Ὁλοκληρώσατε τάς ἐξισώσεις Lagrange τοῦ προβλήματος τῆς κινήσεως δύο σωμάτων μάζης m_1 καί m_2 ἀντιστοίχως, ἑλκομένων διά Νευτωνείου δυναμικοῦ $V = -f\,\dfrac{m_1 m_2}{r}$ Χρησιμοποιήσατε καρτεσιανάς συντεταγμένας διά τήν κίνησιν τοῦ κέντρου μάζης καί πολικάς συντεταγμένας διά τήν σχετικήν κίνησιν.

6. Αἱ ἐξισώσεις Lagrange (5.3-9) ἰσχύουν καί εἰς τήν γενικωτέραν περίπτωσιν κατά τήν ὁποίαν αἱ δυνάμεις προέρχονται ἐξ ἑνός "δυναμικοῦ $V(q,\dot q)$ ἐξαρτωμένου καί ἐκ τῆς ταχύτητος" κατά τόν τύπον

$$Q_k = \frac{-\partial V}{\partial q_k} + \frac{d}{dt}\,\frac{\partial V}{\partial \dot q_k} .$$

Τότε θέτομεν $L = T-V$.

Ἐπαληθεύσατε ὅτι εἰς τήν περίπτωσιν τῶν ἠλεκτρομαγνητικῶν δυνάμεων $\vec F = e(\vec E + \dfrac{\vec v}{c} \times \vec B)$, τό μέγεθος

$$V(\vec x,\dot{\vec x}) = e(\phi(\vec x,t) + \frac{\dot{\vec x}}{c}\cdot\vec A(\vec x,t)) \text{ ὅπου } \vec E = -\vec\nabla\phi + \frac{\partial \vec A}{\partial t}$$

καί $\vec B = \vec\nabla \times \vec A$, ἀποτελεῖ ἕν τοιοῦτον δυναμικόν ταχυτήτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

"Α Ρ Χ Η   Τ Η Σ   Ε Λ Α Χ Ι Σ Τ Η Σ   Δ Ρ Α Σ Ε Ω Σ"

6.1. ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΔΡΑΣΕΩΣ.

Ἔστω ἕν μηχανικόν σύστημα n βαθμῶν ἐλευθερίας, ἡ κίνησις τοῦ ὁποίου περιγράφεται ὑπό τῆς Lagrangian $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$. Συναρτήσεις Lagrange μέ παραγώγους ἀνωτέρας τάξεως θά μελετηθοῦν εἰς τήν § 6.2. Ἡ τροχιά τοῦ συστήματος εἰς τόν χῶρον τῶν q περιγράφεται δι'ἑνός συστήματος συναρτήσεων τοῦ χρόνου $q_i = q_i\ (t)$ ὅπου $i=1,\ldots,n$ καί $-\infty<t<+\infty$.

Ὡς συνέπεια τῶν ἐξισώσεων τοῦ Νεύτωνος εἰς ἕκαστον σύνολον ἀρχικῶν τιμῶν $q_i(0)$, $\dot{q}_i(0)$ $i=1,\ldots n$, ἀντιστοιχεῖ

μία καί μόνον τροχιά τοῦ συστήματος.

Κατ'ἀναλογίαν πρός τήν δυνατήν μετατόπισιν, ὁρίζομεν ὡς "δυνατήν τροχιάν τοῦ συστήματος" τυχοῦσαν χρονικήν συνάρτησιν $q_i(t)$ τῶν συντεταγμένων συμβιβαστήν πρός τούς συνδέσμους.

Ὁρίζομεν ὡς "δρᾶσιν" τοῦ συστήματος μεταξύ δύο χρονικῶν στιγμῶν t_1, t_2 , διά τυχοῦσαν δυνατήν τροχιάν, τό ὁλοκλήρωμα :

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)dt \ . \tag{6.1-1}$$

Εἶναι προφανές ὅτι ἡ δρᾶσις I εἶναι συναρτησοειδές τῶν δυνατῶν τροχιῶν, ἤτοι συνάρτησις τῶν συναρτήσεων $q_i(t)$.

Ἡ ἀρχή τῆς ἐλαχίστης δράσεως τοῦ Hamilton διατυποῦται ὡς ἑξῆς : "Ἡ τροχιά ὑλικοῦ συστήματος n βαθμῶν ἐλευθερίας τό ὁποῖον περιγράφεται ὑπό τινος Lagrangian $L(q_i.\dot{q}_i,t)$ εἶναι τοιαύτη ὥστε τό ὁλοκλήρωμα τῆς δράσεως νά λαμβάνη ἀκροτάτην τιμήν". Ἤτοι ἐάν $q_i(t)$ εἶναι τροχιά τοῦ συστήματος, ἑκάστη ἀπειροστή συναρτησιακή μεταβολή

$$q_i(t) \to q_i'(t) = q_i(t) + \delta q_i(t) \quad i=1,\ldots,n , \qquad (6.1\text{-}2)$$

ὑποκειμένη εἰς τήν συνοριακήν συνθήκην

$$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0, \qquad (6.1\text{-}3)$$

εἶναι τοιαύτη ὥστε $\delta I = 0$.

Ἡ ἀρχή τῆς ἐλαχίστης δράσεως εἶναι ἰσοδύναμος πρός τάς ἐξισώσεις Lagrange.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς :

Τό συναρτησιακόν διαφορικόν τῆς δράσεως εἶναι :

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i,\dot q_i,t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \delta \dot q_i \Big)dt . \qquad (6.1\text{-}4)$$

Θά δείξωμεν ὅτι :

α) Ἐάν πληροῦνται αἱ ἐξισώσεις τοῦ Lagrange ἡ δρᾶσις λαμβάνει ἀκροτάτην τιμήν.

Πράγματι. Τῇ βοηθείᾳ τῶν ἐξισώσεων τοῦ Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \qquad i = 1,\ldots,n , \qquad (6.1\text{-}5)$$

ἡ (6.1-3) γράφεται :

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \delta \dot q_i \Big) dt . \qquad (6.1\text{-}6)$$

Ἀλλά ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ (6.1-2) ἔχομεν :

$$\frac{d}{dt} \delta q_i = \delta \dot q_i \qquad , \qquad (6.1\text{-}7)$$

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \delta q_i \Big)dt = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \Big) \delta q_i(t_2) - \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \Big) \delta q_i(t_1) ,$$

καί λόγῳ τῶν συνοριακῶν συνθηκῶν (6.1-3),

$$\delta I = 0 \quad . \qquad (6.1\text{-}8)$$

β) 'Αντιστρόφως, εάν δεχθώμεν τήν άρχήν τοῦ Hamilton ὡς νόμον τῆς Μηχανικῆς, τότε προκύπτουν αἱ ἐξισώσεις τοῦ Lagrange. Πράγματι, ἐκ τῆς (6.1-4) ἔχομεν :

$$0 = \delta I = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i \right) dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i \right) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i \right] dt = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \delta q_i dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \delta q_i dt \quad .(6.1\text{-}9)$$

'Εκ τῆς (6.1-9) ἐπειδή αἱ δq_i εἶναι τυχοῦσαι συναρτήσεις, ἕπεται ἀμέσως (ἄσκ.1) ὅτι :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \; . \quad i = 1,2,\ldots,n \qquad (6.1\text{-}10)$$

'Εκ τῶν ἀνωτέρω διαπιστώνομεν ὅτι "δοθείσης μιᾶς Lagrangian ἡ ἀρχή τοῦ Hamilton εἶναι ἰσοδύναμος πρός τάς ἐξισώσεις τοῦ Lagrange ἤτοι ἀποτελεῖ ἑτέραν διατύπωσιν τοῦ δυναμικοῦ νόμου".

'Η ἀρχή τῆς ἐλαχίστης δράσεως εἶναι βασικῆς σημασίας. 'Επιπροσθέτως τοῦ ὅτι ἀποτελεῖ ἕν ἰσχυρότατον μαθηματικόν ἐργαλεῖον εἰς τήν μελέτην τῶν δυναμικῶν συστημάτων, ἐπιτρέπει καί ἕνα βαθύτερον ἐπίπεδον κατανοήσεώς των. Δι'αὐτῆς, ὁ δυναμικός νόμος ἐκφράζεται ὑπό γεωμετρικῶς ἀναλλοίωτον συμπαγῆ και κομψήν μορφήν καί αἱ βασικαί ἀρχαί καί συμμετρίαι, αἱ ὁποῖαι τόν διέπουν καθίστανται πλέον ἀνάγλυφοι. Τοῦτο θά καταστῆ σαφέστερον εἰς τάς ἑπομένας παραγράφους.

Πέραν τούτου ὅμως ἡ ἀξία τῆς διατυπώσεως διά τῆς 'Αρχῆς τῆς 'Ελαχίστης Δράσεως δέν πρέπει νά ὑπερεκτιμηθῆ. Διά τῆς 'Αρχῆς τῆς 'Ελαχίστης Δράσεως δέν ἐδημιουργήθη νέος φυσικός νόμος. Διά τήν εὕρεσιν μιᾶς συναρτήσεως Lagrange L, ἡ ὁποία νά περιγράφη ἕν συγκεκριμένον δυναμικόν σύστημα, ἀπαιτεῖται ἡ προτέρα γνῶσις τῶν ἐξισώσεων τῆς κινήσεως τοῦ συστήματος, αἱ ὁποῖαι θά ταυτισθοῦν μέ τάς ἐξισώσεις Lagrange. Ἡ παραδοχή μιᾶς L δύναται πολλάκις νά στηριχθῆ ἐπί γενικῶν ἐπιχειρημάτων δι'ἀναλύσεως τῆς συμμετρίας τοῦ συστήματος. Εἰς τήν τελευταίαν περίπτωσιν δυνάμεθα νά ὁμιλοῦμεν περί προβλέψεως τῶν ἐξισώσεων τῆς κινήσεως (ἄσκ. 2).

Τήν ἰσοδυναμίαν καί ἀλληλοεξάρτησιν τῶν ἐξισώσεων τῆς κινήσεως καί τῆς ἀρχῆς τῆς ἐλαχίστης δράσεως ἀποδίδομεν καί γραφικῶς εἰς τό κάτωθι διάγραμμα.

Γνῶσις τῶν (1) ⟶ (2) Καλυτέρα κατανόησις τοῦ συστήματος καί τῶν συμμετριῶν του.

1	Ἐξισώσεις κινήσεως (συγκεκριμένου συστήματος)

2	Lagrangian , Ἀρχή τῆς ἐλαχίστης δράσεως.

Πρόβλεψις τῶν ἐξισώσεων τῆς κινήσεως (1) ⟵ (2) Παραδοχή μιᾶς L , π.χ. βάσει γενικῶν ἐπιχειρημάτων καί συμμετριῶν τοῦ συστήματος.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ.

1. Ἀποδείξατε ὅτι ἡ ἰσχύς τῆς (6.1-9) διά τυχοῦσαν συνάρτησιν $\delta q(t)$ ὑποκειμένην εἰς τάς συνοριακάς συνθήκας (6.1-3), συνεπάγεται τάς ἐξισώσεις (6.1-10) τοῦ Lagrange.
   Ἡ συνάρτησις $\delta q(t)$ θεωρεῖται ὅτι ἀνήκει εἰς τό σύνολον C^∞ τῶν ἀπείρως παραγωγισίμων συνεχῶν συναρτήσεων ὥστε ἡ μέθοδος δύναται νά ἐφαρμοσθῆ καί ὅταν ἡ Lagrangian εἶναι κατανομή Schwartz.

2. Εὕρατε τήν Lagrangian ἐλευθέρου ὑλικοῦ σημείου ἐκ τοῦ ἀναλλοιώτου ὡς πρός μετασχηματισμούς τοῦ Γαλιλαίου.

3. "Βραχυστόχρονοι" καλοῦνται αἱ τροχιαί τοῦ συστήματος εἰς τόν θεσεογραφικόν χῶρον, αἱ ὁποῖαι, διαγραφόμεναι ὑπό σταθεράν ἐνέργειαν, ἀποτελοῦν χρονικῶς ἐλαχίστους δρόμους μεταξύ τῶν σημείων της. Αὗται καθιστοῦν τό ὁλοκλήρωμα τοῦ χρόνου

$$\int dt = \int \frac{ds}{v} = \int \frac{ds}{\sqrt{2(E-V)}} ,$$

ἐλάχιστον.

Εὕρατε τάς ἐξισώσεις "Lagrange" τάς ὁποίας ἱκανοποιοῦν αἱ βραχυστόχρονοι τροχιαί.

4. Ὑλικόν σημεῖον κινεῖται ἐπί κατακορύφου ἐπιπέδου ἐντός πεδίου βαρύτητος ἐντάσεως g . Νά εὑρεθοῦν αἱ βραχυστόχρονοι τροχιαί.

6.1.1. Μή ἀδρανειακά Συστήματα ἀναφορᾶς.

Εἰς τά προηγούμενα κεφάλαια ἐμελετήθη ἡ κίνησις ἐντός ἀδρανειακῶν συστημάτων ἀναφορᾶς. Ἡ χρῆσις τῶν ἐξισώσεων Lagrange ἐπιτρέπει τήν ἀπ'εὐθείας ἐπέκτασιν καί εἰς μή ἀδρανειακά συστήματα ἀναφορᾶς. Πράγματι, ἐφ'ὅσον διά τήν ἐξαγωγήν τῶν ἐξισώσεων τοῦ Lagrange ἐκ τῆς ἀρχῆς τῆς ἐλαχίστης δράσεως δέν ἐτέθη οὐδείς περιορισμός ἀφορῶν τό σύστημα ἀναφορᾶς, αἱ ἐξισώσεις αὗται ἰσχύουν καί διά μή ἀδρανειακά συστήματα.

Κατωτέρω θά περιορισθῶμεν εἰς στερεά μή ἀδρανειακά συστήματα. Ἐκκινοῦντες, συνήθως, ἐκ τῆς γνωστῆς μορφῆς τῆς L εἰς ἀδρανειακόν σύστημα ἔχομεν νά εὕρωμεν τήν νέαν μορφήν L' τῆς Lagrangian εἰς τό θεωρούμενον μή ἀδρανειακόν σύστημα. Εἰς αὐτήν τήν περίπτωσιν ἄν $L = T-V$, ἀρκεῖ νά εὕρωμεν τήν νέαν ἔκφρασιν τῆς κινητικῆς ἐνεργείας, ἤτοι νά καθορίσωμεν τόν μετασχηματισμόν τῆς ταχύτητος.

Τό πλέον γενικόν στερεόν μή ἀδρανειακόν σύστημα Σ, ἐκτελεῖ τόσον μεταφορικήν, μεταβαλλομένης ἐν γένει ταχύτητος, ὅσον καί περιστροφικήν κίνησιν ὡς πρός ἀδρανειακόν τι σύστημα

Σ_α. Μίαν τοιαύτην κίνησιν δυνάμεθα νά ἀναλύσωμεν ὡς ἑξῆς : θεωρήσωμεν σύστημα Σ_μ κινούμενον παραλλήλως πρός τό Σ_α μέ ταχύτητα $\vec{U}(t)$ καί ἔχον κοινήν ἀρχήν μετά τοῦ Σ, τό ὁποῖον περιστρέφεται πέριξ τούτου μέ γωνιακήν ταχύτητα $\vec{\omega}(t)$. Ἔστω $\vec{v}_\alpha, \vec{v}_\mu$ καί $\vec{v}$ αἱ ταχύτητες ἑνός ὑλικοῦ σημείου ὡς πρός τά Σ_α, Σ_μ καί Σ ἀντιστοίχως.

Ἔχομεν

$$\vec{v}_\alpha = \vec{v}_\mu + \vec{U}(t) , \qquad (6.1.1\text{-}1)$$

καί

$$\vec{v}_\mu = \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r} , \qquad (6.1.1\text{-}2)$$

ὅπου $\vec{r}$ τό ἄνυσμα θέσεως τοῦ ὑλικοῦ σημείου ὡς πρός τό Σ.

Ἤτοι :

$$\vec{v}_\alpha = \vec{v} + \dot{U}(t) + \vec{\omega} \times \vec{r} . \qquad (6.1.1\text{-}3)$$

Ἡ ἐξίσωσις (6.1.1-3) δίδει τόν ζητούμενον μετασχηματισμόν τῆς ταχύτητος. Ἄν εἰς τό ἀδρανειακόν σύστημα ἡ ἔκφρασις τῆς Lagrangian εἶναι

$$L_\alpha = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{r}_\alpha^{\,2}(i) - V , \qquad (6.1.1\text{-}4)$$

ἡ Lagrangian L_μ ὡς πρός τό μή ἀδρανειακόν σύστημα λαμβάνεται δι'ἀντικαταστάσεως τῆς σχέσεως (6.1.1-3) εἰς τήν (6.1.1-4). Ἔχομεν

$$L_\mu = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left[\vec{v}_i + \vec{U} + \vec{\omega} \times \vec{r}_i \right]^2 - V = \frac{1}{2} \sum_i \Bigg[m_i \left[\vec{v}_i + \vec{\omega} \times \vec{r}_i \right]^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} m_i \vec{U}^2 + m_i \left[\vec{v}_i + \vec{\omega} \times \vec{r}_i \right] \cdot \vec{U} \Bigg] - V ,$$

$$m \left[\vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r} \right] \cdot \vec{U} = m \vec{v}_\mu . \vec{U} = m \frac{d\vec{r}}{dt} . \vec{U} = m \frac{d}{dt} (\vec{r} . \vec{U}) -$$

$$- m\vec{r} . \frac{d\vec{U}}{dt} = m \frac{d}{dt} (\vec{r} . \vec{U}) - m\vec{r} . \vec{\gamma} ,$$

ὅπου $\vec{\gamma}$ ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς ἀρχῆς τοῦ Σ_μ ὡς πρός τό Σ_α,

$$L_\mu = \sum_i \Bigg[\frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{\,2} + \frac{1}{2} m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 + m_i \vec{v}_i . (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) + \frac{1}{2} m_i \vec{U}^2 +$$

$$+ m_i \frac{d}{dt} (\vec{r}_i \cdot \vec{U}) - m_i \vec{r}_i . \vec{\gamma} \Bigg] - V . \qquad (6.1.1\text{-}5)$$

Ἡ ἀνωτέρω Lagrangian δύναται νά ἁπλοποιηθῇ περαιτέρω.

'Ο τέταρτος καί πέμπτος ὅρος αὐτῆς εἶναι ὁλικά διαφορικά, ὡς πρός τόν χρόνον καί δύνανται νά παραλειφθοῦν. Περί τοῦ-του θά ἀσχοληθῶμεν ἐκτενέστερον εἰς τήν ἑπομένην παράγραφον (§ 6.1.2) τῶν μετασχηματισμῶν βαθμίδος. Τελικῶς, ἡ Lagrangian τοῦ συστήματος ὡς πρός τό μή ἀδρανειακόν σύστημα λαμβάνει τήν μορφήν

$$L_\mu = \sum_i \left[\frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{\,2} + \frac{1}{2} m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 + m_i \vec{v}_i \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) - m_i \vec{r}_i \cdot \vec{\gamma}\right] - V \;. \qquad (6.1.1\text{-}6)$$

Αἱ ἀντίστοιχοι ἐξισώσεις τοῦ Lagrange,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0 \;, \qquad (6.1.1\text{-}7)$$

ὅπου

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} = m_i \vec{v}_i + m_i(\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \;,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}\right) = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} + m_i\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_i\right) + m_i(\vec{\omega} \times \vec{v}_i) \;,$$

καί

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \times \vec{\omega} + m_i(\vec{v}_i \times \vec{\omega}) - m_i \vec{\gamma} - \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} \;,$$

δίδουν τάς νέας ἐξισώσεις τῆς κινήσεως,

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} + m_i\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_i\right) + m_i(\vec{\omega} \times \vec{v}_i) - m_i(\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \times \vec{\omega} - m_i(\vec{v}_i \times \vec{\omega}) + m_i \vec{\gamma} + \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} = 0 \;, \qquad (6.1.1\text{-}8)$$

ἤ ,

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} - m_i \vec{\gamma} + 2m_i(\vec{v}_i \times \vec{\omega}) + m_i(\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \times \vec{\omega} - m_i\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_i\right). \qquad (6.1.1\text{-}9)$$

Αἱ ἐξισώσεις (6.1.1-9) ὑποκαθιστοῦν τόν νόμον τοῦ Νεύτωνος διά τό σύστημα Σ.

'Ως πρός τό μή ἀδρανειακόν σύστημα ἀναφορᾶς Σ, ἐκτός τῆς ἀρχικῆς δυνάμεως $-\frac{\partial V}{\partial \vec{r}}$ παρουσιάζονται ἐπιπροσθέτως καί αἱ ἑξῆς νέαι δυνάμεις : ἡ φυγόκεντρος δύναμις $\vec{F}_\varphi = m(\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{\omega}$, καί ἡ δύναμις coriolis $F_c = 2m(\vec{v} \times \vec{\omega})$, ὀφειλόμεναι εἰς τήν γωνιακήν ταχύτητα τοῦ Σ, ἡ δύναμις

$\vec{F}_{\mu} = m\vec{\gamma}$ ὀφειλομένη εἰς τήν γραμμικήν ἐπιτάχυνσιν τῆς ἀρχῆς τοῦ Σ καί τέλος ἡ δύναμις $\vec{F}_{\omega} = - m\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} \right)$ λόγῳ γωνιακῆς (στροφικῆς) ἐπιταχύνσεως $\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ τοῦ Σ. Ὅλαι αἱ ἀνωτέρω φαινόμεναι δυνάμεις καλοῦνται "ἀδράνειακαί" διότι εἶναι ἀνάλογοι τῆς ἀδρανειακῆς μάζης τῶν ὑλικῶν σημείων.

Λόγῳ τῆς ἰσοδυναμίας βαρείας καί ἀδρανοῦς μάζης αἱ δυνάμεις αὗται δύνανται νά ταυτισθοῦν, τοπικῶς τοὐλάχιστον μέ πεδία βαρύτητος (τεῦχος Ι, § 1.3). Τό πεδίον "βαρύτητος" τό περιγράφον τάς παλιρροιακάς δυνάμεις Coriolis εἶναι ἰδιαζούσης μορφῆς

$$F_i = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} v_k ,$$

ὅπου

$$a_{ik} = \sum_{\ell=1}^{3} \varepsilon_{ik\ell}\omega_{\ell} \ .$$

6.1.2. Μετασχηματισμοί βαθμίδος. (Gauge Transformations).

Εἰς τήν προηγουμένην παράγραφον ἐθεωρήσαμεν τό συναλλοίωτον τῶν ἐξισώσεων τῆς κινήσεως ὑπό μορφήν Lagrange, κατά τούς

μετασχηματισμούς τῶν συντεταγμένων. Εἰς τήν παροῦσαν παράγραφον θά ἀσχοληθῶμεν μέ τούς μετασχηματισμούς βαθμίδος, οἵτινες μεταβάλλουν τήν Lagrangian, ἀφίοντες ἀναλλοιώτους τάς ἐξισώσεις τῆς κινήσεως καί συνεπῶς καί τό φυσικόν περιεχόμενον τοῦ δυναμικοῦ συστήματος.

Οἱ ἐν λόγῳ μετασχηματισμοί ἔχουν τήν μορφήν :

$$L \to L' = L(q,\dot{q}, t) + G(q,t) \ , \qquad (6.1.2\text{-}1)$$

ὅπου

$$G(q,t) = \frac{d}{dt} g(q,t) = \frac{\partial g}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial g}{\partial t} . \qquad (6.1.2\text{-}2)$$

Ἡ συνάρτησις $G(q,t)$ καλεῖται γεννήτωρ τῶν μετασχηματισμῶν.

Τό ἀναλλοίωτον τῶν ἐξισώσεων κινήσεως εἶναι προφανές ἐκ τῆς ἀρχῆς τῆς ἐλαχίστης δράσεως :

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \delta L' dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta G dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \delta \frac{d}{dt} g(q,t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt + \delta g(q,t) \Big|_{t_1}^{t_2} =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt + \left.\frac{\partial g}{\partial q}\delta q\right|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt \ .$$

Ἤτοι ἐκ τῆς

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \text{ ἕπεται } \delta \int_{t_1}^{t_2} L' dt = 0 \ .$$

Εἰς τό αὐτό συμπέρασμα καταλήγομεν καί ἀπ'εὐθείας ἐκ τῶν ἐξισώσεων τοῦ Lagrange. Πράγματι : Ἐκ τῆς (6.1.2-2) ἔχομεν

$$\frac{\partial G}{\partial \dot q} = \frac{\partial}{\partial \dot q}\left(\frac{\partial g}{\partial q}\dot q + \frac{\partial g}{\partial t}\right) = \frac{\partial g}{\partial q} , \quad (6.1.2\text{-}3)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial G}{\partial \dot q} = \frac{\partial^2 g}{\partial^2 q}\dot q + \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial q} , \quad (6.1.2\text{-}4)$$

καί

$$\frac{\partial G}{\partial q} = \frac{\partial^2 g}{\partial^2 q}\dot q + \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial t} \ . \quad (6.1.2\text{-}5)$$

Συγκρίνοντες τάς (6.1.2-4) καί (6.1.2-5) μεταξύ των καί λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν ὅτι

$$\frac{\partial^2 g}{\partial q \partial t} = \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial q}$$

ἀρκεῖ ἀμφότεροι αἱ παράγωγοι νά ὑπάρχουν καί εἶναι συνεχεῖς, ἔχομεν

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial G}{\partial \dot q} - \frac{\partial G}{\partial q} = 0 , \quad (6.1.2\text{-}6)$$

καί ἐπιβεβαιοῦμεν ὅτι αἱ ἐξισώσεις τοῦ Lagrange παραμένουν ἀναλλοίωτοι εἰς τούς μετασχηματισμούς βαθμίδος $L \to L'$ (6.1.2-2).

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot q} - \frac{\partial L'}{\partial q} = 0 \quad (6.1.2\text{-}7)$$

Γενικώτεροι ἔτι μετασχηματισμοί ἀφίοντες τάς ἐξισώσεις τῆς κινήσεως ἀναλλοιώτους εἶναι οἱ μετασχηματισμοί ἐπαφῆς (contact transf.) :

$$L(q,\dot q,t) \to L'(q',\dot q',t) = L(q,\dot q,t) + \frac{d}{dt} g(q,q',t), \quad (6.1.2\text{-}8)$$

οἱ ὁποῖοι ἀποτελοῦν συνδυασμόν μετασχηματισμοῦ βαθμίδος καί συντεταγμένων.

Οἱ μετασχηματισμοί βαθμίδος εὑρίσκουν εὐρυτάτην χρῆσιν εἰς τήν ἠλεκτρομαγνητικήν θεωρίαν (ἄσκ. 2).

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ.

1. Δείξατε ὅτι οἱ μετασχηματισμοί Γαλιλαίου δύνανται νά θεωρηθοῦν ὡς μετασχηματισμοί βαθμίδος.

2. Δείξατε ὅτι ἡ Lagrangian

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - e\phi(\vec{x},t) + \frac{e\dot{\vec{x}}}{c}.\vec{A}(\vec{x},t)$$

ὑλικοῦ σημείου μάζης m καί φορτίου e ἐντός ἠλεκτρομαγνητικοῦ πεδίου (ἄσκ. 5, § 5.3), εἶναι ἀναλλοίωτος εἰς τόν μετασχηματισμόν βαθμίδος $\varphi \to \varphi + \dot{\psi}$, $\vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla}\psi$ τῶν ἠλεκτρομαγνητικῶν δυναμικῶν.

6.2. ΕΠΕΚΤΑΣΙΣ ΤΗΣ ΑΡΧΗΣ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ ΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΑΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΤΑΞΕΩΣ.

Εἰς τήν προηγουμένην παράγραφον ἐφηρμόσαμεν τήν ἀρχήν τῆς ἐλαχίστης δράσεως εἰς Lagrangian $L(x,\dot{x},t)$ συναρτήσεις τῆς θέσεως x καί τῆς πρώτης παραγώγου $\frac{dx}{dt}$ ὡς πρός τόν χρόνον, διά τήν παραγωγήν, ὡς ἐξισώσεως τῆς κινήσεως διαφορικῆς ἐξισώσεως δευτέρας τάξεως ὡς πρός τόν χρόνον.

Ἡ μέθοδος τῆς ἐλαχίστης δράσεως δύναται νά ἐπεκταθῆ καί εἰς διαφορικάς ἐξισώσεις ἀνωτέρας τάξεως.

Ἔστω μία συνάρτησις Lagrange $L(x, \frac{dx}{dt}, .. \frac{d^{(n)}}{(dt)^n}x, t)$, συνάρτησις τῆς θέσεως x τοῦ χρόνου t καί τῶν παραγώγων $\frac{d}{dt}x, \ldots \frac{d^{(n)}}{(dt)^n}x$ μέχρι n τάξεως, τήν ὁποίαν διά τήν ἁπλότητα θεωροῦμεν εἰς τόν χῶρον τῆς μιᾶς διαστάσεως. Τό ὁλοκλήρωμα τῆς δράσεως, συναρτησοειδές τῶν δυνατῶν τροχιῶν x(t), ὁρίζεται ἐν προκειμένῳ διά τοῦ

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(x, \frac{dx}{dt}, \ldots \frac{d^{(n)}x}{(dt)^n}, t)dt \qquad (6.2\text{-}1)$$

καί ἡ Ἀρχή τοῦ Hamilton γενικεύεται ὡς ἑξῆς :

'Αἱ τροχιαί τοῦ συστήματος εἰς τόν θεσεογραφικόν χῶρον $x(t)$ ιαθιστοῦν τό ὁλοκλήρωμα τῆς δράσεως ἀκρότατον ὡς πρός συναρτη-ιακάς μεταβολάς τῶν δυνατῶν τροχιῶν $\delta x(t)$ ὑποκειμένων εἰς άς συνοριακάς συνθήκας $\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0$

$$\delta\frac{dx}{dt}(t_1) = \delta\frac{dx}{dt}(t_2) = 0,\ldots,\ \delta\frac{d^{(n-1)}}{(dt)^{n-1}}x(t_1) =$$

$$= \delta\frac{d^{(n-1)}}{(dt)^{n-1}}x(t_2) = 0 \qquad , \qquad (6.2\text{-}2)$$

ιά τυχόντα t_1, t_2 ".

Μηδενίζοντες τό συναρτησιακόν διαφορικόν τῆς (6.2-1)

$$\delta I = 0 \;, \qquad (6.2\text{-}3)$$

ιαί λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν τάς συνοριακάς συνθήκας (6.2-2), ἔχο-ιεν,

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial x}\,\delta x(t) + \frac{\partial L}{\partial\frac{dx}{dt}}\,\delta\frac{dx}{dt} + \ldots + \frac{\partial L}{\partial\frac{d^n}{(dt)^n}}\,\delta\frac{d^{(n)}x}{(dt)^n}\right]dt =$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial\frac{dx}{dt}} + \ldots + (-)^n\,\frac{d^{(n)}}{(dt)^n}\,\frac{\partial L}{\partial\frac{d^{(n)}x}{(dt)^n}}\right]\delta x(t)dt = 0$$

$$(6.2\text{-}4)$$

Διά τήν μετάβασιν ἀπό τοῦ δευτέρου εἰς τό τρίτον μέλος τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος ἐχρησιμοποιήθησαν αἱ ταυτότητες

$$\delta\,\frac{d^{(n)}x}{(dt)^n} = \frac{d^{(n)}}{(dt)^n}\,\delta x(t) \quad , \qquad (6.2\text{-}5)$$

καί ἐγένοντο προφανεῖς ὁλοκληρώσεις κατά μέρη. Αἱ συναρτήσεις $\delta x(t)$ θεωροῦνται εἰς τόν χῶρον C^∞ τῶν ἀπείρως παραγωγισίμων καί συνεχῶν συναρτήσεων ὥστε ἡ μέθοδος δύναται νά ἐφαρμοσθῆ εἰς τήν γενικήν περίπτωσιν ὅπου ἡ Lagrangian καί αἱ μερικαί παράγωγοί της εἶναι γενικευμέναι συναρτήσεις, κατανομαί Schwartz.

'Εκ τῆς (6.2-4) ἕπονται αἱ ἐξισώσεις Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial\frac{dx}{dt}} + \ldots + (-)^n\,\frac{d^{(n)}}{(dt)^n}\,\frac{\partial L}{\partial\frac{d^{(n)}x}{dt}} = 0 \;.$$

$$(6.2\text{-}6)$$

"Ε φ α ρ μ ο γ ή".

"Εστω ἡ Lagrangian $L = \frac{m}{2}\left[\dot{\vec{x}}^2 - \frac{1}{\omega^2}\ddot{\vec{x}}^2\right]$.

Ζητοῦμεν τάς ἐξισώσεις τοῦ Lagrange καί τήν τροχιάν τῆς κινήσεως.

Αἱ ἐξισώσεις Lagrange διά τό συγκεκριμένον πρόβλημα εἶναι,

$$\frac{d^{(2)}}{(dt)^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}+\frac{\partial L}{\partial x_i}=0,\ i=1,2,3. \qquad (6.2\text{-}7)$$

ὅπου

$$\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_i}=-\frac{m\ddot{x}_i}{\omega^2},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}=m\dot{x}_i, \qquad (6.2\text{-}8)$$

καί

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}=0.$$

Ἀντικαθιστῶντες τάς ἐκφράσεις (6.2-8) εἰς τήν (6.2-7) ἔχομεν τήν ἐξίσωσιν τῆς κινήσεως

$$\frac{d^{(4)}\vec{x}}{(dt)^4}+\omega^2\frac{d^{(2)}}{(dt)^2}\vec{x}=0. \qquad (6.2\text{-}9)$$

Αὕτη ὁλοκληρουμένη μᾶς δίδει τήν γενικήν κίνησιν τοῦ συστήματος.

$$x_i(t)=a_i+tb_i+c_i\sin(\omega t+\varphi_i). \qquad (6.2\text{-}10)$$

Ἡ λύσις (6.2-10) παρέχει τήν δυνατότητα φυσικῆς ἑρμηνείας τοῦ δυναμικοῦ συστήματος τό ὁποῖον περιγράφει ἡ Lagrangian (6.2-7). Θέτοντες

$$\vec{a}=\vec{X}=\frac{\vec{r}_1+\vec{r}_2}{2};\ \vec{b}=\vec{V}=M\dot{\vec{X}};\ 2C_i\sin(\omega t+\varphi_i)=(\vec{r}_1-\vec{r}_2)_i,$$

$\vec{x}=\vec{r}_1=\vec{x}_o+\vec{r}$, ἔχομεν ἕν σύστημα δύο ὑλικῶν σημείων ἀλληλεπιδρώντων διά δυναμικοῦ ἁρμονικοῦ ταλαντωτοῦ $V(r)=\frac{\omega^2}{2}r^2$.

Ἡ χρησιμοποίησις Lagrangian συναρτήσεων μέ ἀνωτέρας παραγώγους ἐπιτρέπει τήν περιγραφήν τῶν δυναμικῶν συστημάτων εἰς θεσεογραφικούς χώρους μέ ὀλιγωτέρας τῶν συνήθων διαστάσεων.

Εἰς τό προκείμενον παράδειγμα συστήματος δύο σωματίων, ἕξ βαθμῶν ἐλευθερίας εἰς τόν συνήθη θεσεογραφικόν χῶρον ἤ δώδεκα βαθμῶν ἐλευθερίας εἰς τόν χῶρον φάσεων τῶν φυσικῶν καταστάσεων, χρησιμοποιεῖται θεσεογραφικός χῶρος τριῶν διαστάσεων ἀντί τοῦ συνήθους χώρου τῶν ἕξ διαστάσεων.

6.3. ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.

Ἡ ἔκφρασις τῶν ἐξισώσεων τῆς κινήσεως διά τῆς ἀρχῆς τῆς ἐλαχίστης δράσεως ἐπιτρέπει θεμελιακήν σύνδεσιν τῆς Ἀναλυτικῆς Μηχανικῆς μέ τήν Διαφορικήν Γεωμετρίαν.

Θεωρήσωμεν πρός τοῦτο ἕν σύστημα ν-ὑλικῶν σημείων, κατ' ἀρχάς ἐλεύθερον δυνάμεων, πλήν τῶν δυνάμεων συνδέσμων, καί συνεπῶς περιγραφόμενον πλήρως διά τῆς κινητικῆς ἐνεργείας του.

$$T = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{2} m_\ell \dot{\vec{x}}_\ell^2 = \sum_{i,k=1}^{m} T_{ik}(q)\dot{q}_i\dot{q}_k , \qquad (6.3\text{-}1)$$

ὅπου $T_{ik}(q) = \sum_{\ell} \frac{\partial \vec{x}_\ell}{\partial q_i} \frac{\partial \vec{x}_\ell}{\partial q_k}$.

Ὁ πίναξ $T_{ik}(q)$ τῆς κινητικῆς ἐνεργείας, συμμετρικός ὡς πρός i,k εἶναι θετικός (positive definite) (ἄσκ. 1) καί βάσει αὐτοῦ, τό τετραγωνον τοῦ "κινηματικοῦ στοιχείου τόξου"

$$(ds)^2 = T(dt)^2 = \sum_{i,k}^{m} T_{ik}(q)\, dq_i\, dq_k , \qquad (6.3\text{-}2)$$

ὁρίζει μίαν μετρικήν Riemann εἰς τόν θεσεογραφικόν χῶρον.

Αἱ Γεωδαισιακαί γραμμαί τοῦ χώρου αὐτοῦ εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ αἱ καμπύλαι $q_i(s)$ αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν τό ὁλοκλήρωμα

$$\int ds = \int \sqrt{\sum_{ik}^{m} T_{ik}(q) \frac{dq_i}{ds} \frac{dq_i}{ds}}\, ds , \qquad (6.3\text{-}3)$$

ἀκρότατον, ἤτοι

$$\delta\int ds = \sum_{\ell=1}^{m} \int \left(\frac{\partial}{\partial q_\ell}\sqrt{T} - \frac{d}{ds} \frac{\partial}{\partial \frac{dq_\ell}{ds}} \sqrt{T} \right) \delta q_\ell ds = 0 , \qquad (6.3\text{-}4)$$

ὅπου $\delta q_\ell(s_1) = \delta q_\ell(s_2) = 0$, $\ell = 1,\ldots n$.

Ἐκ τῆς (2.3-4) ἕπονται καί αἱ διαφορικαί ἐξισώσεις τῶν Γεωδαισιακῶν γραμμῶν,

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial}{\partial \frac{dq_\ell}{ds}} \sqrt{T} - \frac{\partial}{\partial q_\ell} \sqrt{T} = 0 . \qquad (6.3\text{-}5)$$

Αἱ ἐξισώσεις αὗται δίδονται συνήθως ὑπό τήν μορφήν* (ἄσκ. 2) ,

* Βλ.π.χ. "Ἠλεκτρομαγνητική Θεωρία" Ι, Κεφ.1 τοῦ συγγραφέως.

$$\frac{d^2 q_i}{(ds)^2} + \Gamma^i{}_{k\ell} \frac{dq_k}{ds} \frac{dq_\ell}{ds} = 0, \qquad (6.3\text{-}6)$$

ὅπου

$$\Gamma^i_{k\ell} = \frac{T^{ir}}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial q_\ell} T_{rk} + \frac{\partial}{\partial q_k} T_{r\ell} - \frac{\partial}{\partial q_r} T_{k\ell}\right\} \qquad (6.3\text{-}7)$$

Θά δείξωμεν τό θεμελιῶδες θεώρημα :

Θεώρημα : "Αἱ τροχιαί τοῦ ἐλευθέρου συστήματος καί αἱ Γεωδαισιακαί γραμμαί τοῦ θεσεογραφικοῦ χώρου ἐφοδιασμένοι μέ τήν μετρικήν τῆς κινητικῆς ἐνεργείας ταυτίζονται".

Εἰς τήν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος θά χρησιμοποιήσωμεν τό ἑξῆς λῆμμα.

Αἱ Γεωδαισιακαί γραμμαί (6.3-3), (6.3-4) καθιστοῦν ἀκρότατον δI = 0, τυχόν "ὁλοκλήρωμα δράσεως" τῆς μορφῆς

$$I = \int F(T_{ik}(q) \quad \frac{dq_i}{ds} \frac{dq_k}{ds}) \, ds\,, \qquad (6.3\text{-}8)$$

ὅπου F(T) τυχοῦσα συνάρτησις τῆς "κινητικῆς ἐνεργείας".

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς.

'Εκ τῆς (6.3-5) ἔχομεν

$$\delta I = \int F' \left[\frac{\partial}{\partial q_\ell}\left(\sqrt{T_{ik} \frac{dq_i}{ds} \frac{dq_k}{ds}}\right) \delta q_\ell + \frac{\partial}{\partial \frac{dq_\ell}{ds}} \left(\sqrt{T_{ik}(q) \frac{dq_i}{ds} \frac{dq_k}{ds}}\right) \delta \dot{q}_\ell \right] ds =$$

$$= F' \left[\frac{\partial}{\partial q_\ell} \sqrt{T_{ik} \frac{dq_i}{ds} \frac{dq_k}{ds}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \frac{dq_\ell}{ds}} \sqrt{T_{ik}(q) \frac{dq_i}{ds} \frac{dq_k}{ds}} \right] \delta q_\ell \, ds, \qquad (6.3\text{-}9)$$

ὅπου διά τήν μετάβασιν ἀπό τοῦ δευτέρου μέλους εἰς τό τρίτον μέλος τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος ἐγένετο μερική ὁλοκλήρωσις καί ἐχρησιμοποιήθη ἡ ταυτότης

$$\frac{d}{ds} F'\left(\sqrt{T_{ik}\frac{dq_i}{ds}\frac{dq_k}{ds}}\right) = 0. \qquad (6.3\text{-}10)$$

Διά συγκρίσεως τῆς (6.3-9) μέ τήν (6.3-4) ἡ ἀπόδειξις τοῦ λήμματος ἐπερατώθη.

Διά τήν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος, ἀρκεῖ νά ἐκφράσωμεν τήν δρᾶσιν

$$\int T_{ik} \frac{dq_i}{dt}\frac{dq_k}{dt}\, dt = 0 \qquad ,$$

ὑπό μορφήν (6.3-8). Πρός τοῦτο ἔχομεν

$$\int T_{ik}\frac{dq_i}{dt}\frac{dq_k}{dt}\, dt = \int T_{ik}\frac{dq_i}{ds}\frac{dq_k}{ds}\frac{ds}{dt}\, ds =$$

$$\int = F(\sqrt{})\left(\frac{ds}{dt}\right) ds, \qquad (6.3\text{-}11)$$

ὅπου $\dot{F}(x) = x^2$.

Ἡ παρουσία τοῦ προσθέτου παράγοντος $\frac{ds}{dt}$ συνιστᾶ ἁπλῶς μίαν ἀλλαγήν τῆς μεταβλητῆς τῆς ὁλοκληρώσεως καί δέν ἀλλοιώνει τήν γεωμετρίαν τῶν Γεωδαισιακῶν γραμμῶν.

Τά ἀνωτέρω δύνανται νά ἐπεκταθοῦν καί εἰς γενικά συντη-

ρητικά συστήματα παρουσίᾳ δυναμικοῦ $U \neq 0$. Δι' ἕν τοιοῦτον σύστημα $L = T-U$ αἱ τροχιαί σταθερᾶς ἐνεργείας E, συμπίπτουν μέ τάς γεωδαισιακάς γραμμάς τοῦ μετρικοῦ στοιχείου τόξου

$$\sum_{i,\,k=1}^{\nu} \sqrt{2(E-U(q))T_{ik}(q)dq_i dq_k} \quad ,$$

τοῦ Jacobi. Φυσικῶς ὁ πρόσθετος συντελεστής $(E-U) = T$ ὁρίζει τήν στάθμην τῆς κινητικῆς ἐνεργείας εἰς τήν ἐφαπτομένικήν περιοχήν ἑκάστου σημείου q . Οὕτω ἡ Δυναμική ἔχει μετατραπεῖ εἰς Γεωμετρίαν. Ἡ ἀντίστροφος πορεία εἶναι ἐπίσης χρήσιμος. Ἡ μετάθεσις τοῦ μοναδιαίου ἐφαπτομενικοῦ ἀνύσματος μιᾶς γεωδαισιακῆς γραμμῆς ἑνός χώρου Riemman παραλλήλως πρός ἑαυτήν δύναται νά ἑρμηνευθῇ ὡς "μετάθεσις τοῦ ἀνύσματος ταχύτητος ἐλευθέρου ὑλικοῦ σημείου".

Ἀντί τοῦ συνήθους νόμου τῆς ἀδρανείας "Τά ἐλεύθερα ὑλικά σημεῖα κινοῦνται ἰσοταχῶς καί εὐθυγράμμως, ὡς πρός ἀδρανειακά συστήματα ἀναφορᾶς", ἔχομεν "Ἐλεύθερα ὑλικά συστήματα κινοῦνται "ἰσοταχῶς" κατά μῆκος τῶν γεωδαισιακῶν γραμμῶν τοῦ θεσεογραφικοῦ χώρου".

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ.

1. Δείξατε ὅτι τό γενικευμένον "κινηματικόν στοιχεῖον τόξου" ὁρίζει ἕναν μετρικόν τανυστήν Riemann εἰς τόν θεσεογραφικόν χῶρον.

2. Ἐκκινοῦντες ἐκ τῶν ἐξισώσεων Lagrange (6.3-5), ἐπιβεβαιώσατε τήν μορφήν (6.3-6) τῶν ἐξισώσεων τῶν Γεωδαισιακῶν γραμμῶν.

3. Ὑλικόν σημεῖον κινεῖται ἄνευ τριβῆς ἐπί ἐπιφανείας σφαίρας. Νά εὑρεθοῦν αἱ τροχιαί καί δειχθῆ ὅτι αὗται ἀποτελοῦν γεωδαισιακάς μέ τήν μετρικήν τῆς συνήθους ἀποστάσεως.

4. Δείξατε ὅτι παρουσίᾳ ℓ προσθέτων συνδέσμων

$$\varphi_k(q_1,\ldots,q_m,t)=0, \qquad (k=1,\ldots,\ell)$$

αἱ ἐξισώσεις τοῦ Lagrange τροποποιοῦνται ὡς ἀκολούθως

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=\sum_{k=1}^{\ell}\lambda_k(t)\,\frac{\partial \phi_k}{\partial q_i}\,.$$

Οἱ συντελεσταί λ καλοῦνται πολλαπλασιασταί τοῦ Lagrange.

5. Ἄν $g_{ij}(q)$ εἶναι ὁ μετρικός τανυστής τοῦ θεσεογραφικοῦ χώρου, δείξατε ὅτι αἱ ἀντιδράσεις ἑκάστου συνδέσμου φ_k δίδονται ἐκ τοῦ τύπου

$$\lambda_k(t)\sqrt{g_{ij}\,\frac{\partial\varphi_k}{\partial qi}\,\frac{\partial\varphi_k}{\partial qj}}\,.$$

6. Νά εὑρεθοῦν αἱ γεωδαισιακαί κυλινδρικῆς ἐπιφανείας καί ἡ ἀντίδρασις συνδέσμου ἐπί ὑλικοῦ σημείου μάζης $m = 1$ κινουμένου ἄνευ τριβῆς ἐπ'αὐτῆς.

7. Ὑλικόν σημεῖον μάζης m κινεῖται ἄνευ τριβῆς ἐπί κυκλικῆς στεφάνης ἀκτῖνος α. Εὕρατε τήν ἀντίδρασιν τοῦ συνδέσμου ὅταν ἡ στεφάνη περιστρέφεται μέ γωνιακήν ταχύτητα $\omega(t)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

"ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΙ - ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΔΙΑΤΗΡΗΣΕΩΣ - ΚΑΝΟΝΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ HAMILTON"

7.1. ΘΕΩΡΗΜΑ NOETHER.

Ἔστω $t \to t'(t)$, $q(t) \to q'(t')$ μία ὁμάς μετασχηματισμῶν τοῦ χωροχρόνου, ἤτοι τῶν συντεταγμένων q_i τοῦ θεσεογραφικοῦ χώρου καί τοῦ χρόνου t . Οἱ μετασχηματισμοί οὗτοι δύνανται νά θεωρηθοῦν καί ὡς ἀλλαγή παρατηρητῶν. Προκειμένου περί συνεχοῦς τοπολογικῆς ὁμάδος μετασχηματισμῶν, ὁμάδος Lie , οἱ ἀπειροστοί μετασχηματισμοί ἐκφράζονται ὡς ἑξῆς :

$$t' = t + \tau\delta t \tag{7.1-1}$$

$$q_i'(t') = q_i(t) + \sum_{\mu=1}^{\nu} Q_{i\mu}\delta\lambda^{\mu} \quad , \qquad i = 1,\ldots,m$$

ὅπου οἱ πίνακες (τ,Q) ἀποτελοῦν τούς γεννήτορας τοῦ μετασχηματισμοῦ, ὁ δείκτης i χαρακτηρίζει τούς βαθμούς ἐλευθερίας τοῦ συστήματος καί ὁ δείκτης μ τούς μετασχηματισμούς.

Οἱ μετασχηματισμοί οὗτοι δέν ἀφοροῦν χρονικήν ἐξέλιξιν. Ἐάν συσχετίσωμεν τούτους μετά τῆς χρονικῆς ἐξελίξεως τοῦ συστήματος, ἔχομεν τήν συναρτησιακήν μεταβολήν

$$\bar{\delta}q_i \equiv q_i'(t')-q_i(t') = q_i'(t')-q_i(t)+q_i(t)-q_i(t') =$$

$$= \sum_{\mu} Q_{i\mu}\delta\lambda^{\mu} - \left[q_i(t+\tau\delta t)-q_i(t)\right] =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{\nu} Q_{i\mu}\delta\lambda^{\mu}-\dot{q}_i(t)\tau\delta t+O(\delta^2) \quad . \tag{7.1-2}$$

Ὥστε ἡ συναρτησιακή μεταβολή τοῦ συστήματος εἶναι

$$\bar{\delta}q_i = -\dot{q}_i(t)\tau\delta t + \sum_{\mu=1}^{\nu} Q_{i\mu}\delta\lambda^{\mu} \quad . \tag{7.1-3}$$

Θεωρήσωμεν τώρα τήν μεταβολήν τῆς δράσεως τήν ὀφειλομένην εἰς ἕνα τοιοῦτον μετασχηματισμόν :

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} dtL(q_i,\dot{q}_i t) = \int_{t_1'}^{t_2'} dt'L(q_i',\dot{q}_i',t') - \int_{t_1}^{t_2} dt'L(q_i,\dot{q}_i,t') =$$

$$= \int_{t_1'}^{t_2} dt'L(q_i',\dot{q}_i',t')- \int_{t_1}^{t_2} dt'L(q_i,\dot{q}_i,t') + \int_{t_1'}^{t_1} dt'L(q_i',\dot{q}_i',t') +$$

$$+ \int_{t_2}^{t_2'} dt'L(q_i',\dot{q}_i',t') = \int_{t_1}^{t_2} dt\bar{\delta}L(q_i,\dot{q}_i,t)+\tau_2 L_2\delta t_2-\tau_1 L_1\delta t_1 =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt\bar{\delta}L(q_i,\dot{q}_i,t)+ \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} L\tau\delta t dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\bar{\delta} L(q_i,\dot{q}_i,t) + \frac{d}{dt}(L\tau\delta t)\right] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\bar{\delta} q_i + \right.$$

$$\left. + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\bar{\delta}\dot{q}_i + \frac{d}{dt}(L\tau\delta t)\right] =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\sum_i \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\bar{\delta} q_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\bar{\delta}\dot{q}_i + \frac{d}{dt}(L\tau\delta t)\right] =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\bar{\delta} q_i + L\tau\delta t\right) =$$

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\sum_\mu Q_{i\mu}\delta\lambda^\mu - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\tau\delta t + \tau L\delta t\right) =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt}\left[\sum_\mu \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}Q_{i\mu}\right)\delta\lambda^\mu - \tau\left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L\right)\delta t\right].$$

(7.1-4)

Ἄν ἡ Lagrangian εἶναι τοιαύτη ὥστε τό ὁλοκλήρωμα τῆς δράσεως νά εἶναι ἀναλλοίωτον εἰς τόν μετασχηματισμόν (7.1-1), ἤτοι $\delta I = 0$, ἔχομεν

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_k \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}Q_{i\mu}\right)\delta\lambda^\mu - \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L\right)\tau\delta t\right\} = 0. \quad (7.1\text{-}5)$$

Ἐκ τῆς (7.1-5), ἐπειδή τά $\delta\lambda^\mu$ καί δt εἶναι ἀνεξάρτητα μεταξύ των, ἕπεται ὅτι

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^m \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}Q_{ik}\right] = 0\,, \quad (7.1\text{-}6)$$

καί

$$\frac{d}{dt}\left[\tau\sum_{i=1}^{\nu} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L\right] = 0\,, \quad (7.1\text{-}7)$$

ἤ

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}Q_{i\mu} = \text{σταθ}, \quad (7.1\text{-}8)$$

καί

$$\left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L\right) = \text{σταθ}. \quad (7.1\text{-}9)$$

Αἱ ἐξισώσεις (7.1-8) καί (7.1-9) ἐκφράζουν βασικά θεωρήματα διατηρήσεως. Ὥστε ἐδείχθη τό θεμελιῶδες θεώρημα τοῦ Noether :

"Εἰς ἕκαστον γεννήτορα συνεχοῦς ὁμάδος συμμετρίας τοῦ ὁλοκληρώματος τῆς δράσεως , ἤτοι ὁμάδος ἡ ὁποία ἀφίνει τό ὁλοκλήρωμα τῆς δράσεως ἀναλλοίωτον, ἀντιστοιχεῖ καί ἕν διατηρούμενον μέγεθος".

Διά τήν διατήρησιν δέν ἀρκεῖ τό ἀναλλοίωτον τῶν ἐξισώσεων τῆς κινήσεως, ἀπαιτεῖται τό ἀναλλοίωτον τῆς δράσεως (ἄσκ. 1).

7.2. ΧΩΡΟΧΡΟΝΙΚΑΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΙ - ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΚΙΝΗΣΕΩΣ.

(α) Διατήρησις τῆς γραμμικῆς ὁρμῆς.

Ἔστω σύστημα n ὑλικῶν σημείων περιγραφομένων διά τῶν ἀνυσμάτων θέσεως $\vec{q}(m)$, m = 1,..., n.
Θεωρήσωμεν τήν ὁμάδα μετασχηματισμῶν μεταθέσεως τῶν συντεταγμένων :

$$\vec{q}(m) \to \vec{q}\,'(m) = \vec{q}(m) + \delta\vec{q} \quad . \qquad (7.2\text{-}1)$$

Συγκρίνοντες τούς μετασχηματισμούς αὐτούς μετά τῆς (7.1-1) εὑρίσκομεν

$$Q_{i\mu}(m) = \delta_{i\mu} \qquad i,\mu = 1,2,3 \qquad m = 1,\dots,n ,$$

ὅπου $\delta_{i\mu}$ τό σύμβολον τοῦ Kronecker.

Εἰσάγοντες τά Q_i (m) εἰς τό θεώρημα τοῦ Noether

$$\sum_{m=1}^{N} \left[\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(m)} Q_i(m) \right] = \text{σταθερόν},$$

ὅπου ἐν προκειμένῳ $\dfrac{L}{\dot{q}_i(m)} = P_i(m)$ ἡ i^{th} συνιστῶσα τῆς γραμμικῆς ὁρμῆς τοῦ ὑλικοῦ σημείου m ἔχομεν

$$\sum_{m=1}^{N} \left[\sum_{i=1}^{3} P_i(m)\delta_{i\mu} \right] = \sum_{m=1}^{N} P_\mu(m) = P_\mu = \text{σταθερόν} \qquad \mu=1,2,3, \qquad (7.2\text{-}2)$$

ἤ

$$\sum_{m=1}^{N} \vec{P}(m) = \vec{P} = \text{σταθερόν}. \qquad (7.2\text{-}3)$$

Ὥστε τό "ἀναλλοίωτον τοῦ ὁλοκληρώματος τῆς δράσεως εἰς παράλληλον μετάθεσιν συνεπάγεται τήν διατήρησιν τῆς ὁλικῆς γραμμικῆς ὁρμῆς τοῦ συστήματος".

(β) Διατήρησις τῆς στροφορμῆς.

Θεωρήσωμεν τόν μετασχηματισμόν περιστροφῆς τοῦ δυναμικοῦ συστήματος κατά γωνίαν $\delta\vec{\varphi}$

$$\delta\vec{q}(m) = \delta\vec{\varphi} \times \vec{q}(m) \,, \qquad (7.2\text{-}4)$$

ἤ ἀναλυτικῶς

$$\left.\begin{aligned} \delta q_1 &= \delta\varphi_2 q_3(m) - \delta\varphi_3 q_2(m) \\ \delta q_2 &= \delta\varphi_3 q_1(m) - \delta\varphi_1 q_3(m) \\ \delta q_3 &= \delta\varphi_1 q_2(m) - \delta\varphi_2 q_1(m) \,. \end{aligned}\right\} \qquad (7.2\text{-}5)$$

Οἱ τύποι (7.2-5) ἐκφράζονται συνήθως τῇ χρήσει τοῦ ἀντισυμμετρικοῦ συμβόλου $\varepsilon_{ik\ell}$,

$$\delta q_2(m) = \sum_{\substack{k=1\\ \ell=1}}^{3} \varepsilon_{ik\ell}\,\delta\varphi_k q_\ell(m) \,. \qquad (7.2\text{-}6)$$

Ὑπενθυμίζομεν ὅτι τό ἀντισυμμετρικόν σύμβολον $\varepsilon_{ik\ell}$ ὁρίζεται ὡς ἑξῆς :

$$\varepsilon_{ik\ell} = \begin{cases} 1 & \text{ἐάν ἡ διάταξις } \varepsilon_{ik\ell} \text{ προέρχεται ἀπό ἀρτίαν μετάθεσιν τοῦ 123} \\ -1 & \text{ἐάν ἡ διάταξις } \varepsilon_{ik\ell} \text{ προέρχεται ἀπό περιττήν μετάθεσιν τοῦ 123} \\ 0 & \text{ἐάν } i = k \text{ ἤ } k = \ell \text{ ἤ } i = \ell \,. \end{cases}$$

Κατωτέρω θά ἀκολουθήσωμεν ἕτερον συμβολισμόν ἐν συνδυασμῷ μετά τελεστῶν πινάκων, ὁ ὁποῖος θά μᾶς χρησιμεύσῃ καί εἰς τό κεφάλαιον VIIIτῆς στροφικῆς κινήσεως στερεοῦ. Τό ἄνυσμα θέσεως παρίσταται δι'ἑνός μονοστήλου πίνακος

$$|\vec{q}(m)\rangle = \begin{pmatrix} q_1(m) \\ q_2(m) \\ q_3(m) \end{pmatrix} , \qquad (7.2\text{-}7)$$

καί

$$|\delta\vec{q}(m)\rangle = \begin{pmatrix} \delta q_1(m) \\ \delta q_2(m) \\ \delta q_3(m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \delta\varphi_3 & \delta\varphi_2 \\ \delta\varphi_3 & 0 & -\delta\varphi_1 \\ -\delta\varphi_2 & \delta\varphi_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1(m) \\ q_2(m) \\ q_3(m) \end{pmatrix} =$$

$$= \left\{ \delta\varphi_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta\varphi_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \delta\varphi_3 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \cdot\cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} q_1(m) \\ q_2(m) \\ q_3(m) \end{pmatrix} =$$

$$= \left[\delta\varphi_1 J_1 + \delta\varphi_2 J_2 + \delta\varphi_3 J_3\right] |\vec{q}(m)\rangle = (\vec{J} \cdot \delta\vec{\varphi})|\,\vec{q}(m) \qquad (7.2\text{-}8)$$

ὅπου $\vec{J}$, ἄνυσμα πίναξ, ὁ γεννήτωρ τῆς ὁμάδος τῶν περιστροφῶν (βλ. § 8.1). Ὁ πίναξ $\vec{J}$ ἔχει ὡς συνιστώσας τούς 3 x 3 πίνακας

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \qquad (7.2\text{-}9)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι τά στοιχεῖα τῶν πινάκων αὐτῶν δύνανται νά ἐκφρασθοῦν καί διά τοῦ ἀντισυμμετρικοῦ συμβόλου

$$(J_\ell)_{ik} = \varepsilon_{i\ell k} .$$

Ἐκ τῆς (7.2-8) ἔχομεν

$$\delta\vec{q}(m) = (\vec{J}\, .\delta\varphi)|\vec{q}(m)> = \sum_{k=1}^{3} J_k\ \delta\varphi^k\, |q(m> = \sum_{k=1}^{3} (J_k|\vec{q}(m>)\delta\varphi^k ,$$

ἤ

$$\delta q_i(m) = \sum_k (J_k|\vec{q}(m>)_i \delta\varphi^k \qquad . \qquad (7.2\text{-}10)$$

Διά συγκρίσεως ταύτης μετά τῆς (7.1-2) λαμβάνομεν

$$Q_{ik}(m) = (J_k|\vec{q}(m>)_i \qquad . \qquad (7.2\text{-}11)$$

Εἰσάγοντες ταύτην εἰς τήν (7.1-8), ἥτις ἐν προκειμένῳ λαμβάνει τήν μορφήν

$$\sum_{m=1}^{N} \left[\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(m)}\ Q_{ik}(m) \right] = \text{σταθ.} \ , \qquad , \qquad (7.2\text{-}12)$$

ὅπου $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(m)} = P_i(m)$,

ἔχομεν

$$\sum_{m=1}^{N} \left[\sum_{i=1}^{3} P_i(m)\ (J_k|\vec{q}(m>)_i \right] = \text{σταθ.}, \ k=1,2,3,$$

ἤ

$$\sum_{m=1}^{N} \left[< \vec{P}(m)|J_k|\vec{q}(m) > \right] = \text{σταθ.} \qquad . \qquad (7.2\text{-}13)$$

Ἡ ἐξίσωσις (7.2-13) ἐκφράζει τήν διατήρησιν τῆς ὁλικῆς στροφορμῆς τοῦ συστήματος. Ἡ k συνιστῶσα $J_k(m)$ στροφορμῆς τοῦ m σωματίου εἶναι.

$$J_k^{o\lambda} = \sum_{n=1}^{n} J_k(m) \ . \ k=1,2,3 \ . \qquad (7.2\text{-}14)$$

'Ανυσματικῶς ἡ διατήρησις τῆς ὁλικῆς στροφορμῆς ἐκφράζεται διά τοῦ

$$\vec{J}^{o\lambda} = \sum_{m=1}^{n} \langle\vec{P}(m)|\vec{J}\ |\vec{q}(m)\rangle = \sum_{m=1}^{n} \vec{J}(m) = \sigma\tau\alpha\theta. \quad (7.2\text{-}14)$$

"Αρα $\vec{J} = \sigma\tau\alpha\theta.$

Ὥστε ἐδείχθη τό θεώρημα τῆς διατηρήσεως τῆς στροφορμῆς. " Τό ἀναλλοίωτον τῆς δράσεως εἰς μετασχηματισμούς περιστροφῆς, συνεπάγεται τήν διατήρησιν τῆς ὁλικῆς στροφορμῆς τοῦ συστήματος".

Τά ἀνωτέρω ἠδύναντο νά δειχθοῦν καί ἁπλούστερον, ὡς ἑξῆς.

Σύγκρισις τῆς (7.2-6) μετά τῆς (7.1-2) μᾶς δίδει κατ' ἀρχήν

$$Q_{ik}(m) = \sum_{\ell=1}^{3} \varepsilon_{ik\ell} q_\ell(m) \quad . \quad (7.2\text{-}15)$$

Οὕτω ἡ (7.2-12) γράφεται

$$\sum_{m=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{3} P_i(m) \sum_{\ell=1}^{3} \varepsilon_{ik\ell} q_\ell(m) \right] = \sigma\tau\alpha\theta. \quad ,$$

ἤ $\quad (7.2\text{-}16)$

$$\sum_{m=1}^{n} \left[\sum_{\substack{i=1\\ \ell=1}} P_i(m)\varepsilon_{ik\ell} q_\ell(m) \right] = \sigma\tau\alpha\theta.$$

'Αλλά ἐξ ὁρισμοῦ

$$\sum_{\substack{k=1\\ \ell=1}}^{3} \varepsilon_{ik\ell} P_k Q_\ell = \vec{p} \times \vec{q} \quad . \quad (7.2\text{-}17)$$

'Επομένως ἡ (7.2-16) γράφεται

$$\sum_{m=1}^{n} (\vec{P}(m) \times \vec{q}(m))_k = \sigma\tau\alpha\theta., \text{ἤ} \sum_{m=1}^{n} J_k(m) = \sigma\tau\alpha\theta., \quad k=1,2,3 \ .$$

ὅπερ ἔδει δεῖξαι

(γ) Διατήρησις τῆς ἐνεργείας.

Θεωρήσωμεν τήν ὁμάδα μετασχηματισμῶν τῆς χρονικῆς μεταθέσεως

$$t \to t' = t + \delta t \ .$$

'Εν προκειμένῳ τ = 1 καί ἡ (7.1-9) δίδει :

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = \text{σταθ.} \quad . \tag{7.2-18}$$

'Η δυναμική συνάρτησις $\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L$ καλεῖται Hamiltonian καί συμβολίζεται διά τοῦ H. Εἰς τήν περίπτωσιν συντηρητικοῦ συστήματος L = T-V , ἡ Hamiltonian ἀντιστοιχεῖ πρός τήν ὁλικήν ἐνέργειαν τοῦ συστήματος (ασκ. 2).

Πράγματι, εἰς αὐτήν τήν περίπτωσιν

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T \; . \tag{7.2-19}$$

(θεώρημα τοῦ Euler), καί

$$H = 2T-(T-V) = T+V = E. \tag{7.2-20}$$

Ὥστε ἡ ὁλική ἐνέργεια (Hamiltonian) ἀποτελεῖ γεννήτορα τῆς ὁμάδος τῶν μετασχηματισμῶν τῆς χρονικῆς μεταθέσεως .

Τοῦτο γίνεται δεκτόν σήμερον ἀξιωματικῶς ὡς θεμελιακός ὁρισμός τῆς Hamiltonian καί διά συστήματα τῶν ὁποίων ἀγνοοῦμεν τήν δυναμικήν (βλ. ἐπίσης ΤΕΥΧΟΣ I, § 2.3).

Οὕτω ἤλθομεν εἰς τό θεμελιῶδες θεώρημα διατηρήσεως τῆς ὁλικῆς ἐνεργείας

" Τό ἀναλλοίωτον τοῦ ὁλοκληρώματος τῆς δράσεως εἰς χρονικήν μετάθεσιν, ἡ συμμετρία ὡς πρός χρονικήν μετάθεσιν, συνεπάγεται τήν διατήρησιν τῆς ὁλικῆς ἐνεργείας τοῦ συστήματος" .

7.3. ΚΑΝΟΝΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ HAMILTON.

Εἰς τήν προηγουμενην παράγραφον ἡ Hamiltonian ὡρίσθη ὡς γεννήτωρ τοῦ διαφορικοῦ τῆς δράσεως εἰς τούς μετασχηματισμούς τῶν χρονικῶν μεταθέσεων.

$$H = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \quad . \tag{7.3-1}$$

Ἄν εἰς τήν ἔκφρασιν αὐτήν εἰσαγάγωμεν τάς "κανονικάς ὁρμάς" p_i συζυγεῖς τῶν γενικευμένων θέσεων q_i (ἄσκ.3),

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad , \tag{7.3-2}$$

ἡ Hamiltonian λαμβάνει τήν μορφήν

$$H = p_i \dot{q}_i - L \quad . \tag{7.3-3}$$

Δύναται εὐκόλως νά δειχθῇ ὅτι ἡ Hamiltonian ἥτις εἰς τήν (7.3-3) παρουσιάζεται ὡς συνάρτησις τῶν p, q, $\dot{q}$, εἶναι συνάρτησις μόνον τῶν p, q (καί ἐνδεχομένως τοῦ t). Πράγματι :

Διαφορίζοντες τήν (7.3-3) ἔχομεν

$$dH = \sum_i p_i d\dot{q}_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (7.3\text{-}4)$$

Ἀλλά ἐξ ὁρισμοῦ

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} , \quad (7.3\text{-}5)$$

καί ἐκ τῶν ἐξισώσεων τοῦ Lagrange

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} . \quad (7.3\text{-}6)$$

Οὕτω ἡ (7.3-4) γράφεται

$$dH = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt . \quad (7.3\text{-}7)$$

Ἤτοι ἐδείχθη ὅτι ἡ Hamiltonian εἶναι συνάρτησις μόνον τῶν p, q, t,

$$H = H(p_i, q_i, t) . \quad (7.3\text{-}8)$$

Διαφορίζοντες τήν (7.3-8) ἔχομεν

$$dH = \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt, \quad (7.3\text{-}9)$$

καί συγκρίνοντες ταύτην μετά τῆς (7.3-7) λαμβάνομεν τάς σχέσεις :

$$\left.\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned}\right\} , \quad \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t} . \quad (7.3\text{-}10)$$

Αἱ (7.3-10) ἀποτελοῦν τάς "κ α ν ο ν ι κ ά ς ἐ ξ ι σ ώ σ ε ι ς τ ο ῦ H a m i l t o n".

Διά τῶν ἐξισώσεων Hamilton αἱ δευτέρας τάξεως διαφορικαί ἐξισώσεις τῆς κινήσεως εἰς τόν θεσεογραφικόν χῶρον τῶν m διαστάσεων, μετετράπησαν εἰς σύστημα διαφορικῶν ἐξισώσεων πρώτης τάξεως ὡς πρός τόν χρόνον εἰς τόν χῶρον τῶν p, q, "χῶρον τῶν φάσεων", διαστάσεων $2m$.

Ἰδιαιτέρως ἐνδιαφέρουσα εἶναι ἡ περίπτωσις καθ'ἥν ἡ Hamiltonian εἶναι κυκλική ὡς πρός μίαν γενικευμένην μεταβλητήν, συντεταγμένην q ἤ ὁρμήν p ἤτοι $\frac{\partial H}{\partial q} = 0$ ἤ $\frac{\partial H}{\partial p} = 0$

Τότε ἡ συζυγής μεταβλητή διατηρεῖται!

Οὕτω π.χ. ἔχομεν διατήρησιν τῆς ὁλικῆς γραμμικῆς ὁρμῆς ὅταν ἡ Hamiltonian εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς μεταβλητῆς "θέσεως κέντρου μάζης" (ἀναλλοίωτον εἰς μετάθεσιν κέντρον μάζης), ἢ διατήρησιν τῆς ὁλικῆς στροφορμῆς ὅταν ἡ Hamiltonian εἶναι ἀνεξάρτητος τῶν γωνιῶν προσανατολισμοῦ τοῦ συστήματος.

Τοῦτο ἐπιτρέπει ἀμέσους ὁλοκληρώσεις τῆς κινήσεως καί ὑποβιβασμόν τοῦ πλήθους τῶν μεταβλητῶν τοῦ συστήματος. Ἄν q_1, $q_2, \dots q_r$ ἀποτελοῦν κυκλικάς συντεταγμένας καί $c_1, \dots, c_r$ αἱ σταθεραί τιμαί τῶν συζυγῶν πρός αὐτάς διατηρουμένων μεταβλητῶν, δυνάμεθα νά θεωρήσωμεν ὅτι τό σύστημα περιγράφεται ἐκ μιᾶς νέας συναρτήσεως Hamilton H'

$$H'(q_{r+1}, \cdot q_m; p_{r+1}, \dots p_m; t) = H(c_1 \dots, c_r, q_{r+1}, \dots, q_m, p_1, \dots, p_m). \qquad (7.3\text{-}11)$$

Ἀντί τῆς Hamiltonian (7.3-11) εἰς τήν ἀπαλειφήν κυκλικῶν συντεταγμένων χρησιμοποιεῖται πολλάκις ἡ Ruthian

$$R = \sum_{i=1}^{r} p_i q_i - H \qquad (7.3\text{-}12)$$

ὡς Λαγκρανζιανή συνάρτησις (ἄσκ. 2)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial R}{\partial q_k} = 0\,, \qquad (7.3\text{-}12)$$

$$k = r+1, \dots, n\,.$$

7.4. ΚΑΝΟΝΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ.

Ἡ εὕρεσις κυκλικῶν μεταβλητῶν δέν εἶναι πάντοτε εὔκολος, ἀλλ' ἀπαιτεῖται πολλάκις κατάλληλος μετασχηματισμός διά τήν ἀποκάλυψίν των. Πρός τοῦτο ἡ χαμιλτωνιανή διατύπωσις τῶν ἐξισώσεων τῆς κινήσεως ὑπό τήν κανονικήν μορφήν (7.3-10), προσφέρεται ἰδιαιτέρως λόγῳ τῆς συμμετρίας μέ τήν ὁποίαν παρουσιάζονται εἰς αὐτάς αἱ γενικευμέναι συντεταγμέναι καί συζυγεῖς ὁρμαί. Τοῦτο ὑποδεικνύει τήν δυνατότητα ἐφαρμογῆς "κανονικῶν μετασχηματισμῶν".

$$(q,p) \to (q',p'), \qquad (7.4\text{-}1)$$
$$H(q,p) \to H'(q',p'),$$

ὥστε

$$\dot{q}' = \frac{\partial H'}{\partial p}\,, \quad \dot{p}' = \frac{-\partial H'}{\partial q}\,. \qquad (7.4\text{-}2)$$

Οἱ κανονικοί μετασχηματισμοί ἀφίνουν τάς κανονικάς ἐξισώσεις κινήσεως καί τό φυσικόν περιεχόμενον τοῦ συστήματος ἀναλλοίωτον.

Συμφώνως πρός τήν (6.1.2-8) καί τόν ὁρισμόν (7.3-3) τῆς Hamiltonian ἔχομεν (ἄσκ. 6)

$$\sum_i p_i\dot{q}_i - H = \sum_i p_i'\dot{q}_i' - H' + \frac{d}{dt}\phi(q,q',t), \qquad (7.4\text{-}3)$$

καί

$$p_i = \frac{\partial(q,q',t)}{\partial q_i}$$

$$p_i' = \frac{\partial(q,q',t)}{\partial q'}, \qquad (7.4\text{-}4)$$

$$H' = H + \frac{\partial\phi}{\partial t} .$$

Ἡ συμμετρία τῆς Hamiltonian ὡς πρός p,q ἐπιτρέπει καί γενικωτέρους κανονικούς μετασχηματισμούς παραγωμένους ἐκ γεννητόρων συναρτήσεων $\chi(q,p',t)$, $\phi(p,q',t)$ ἤ $\omega(p,p',t)$ (ἄσκ. 6). Εἰς αὐτάς τάς περιπτώσεις ἔχομεν ἀντιστοίχως :

$$p_i = \frac{\partial\chi(q,p',t)}{\partial q_i} ,$$

$$q_i' = \frac{\partial\chi(q,p',t)}{\partial p_i'} , \qquad (7.4\text{-}5)$$

$$H' = H + \frac{\partial\chi(q,p',t)}{\partial t} ,$$

ἤ

$$q_i = -\frac{\partial\psi(p,q',t)}{\partial p_i} ,$$

$$p_i' = -\frac{\partial\psi(p,q',t)}{\partial q'} , \qquad (7.4\text{-}6)$$

$$H' = H + \frac{\partial\psi(p,q',t)}{\partial t} ,$$

ἤ

$$q_1 - -\frac{\partial\omega(p,p',t)}{\partial p_i} , \qquad (7.4\text{-}7)$$

$$q_i' = \frac{\partial\omega(p,p',t)}{p'} .$$

Διά καταλλήλου κανονικοῦ μετασχηματισμοῦ ἡ H δύναται νά τεθῆ εἰς ἁπλῆν μορφήν. 'Αναφέρομεν τό κλασσικόν παράδειγμα τοῦ ἁρμονικοῦ ταλαντωτοῦ (ἄσκ. 6).

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2} \quad .$$

Χρησιμοποιοῦντες ὡς γεννήτορα μετασχηματισμῶν τήν συνάρτησιν

$$\varphi(q,q') = \frac{m}{2}\,\omega q^2 \cot q' , \qquad (7.4\text{-}8)$$

ὅπου $\omega = \sqrt{k/m}$ ἡ κυκλική συχνότης τοῦ ταλαντωτοῦ, ἔχομεν :

$$p = m\omega q \cot q', \qquad p' = \frac{m\omega q^2}{2\sin^2 q'} , \qquad (7.4\text{-}9)$$

καί

$$H' = H = \omega p'(\cos^2 q' + \sin^2 q') = \omega p' . \qquad (7.4\text{-}10)$$

'Η Hamiltonian κατέστη κυκλική ὡς πρός q' καί ἡ συζυγής ὁρμή p' διατηρεῖται. Αὕτη εἶναι ἀνάλογος τῆς ἐνεργείας τοῦ συστήματος !

7.5. ΑΓΚΥΛΑΙ POISSON.

Θεωρήσωμεν δυναμικόν τι μέγεθος A, συνάρτησιν τῶν p_i, q_i, t,

$$A = A(p_i, q_i, t) \quad .$$

'Η ὁλική αὐτοῦ παράγωγος ὡς πρός τόν χρόνον εἶναι

$$\frac{dA}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial A}{\partial q_i}\dot{q}_i\right) + \frac{\partial A}{\partial t} , \qquad (7.5\text{-}1)$$

ἤ λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν τάς ἐξισώσεις τοῦ Hamilton

$$\frac{dA}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial A}{\partial t} . \qquad (7.5\text{-}2)$$

ἡν ποσότητα

$$\{A,H\} = \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) , \qquad (7.5\text{-}3)$$

ὀνομάζομεν ἀγκύλην τοῦ Poisson τῶν μεγεθῶν A, H καί συμβολίζομεν διά τοῦ $\{A,H\}$.

Οὕτω ἡ (7.4-2) γράφεται

$$\frac{dA}{dt} = \{A,H\} + \frac{\partial A}{\partial t} \quad . \tag{7.5-4}$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη διέπει τήν χρονικήν ἐξέλιξιν τοῦ μεγέθους A.

Συνήθως ἐνδιαφερόμεθα διά δυναμικάς μεταβλητάς, αἱ ὁποῖαι δέν ἐξαρτῶνται ἐκπεφρασμένως ἐκ τοῦ χρόνου ($\frac{\partial A}{\partial t} = 0$). Διά ταύτας ἡ (7.5-4) γράφεται :

$$\frac{dA}{dt} = \{A,H\} \quad . \tag{7.5-5}$$

Ἄν θεωρήσωμεν τήν Ἀγκύλην Poisson ὡς πρᾶξιν γινομένου (μή μεταθετικοῦ) $\{A,B\} = i\,A \otimes B$, ἡ ἐξίσωσις (7.5-5) λαμβάνει τήν μορφήν

$$-i\,\frac{dA}{dt} = H \otimes A \quad . \tag{7.5-5a}$$

Ἤτοι ἐπανευρίσκομεν ὅτι ἡ συνάρτησις Hamilton ἀποτελεῖ τόν γεννήτορα τῆς χρονικῆς μεταθέσεως τῶν φυσικῶν μεγεθῶν. Ἀνάλογον ἐξίσωσιν θά ἴδωμεν εἰς τήν §8 ὅπου ἡ στροφορμή ἀποτελεῖ τόν γεννήτορα τῶν στροφῶν (8.1-4)

Μερικαί ἀπό τάς πλέον τυπικάς ταυτότητας τῶν ἀγκυλῶν Poisson εἶναι αἱ ἀκόλουθοι

$$\{A,B\} = -\{B,A\} \quad , \text{(ἀντισυμμετρία)} \tag{7.5-6}$$

$$\{A,BC\} = \{A,B\}C + B\,\{A,C\}, \text{(προσεταιρισμός)} \tag{7.5-7}$$

$$\{A, \{B,C\}\} + \{B\,\{C,A\}\} + \{C, \{A,B\}\} = 0. \text{ (ταυτότης Jacobi)} \tag{7.5-8}$$

Αἱ Ἀγκύλαι Poisson μεταξύ ζευγῶν Κανονικῶν μεταβλητῶν εἶναι (ἄσκ. 7)

$$\{q_i q_j\} = 0,\ \{p_i,p_j\} = 0,\ \{q_i,p_j\} = 0 \tag{7.5-9}$$

Αὗται παραμένουν ἀναλλοίωτοι εἰς κανονικούς μετασχηματισμούς, ὅπερ ἀποτελεῖ καί ἕτερον συνήθη ὁρισμόν των.

Αἱ ἐξισώσεις (7.5-4) καί (7.5-9) εἶναι βασικῆς σημασίας καθ' ὅτι ἀποτελεῖ συνδετικήν ἔκφρασιν διά τήν μετάβασιν ἐκ τῆς Κλασσικῆς Μηχανικῆς εἰς τήν Κβαντομηχανικήν,

$$\{A,B\} \leftrightarrow \frac{1}{i\hbar}\,\big[A,B\big] \quad , \tag{7.5-10}$$

ὅπου $\hbar$ ἡ σταθερά τοῦ Planck καί $\big[A,B\big]$ ὁ "μεταθέτης AB-BA τῶν Κβαντομηχανικῶν τελεστῶν τῶν ἀντιστοίχων εἰς τά κλασσικά μεγέθη A,B" !

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ.

1. Εὕρατε τήν συνάρτησιν Lagrange, ἡ ὁποία περιγράφει γραμμικόν ἁρμονικόν ταλαντωτήν μέ ἀπόσβεσιν. Παρατηρήσατε ὅτι παρ' ὅτι αἱ ἐξισώσεις τῆς κινήσεως εἰς τήν

προκειμένην περίπτωσιν εἶναι ἀναλλοίωτοι εἰς χρονικήν μετάθεσιν, τό ὁλοκλήρωμα τῆς δράσεως δέν παραμένει ἀναλλοίωτον καί συνεπῶς ἡ ἐνέργεια τοῦ συστήματος δέν διατηρεῖται.

(Ὑποδ. $L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 - x^2)e^{Rt}$).

2. Ἡ Hamiltonian ἐφαρμόζεται καί εἰς δυναμικά U ἐξαρτώμενα ἐκ τῆς ταχύτητος. Δείξατε ὅτι ἡ κίνησις σημειακοῦ φορτίου e μάζης m ἐντός ἐξωτερικοῦ ἠλεκτρομαγνητικοῦ πεδίου $(\varphi, \vec{A})$ δίδεται ἐπίσης ἐκ τῆς ἐκφράσεως

$$H = \frac{1}{2}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + e\phi = \frac{1}{2}\, mv^2 + e\phi \quad ,$$

τῆς ὁλικῆς ἐνεργείας τοῦ σημείου. Ἐπειδή αἱ μαγνητικαί δυνάμεις εἶναι κάθετοι ἐπί τήν τροχιάν τοῦ σημείου μόνον τό βαθμωτόν δυναμικόν παρουσιάζεται εἰς τήν ἐνέργειαν. Ἡ ὁρμή $\vec{p}$ ἀνωτέρω εἶναι "κανονική ὁρμή" (ἄσκ. 3).

3. Αἱ κανονικαί ὁρμαί ἐν γένει, δέν ταυτίζονται μέ τάς συνήθεις κινητικάς ὁαρμάς. Δείξατε ὅτι ἡ κανονική ὁρμή $\vec{p}$ ὑλικοῦ σημείου φορτίου e ἐντός ἠλεκτρομαγνητικοῦ πεδίου εἶναι

$$\vec{p} = m\vec{v} + \frac{e}{c}\,\vec{A} \, ,$$

ὅπου $m\vec{v}$ ἡ συνήθης κινητική ὁρμή, μᾶζα τοῦ σημείου ἐπί τήν ταχύτητα. Ἐν ἀντιθέσει πρός τήν $m\vec{v}$, ἡ κανονική ὁρμή δέν εἶναι παρατηρήσιμον μέγεθος, αὕτη μεταβάλλεται μετά τῆς χρησιμοποιουμένης βαθμίδος δυναμικοῦ

4. Ποία ἡ μεταβολή τῆς κανονικῆς ὁρμῆς τοῦ σωματίου i κατά τήν μετάβασιν ἐκ τῆς (6.1.1-5) εἰς τήν (6.1.1-6); Συσχετίσατε τοῦτο μέ μετασχηματισμούς Γαλιλαίου (ἄσκ. 1, § 6.1).

5. Δείξατε ὅτι ἡ Ruthian, ὁριζομένη διά τῆς (7.3-12) ἱκανοποιεί τήν ἐξίσωσιν Lagrange (7.3-13).

6. Κάματε χρῆσιν τῆς ἀρχῆς τῆς ἐλαχίστης δράσεως καί ἀποδείξατε τήν (7.4-4). Λόγῳ τῆς συμμετρίας (p ,q) εἰς τήν Hamiltonian εἰς τούς κανονικούς μετασχηματισμούς δυνάμεθα νά περιλάβωμεν καί μετασχηματισμούς παραγομένους ἐκ γεννητόρων τῆς μορφῆς $\chi(q,p',t)$, $\psi(p,q',t)$ ἤ $\omega(p,p',t)$.

'Αποδείξατε ὁμοίως τάς ἐξισώσεις (7.4-5), (7.4-6) καί (7.4-7), αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τούς μετασχηματισμούς τούτους.

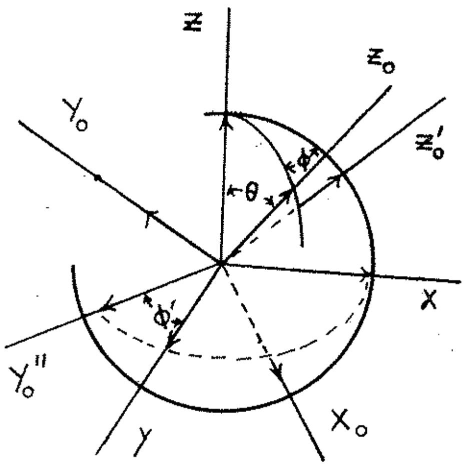
7. Νά θεωρηθῇ τό θεώρημα Noether διά συναρτήσεις Lagrange μέ ἀνωτέρας παραγώγους (§6.2).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

"ΚΙΝΗΣΙΣ ΣΤΕΡΕΟΥ ΕΧΟΝΤΟΣ ΕΝ ΣΗΜΕΙΟΝ ΣΤΑΘΕΡΟΝ"

8.1. ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΩΝ ΣΤΡΟΦΩΝ.

Ἵνα περιγράψωμεν τήν κίνησιν στερεοῦ ἔχοντος ἕν σημεῖον O σταθερόν, θεωρήσωμεν τρισορθογώνιον σύστημα ἀξόνων OX_o, OY_o, OZ_o , ἀκλονήτως συνδεδεμένων μέ τό στερεόν. Ἡ θέσις τοῦ στερεοῦ ἐν τῷ χώρῳ καθορίζεται πλήρως δι'ἑνός πίνακος R στροφῆς ἡ ὁποία ἐφαρμοζομένη ἐπί τοῦ (OX_o,OY_o,OZ_o) φέρει τοῦτο εἰς τήν θέσιν τοῦ ἀκινήτου ἀδρανειακοῦ συστήματος ἀναφορᾶς (OX, OY, OZ) τοῦ χώρου. Εἰς τήν περιγραφήν κατά Euler



Σχ. 8-1.
'Ορισμός τῶν γωνιῶν τοῦ Euler.

Σχ. 8-1, ἡ ἀνωτέρω στροφή R ἐκφράζεται ὡς γινόμενον

$$R = R_Z(\varphi')R_Y(\vartheta)R_Z(\varphi) \qquad (8.1\text{-}1)$$

τριῶν διαδοχικῶν περιστροφῶν $R_Z(\varphi)$, $R_Y(\vartheta)$, $R_Z(\varphi')$ κατά γωνίας φ, ϑ, φ' περί τούς ἄξονας OZ, OY καί OZ ἀντιστοίχως. Αἱ γωνίαι $(\varphi', \vartheta, \varphi)$ καλοῦνται γωνίαι τοῦ Euler. Ἡ περιστροφή τοῦ στερεοῦ πέριξ τοῦ ἄξονος OZ κατά γωνίαν φ φέρει τόν ἄξονα OZ_0 ἐπί τοῦ ἐπιπέδου (OZ, OX), ἑπομένη περιστροφή τοῦ στερεοῦ πέριξ τοῦ ἄξονος OY κατά γωνίαν ϑ φέρει τόν OZ_0 ἐπί τοῦ OZ καί τέλος περιστροφή τοῦ στερεοῦ πέριξ τοῦ OZ κατά γωνίαν φ' φέρει εἰς πλήρη σύμπτωσιν τῶν ἀξόνων (OX, OY, OZ) καί (OX_0, OY_0, OZ_0).

Ἡ συνισταμένη στροφή R τῆς (8.1-1) συναρτήσει τῶν γωνιῶν τοῦ Euler δίδεται ἀναλυτικῶς διά τοῦ πίνακος (ἄσκ. 4)

$$R(\varphi',\vartheta,\varphi)=\begin{pmatrix} \cos\varphi'\cos\varphi-\cos\vartheta\sin\varphi'\sin\varphi & \cos\varphi'\cos\varphi+\cos\vartheta\sin\varphi'\cos\varphi & \sin\vartheta\sin\varphi' \\ -\sin\varphi'\cos\varphi-\cos\vartheta\cos\varphi'\sin\varphi & -\sin\varphi'\sin\varphi+\cos\vartheta\cos\varphi'\cos\varphi & \sin\vartheta\cos\varphi' \\ \sin\vartheta\sin\varphi & -\sin\vartheta\cos\varphi & \cos\vartheta \end{pmatrix}. \qquad (8.1\text{-}2)$$

Αἱ γωνίαι τοῦ Euler ἀποτελοῦν γενικευμένας συντεταγμένας θέσεως τοῦ στερεοῦ.

Τό σύνολον τῶν στροφῶν ἀποτελεῖ ὁμάδα. Ἡ ὁμάς αὕτη δέν εἶναι μεταθετική. Ἄν $R(\vec{\varphi}_1)$ καί $R(\vec{\varphi}_2)$ δύο περιστροφαί περί τυχόντας ἄξονας, τότε ἐν γένει $R(\vec{\varphi}_1)R(\vec{\varphi}_2) \neq R(\vec{\varphi}_2)R(\varphi_1)$. Ἐξαιροῦνται αἱ περιστροφαί πέριξ κοινοῦ ἄξονος $\vec{\varphi} = \varphi\hat{n}$. Αὗται ἀποτελοῦν μεταθετικάς (Ἀβελιανάς) ὑποομάδας τῶν στροφῶν.

$$R(\varphi_1\hat{n})R(\varphi_2\hat{n}) = R(\varphi_2\hat{n})R(\varphi_1\hat{n}) = R((\varphi_1+\varphi_2)\hat{n}). \qquad (8.1\text{-}3)$$

Ἐκ τῆς (8.1-3) ἕπεται ὅτι αἱ περιστροφαί περί σταθερόν ἄξονα n ἱκανοποιοῦν τήν διαφορικήν ἐξίσωσιν

$$\frac{dR\,(\varphi)}{d\varphi} = i(\vec{J}.\vec{n})R(\varphi). \qquad (8.1\text{-}4)$$

'Η ἐξίσωσις αὕτη ὁλοκληροῦται ἀμέσως (ἄσκ. 1), δίδουσα τήν ἐκθετικήν μορφήν

$$R(\varphi n) = e^{i(J.\hat{n})\varphi} , \qquad (8.1\text{-}5)$$

ὅπου

$$J.n = J^1 n_1 + J^2 n_2 + J^3 n_3 .$$

Τό ἐσωτερικόν γινόμενον $\vec{J}.\vec{n}$ ὁ 3 x 3 πίναξ

$$\begin{pmatrix} 0 & in_3 & -in_2 \\ -in_3 & 0 & in_1 \\ in_2 & -in_2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (8.1\text{-}6)$$

ἰσοῦται μέ τήν παράγωγον

$$-i \frac{\partial}{\partial\phi} R(\phi n)\Big|_{\phi=0} .$$

Οἱ πίνακες

$$J^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^3 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(8.1-7)

ἀποτελοῦν γεννήτορας τῶν ὑποομάδων τῶν περιστροφῶν πέριξ τῶν ἀξόνων 1,2,3 ἀντιστοίχως.

Οἱ γεννήτορες J^1, J^2, J^3 τῶν περιστροφῶν δέν εἶναι μεταθετοί μεταξύ των, ἀλλά ἱκανοποιοῦν, ὡς πρός τήν πρᾶξιν τοῦ μεταθέτου

$$\left[J^k, J^\ell\right] \equiv J^k J^\ell - J^\ell J^k , \qquad (8.1\text{-}8)$$

τήν ἀκόλουθον Ἄλγεβραν

$$\left[J^i, J^j \right] = \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} J^k \qquad (8.1\text{-}9)$$

Αὕτη καλεῖται Ἄλγεβρα Lie τῆς ὁμάδος τῶν περιστροφῶν καί εἶναι προφανῶς τρισδιάστατος.

8.2. ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΕΩΣ ΣΤΕΡΕΟΥ.

'Η κίνησις στερεοῦ ἔχοντος ἕν σημεῖον του σταθερόν, ἀποτελεῖ μίαν συνεχῆ χρονολογικήν διαδοχήν ἀπειροστῶν περιστροφῶν $R(t_{k+1}, t_k) = e^{i\,\vec{J}.\delta\vec{\varphi}_k}$ περί στιγμιαίους ἄξονας

$$R(t) = \prod_{\substack{k \\ t_{i+1}-t_i \to 0 \\ k\to\infty}} R(t,t_k)R(t_k,t_{k-1})\ldots R(t_1,t_o)R_o \qquad (8.2\text{-}1)$$

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἐκφράσεως (8.2-1), ἕπεται ἀμέσως ὅτι ἄν $\vec{\omega}(t) = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ εἶναι ἡ ἑκάστοτε στιγμιαία γωνιακή ταχύτης, ἡ στροφή $R(t)$ τοῦ στερεοῦ, ἱκανοποιεῖ τήν διαφορικήν ἐξίσωσιν

$$\frac{d}{dt} R(t) = \vec{J}.\vec{\omega}\, R(t) \;. \qquad (8.2\text{-}1)$$

Δεδομένης τῆς γωνιακῆς ταχύτητος $\vec{\omega}(t)$, π.χ. κατόπιν λύσεως τῶν ἐξισώσεων τοῦ Euler (βλ. κατωτέρω), ἡ διαφορική ἐξίσωσις (8.2-1) δύναται ἀμέσως νά ὁλοκληρωθῆ. Ἔχομεν

$$R(t) = \tau \left[e^{\, i\int_{t_o}^{t} \vec{J}.\vec{\omega}(t')dt'} \right] R_o , \qquad (8.2\text{-}2)$$

ὅπου τ τό σύμβολον τῆς χρονολογικῆς διατάξεως.

Ἡ λύσις (8.2-2), μέ τήν χρονολογικήν διάταξιν, ἀποτελεῖ οὐσιαστικά μίαν ἄλλην ἰσοδύναμον ἔκφρασιν τῆς (8.2-1). Τό σύμβολον τ σημαίνει ὅτι εἰς τό ἀνάπτυγμα τῆς ἐκθετικῆς συναρτήσεως οἱ παράγοντες τυχόντος γινομένου πινάκων $\vec{J}.\vec{\omega}(t_1)\vec{J}.\vec{\omega}(t_2) \ldots \vec{J}.\vec{\omega}(t_n)$ διατάσσονται εἰς χρονολογικήν σειράν

$$\tau(\vec{J}.\vec{\omega}(t_1)\vec{J}.\vec{\omega}(t_2)\ldots\vec{J}.\vec{\omega}(t_n)) = \vec{J}.\vec{\omega}(t_{i_1})\vec{J}.\vec{\omega}(t_{i_2})\ldots\vec{J}.\vec{\omega}(t_{i_n})$$

ὅπου $t_{i_1} > t_{i_2} \ldots > t_{i_n}$. (8.2-3)

Ἰδιαιτέρως ἁπλῆ εἶναι ἡ περίπτωσις περιστροφικῆς κινήσεως περί σταθερόν ἄξονα $\hat{n}$, ὁπότε τό χρονολογικόν σύμβολον καθίσταται περιττόν,

$$R(t) = e^{\, i\,\vec{J}.\hat{n} \int_{t_o}^{t} \omega(t')dt} R_o . \qquad (8.2\text{-}4)$$

Εἰς τήν γενικήν περίπτωσιν ἡ χρῆσις τοῦ τ εἶναι ἀπαραίτητος. Λόγῳ τῆς μή μεταθετικότητος τῶν στροφῶν, αἱ γωνιακαί ταχύτητες δέν ἀποτελοῦν ὁλοκληρωσίμους συναρτήσεις τῶν γωνιῶν.

Ἡ κινηματική τῶν στροφῶν στερεοῦ δύναται νά ἐκφρασθῆ καί ὑπό μορφήν ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως (ἄσκ. 5)

$$R(t) = R_o + \int_{t_o}^{t} \vec{J}.\vec{\omega}(t')R(t')dt \;. \qquad (8.2\text{-}5)$$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ.

1. Παρατηρήσατε ὅτι ἡ περιστροφή $R(\varphi\hat{n})$ παραγωγίζεται ὡς πρός φ, ἡ παράγωγος $-i\dfrac{\partial R}{\partial\varphi}(\varphi\hat{n})$ εἶναι μεταθετή μέ τήν $R(\varphi\hat{n})$ καί ἀποδείξατε τόν τύπον (8.1-5).
(Ὑποδ. : Κάμετε χρῆσιν τῆς (8.1-3)).

2. Ἐπιβεβαιώσατε τήν Lie Ἄλγεβραν (8.1-9) τῶν γεννητόρων τῶν στροφῶν.

3. Ἀποδείξατε τήν ταυτότητα

$$e^{i\vec{J}.\vec{\varphi}} = \left(1-\frac{(\vec{J}.\vec{\varphi})^2}{\varphi^2}\right) + \frac{(\vec{J}.\vec{\varphi})^2}{\varphi^2}\cos\varphi + i\,\frac{\vec{J}.\vec{\varphi}}{\varphi}\sin\varphi \quad .(8.2\text{-}6)$$

4. Χρησιμοποιήσατε τήν ταυτότητα (8.2-6) καί συνθέσατε τάς τρεῖς διαδοχικάς περιστροφάς $R_Z(\varphi)$, $R_Y(\theta)$, $R_Z(\varphi')$ ἵνα ἀποδείξητε τόν τύπον (8.1-2).

5. Δείξατε τήν ἰσοδυναμίαν τῆς ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως (8.2-5) πρός τήν διαφορικήν ἐξίσωσιν (8.2-1) μέ τήν συνοριακήν συνθήκην $R\,(t_o) = R_o$.

6. Ὁρίσατε τήν λύσιν τῆς ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως (8.2-4) διά τῆς ἐπαναληπτικῆς μεθόδου

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} R_n, \quad R_n(t) = R_o + \int_{t_o}^{t} \vec{\omega}.\vec{J}\, R_{n-1}(t')dt' ,$$

καί ἐπιβεβαιώσατε τήν ταυτότητά της μετά τοῦ χρονολογικοῦ ἐκθετικοῦ ἀναπτύγματος (8.2-2).

8.3. EULER-LAGRANGE ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΕΩΣ ΣΤΕΡΕΟΥ.

Εἰς τήν προηγουμένην παράγραφον ἠσχολήθημεν βασικῶς μέ τήν κινηματικήν τῆς στροφικῆς κινήσεως στερεοῦ πέριξ σταθεροῦ σημείου. Εἰς τήν παροῦσαν παράγραφον θά ἀντιμετωπίσωμεν τό δυναμικόν πρόβλημα τῆς κινήσεως ἤτοι τήν διατύπωσιν τῶν ἐξισώσεων αἱ ὁποῖαι διέπουν τήν χρονικήν ἐξέλιξιν τῶν γωνιακῶν ταχυτήτων συναρτήσει τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι ἀσκοῦνται ἐπί τοῦ στερεοῦ.

Τό κέντρον τῶν στροφῶν, τό ὁποῖον θά ληφθῆ καί ὡς ἀρχή τῶν ἀξόνων, θά εἶναι εἴτε ἕν φυσικόν σημεῖον συνδέσμου (ἐξαρτήσεως) τοῦ στερεοῦ ἤ, εἰς περίπτωσιν μηδενικῆς συνολικῆς ἐξωτερικῆς δυνάμεως, θά ταυτίζεται μετά τοῦ κέντρου μάζης τοῦ στερεοῦ (ἄσκ. 1).

Ὡς γενικευμέναι συντεταγμέναι θέσεως τοῦ στερεοῦ δύνανται νά χρησιμεύσουν αἱ γωνίαι τοῦ Euler. Διά νά εὕρωμεν τάς ἐξισώσεις κινήσεως κατά Lagrange ζητήσωμεν πρῶτον τήν ἔκφρασιν τῆς κινητικῆς ἐνεργείας T. Θεωροῦντες τό στερεόν ὡς σύνολον ὑλικῶν σημείων $k=1,2,\ldots$ μάζης $m(k)$, θέσεως $\vec{r}(k)$ καί ταχύτητος (ἄσκ. 2)

$$\vec{v}(k) = \vec{r}(k) \times \vec{\omega} \qquad (8.3\text{-}1)$$

ὅπου $\vec{\omega}(t)$ ἡ στιγμιαία γωνιακή ταχύτης τοῦ στερεοῦ ἔχομεν :

$$T = \sum_k \frac{m(k)}{2} v^2(k) = \sum_k \frac{m(k)}{2} (\vec{r}(k) \times \vec{\omega})^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_k m(k) \left[r^2(k) - (\vec{r}(k).\vec{\omega})^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \vec{\omega}.\left\{ \{\sum_k m(k) \left[\vec{r}(k).\vec{r}(k) - \vec{r}(k)\vec{r}(k) \right] \right\} .\vec{\omega}$$

$$\frac{1}{2} \vec{\omega}.I.\vec{\omega} \qquad (8.3\text{-}2)$$

ὅπου

$$I_{mn} = \sum_k m(k) \left[r^2(k)\, \delta_{mn} - r_m(k) r_n(k) \right], \qquad (8.3\text{-}3)$$

ὁ πίναξ τανυστής τῶν ροπῶν ἀδρανείας τοῦ στερεοῦ.

Προκειμένου περί συνεχοῦς κατανομῆς μάζης, ὁ τανυστής τῶν ροπῶν ἀδρανείας δίδεται ἐκ τοῦ ὁλοκληρώματος

$$I_{mn} = \int \rho(\vec{x}) \left[x^2\, \delta_{mn} - x_m x_n \right] d^3x \,. \qquad (8.3\text{-}4)$$

Ὁ τανυστής ἀδρανείας εἶναι προφανῶς ἕνας συμμετρικός τανυστής δευτέρας τάξεως. Αἱ συνιστῶσαι του I_{mn} ἐξαρτῶνται ἐκ τῆς κατανομῆς μάζης ὡς πρός τήν ἀρχήν καί τόν προσανατολισμόν τοῦ συστήματος ἀξόνων ἀναφορᾶς.

Ἄν I^{o}_{mn} αἱ ροπαί ἀδρανείας ὡς πρός ἕν σύστημα ἔχον ἀρχήν τῶν ἀξόνων τό κέντρον μάζης, τότε μετάθεσις τῆς ἀρχῆς κατά

$$\vec{x} = \vec{x}_o + \vec{R} \quad , \tag{8.3-5}$$

δίδει

$$I_{mn} = \int \rho \left[x^2 \ \delta_{mn} - x_m x_n \right] d^3\mathbf{x} =$$

$$= I^{o}_{mn} + M(R^2\delta_{mn} - R_m R_n), \tag{6.3-6}$$

ὅπου M ἡ ὁλική μᾶζα.

"Ὁ τανυστής τῶν ροπῶν ἀδρανείας I_{mn} μιᾶς κατανομῆς μάζης ἰσοῦται πρός τόν τανυστήν ἀδρανείας I^{o}_{mn} τόν ἀναφερόμενον εἰς τό κέντρον μάζης σύν τόν τανυστήν ἀδρανείας $M(R^2\delta_{mn}-R_mR_n)$ τοῦ κέντρου μάζης τῆς κατανομῆς".

Ἡ ἀνωτέρω πρότασις διέπει τόν μετασχηματισμόν τῆς

ροπῆς ἀδρανείας ὡς πρός παράλληλον μετάθεσιν τοῦ συστήματος ἀναφορᾶς. Ὡς πρός στροφήν R τοῦ συστήματος ἀναφορᾶς ἔχομεν τόν ἁπλοῦν μετασχηματισμόν ἑνός τανυστοῦ δευτέρας τάξεως

$$I'_{mn} = \sum_{k,\ell} R_{mk} R_{n\ell} I_{k\ell} \quad . \tag{8.3-7}$$

Βάσει τῆς (8.3-7), λαμβανομένης ὑπ'ὄψιν καί τῆς συμμετρίας $I_{mn} = I_{nm}$ ἡ ροπή ἀδρανείας δύναται νά τεθῇ εἰς διαγώνιον μορφήν. Εἰς τά κατωτέρω, θά ὑποθέτωμεν ὅτι ἡ ροπή ἀδρανείας ἀναφερομένη εἰς τούς ἄξονας τοῦ σώματος εἶναι ἤδη εἰς διαγώνιον μορφήν

$$I^{(0)}_{mn} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \quad . \tag{8.3-8}$$

Ἡ διαγωνιοποίησις τῆς ροπῆς ἀδρανείας, ἐπιτυγχάνεται ἁπλούστατα δι'ἐκλογῆς ὡς συστήματος ἀναφορᾶς τοῦ συστήματος τό ὁποῖον ὁρίζουν οἱ τρεῖς πρωτεύοντες ἄξονες τοῦ ἐλλειψοειδοῦς τῆς ἀδρανείας (βλ. ἐπίσης § 4.2).

$$\sum_{m,n=1}^{3} I_{mn} x_m x_n = 1 \tag{8.3-9}$$

Ἄς ἐπανέλθωμεν εἰς τήν δυναμικήν τῆς κινήσεως. Ἡ ἔκφρασις (8.3-2) τῆς κινητικῆς ἐνεργείας στερεοῦ, ἐνθυμίζει τήν κινητικήν ἐνέργειαν ὑλικοῦ σημείου. Εἰς τήν θέσιν τῆς ταχύτητος $\vec{v}$ εὑρίσκεται ἡ γωνιακή ταχύτης $\vec{\omega}$ καί ἡ μᾶζα ἀντικαθίσταται ὑπό τῆς ροπῆς ἀδρανείας. Ἡ κανονική ὁρμή, συζυγής μιᾶς γωνίας στροφῆς $\vec{\varphi}$ (ἄσκ. 2)

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{\varphi}}} = I.\frac{d\vec{\varphi}}{dt} = I.\vec{\omega} = \vec{L}.\vec{\varphi} \, , \qquad (8.3\text{-}10)$$

εἶναι ἴση πρός τήν προβολήν τῆς στροφορμῆς τοῦ στερεοῦ ἐπί τοῦ ἄξονος τῆς στροφῆς.

Εἰσάγοντες τήν (8.3-10) εἰς τήν ἐξίσωσιν κινήσεως τῆς στροφορμῆς (2.2-5), παρουσίᾳ ροπῆς δυνάμεως $\vec{M}$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M},$$

ἔχομεν ἀμέσως, ὑπό Lagrange μορφήν, τήν ζητουμένην δυναμικήν ἐξίσωσιν τῆς κινήσεως τοῦ στερεοῦ

$$\frac{d}{dt}\,(I.\vec{\omega}) = \vec{M} \quad , \qquad (8.3\text{-}11)$$

ἤ

$$\left(\frac{dI}{dt}\right).\vec{\omega} + I.\dot{\vec{\omega}} = \vec{M} \, . \qquad (8.3\text{-}12)$$

8.4. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ EULER.

Αἱ Lagrange ἐξισώσεις τῆς κινήσεως (8.3-12) δέν εἶναι λίαν εὔχρηστοι. Ὁ τανυστής ἀδρανείας I ὁ ὁποῖος παρουσιάζεται εἰς αὐτάς, ἀναφέρεται εἰς τό ἀδρανειακόν σύστημα ἀναφορᾶς καί συνεπῶς, κινουμένου τοῦ στερεοῦ, οὗτος μεταβάλλεται μετά τοῦ χρόνου. Πρός ἀποφυγήν τούτου ὁ Euler εἰσήγαγε τό περιστρεφόμενον σύστημα τοῦ σώματος. Ὁ τανυστής ἀδρανείας I_o ὁ ἀναφερόμενος εἰς τό σύστημα ἀξόνων αὐτοῦ τούτου τοῦ στερεοῦ, εἶναι προφανῶς ἀνεξάρτητος τοῦ χρόνου

$$\frac{\partial}{\partial t}\, I_o = 0 \quad . \qquad (8.4\text{-}1)$$

Οὕτω χρησιμοποιοῦντες τήν ταυτότητα (ἄσκ. 4)

$$\left(\frac{dI}{dt}\right).\vec{\omega} = \vec{\omega}x(I\vec{\omega}) \; , \qquad (8.4\text{-}2)$$

ἀναφερομένην εἰς ἀδρανειακόν σύστημα ἀναφορᾶς, τό ὁποῖον στιγμιαίως συμπίπτει μετά τοῦ (OX_o, OY_o, OZ_o) ἔχομεν τελικῶς

$$M = I\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega}\,x(I.\vec{\omega}) \, . \qquad (8.4\text{-}3)$$

Αἱ ἐξισώσεις (8.3-14) εἶναι αἱ περίφημοι ἐξισώσεις τοῦ

Euler. Αὗται λαμβάνουν τήν ἁπλουστάτην μορφήν ὅταν ἡ ροπή ἀδρανείας ἀναφερθῇ ὡς πρός τούς πρωτεύοντας ἄξονας ἀδρανείας τοῦ στερεοῦ. Τότε

$$M_1 = I_1\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3(I_3-I_2) \qquad (8.4\text{-}4)$$
$$M_2 = I_2\dot{\omega}_2 + \omega_3\omega_1(I_1-I_3)$$
$$M_3 = I_3\dot{\omega}_3 + \omega_1\omega_2(I_2-I_1)$$

'Ε ξ ι σ ώ σ ε ι ς H a m i l t o n.

'Η κανονική ὁρμή συζυγής μιᾶς γωνίας στροφῆς φ τοῦ στερεοῦ εἶναι

$$\frac{\partial T}{\partial\vec{\omega}} = I.\vec{\omega} = \vec{L} \qquad (8.4\text{-}5)$$

Ἔστω I^{-1} ὁ "ἀντίστροφος" τοῦ πίνακος ἀδρανείας I. Ὅταν ὁ πίναξ I δέν ἔχει μηδενικά ἀνύσματα, ἤτοι ἄν τό $I.\vec{\omega} = 0$ συνεπάγεται $\vec{\omega} = 0$, ὁ πίναξ I^{-1} ὑπάρχει. Τότε ἔχομεν

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega}.I.\vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{L}.I^{-1}I.\vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{L}.I^{-1}.\vec{L} \quad (8.4\text{-}6)$$

Ἀναφερόμενοι εἰς τούς πρωτεύοντας ἄξονας ἀδρανείας

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{L_1^2}{I_1} + \frac{L_2^2}{I_2} + \frac{L_3^2}{I_3}\right) . \qquad (8.4\text{-}7)$$

Ἄν ὑπάρχουν μηδενικά ἀνύσματα τοῦ I, ὡς π.χ. εἰς τήν περίπτωσιν εὐθυγράμμου κατανομῆς μάζης (ἄσκ. 5), ὁ I^{-1} ὁρίζεται μόνον διά $\vec{\omega}'$ τά ὁποῖα εἶναι μή μηδενικαί εἰκόνες τοῦ I, ἤτοι $\vec{\omega}' = I\vec{\omega} \neq 0$. Τόν πίνακα τοῦτον θά συμβολίζωμεν I_n . Ὅταν $I\vec{\omega} = 0$, ὁρίζομεν $I_n I\vec{\omega} = 0$ ὥστε τό I_n^{-1} I εἶναι πίναξ προβολή τοῦ ὀρθογωνίου συμπληρώματος $R\text{-}n$ τοῦ χώρου n τῶν μηδενικῶν ἀνυσμάτων τοῦ I, $n = \{\vec{\omega} | I\vec{\omega} = 0\}$,

$$I_n^{-1}\, I\, \vec{\omega} = \begin{cases} \omega & \text{διά } \vec{\omega} \in (R\text{-}n) \\ 0 & \text{διά } \vec{\omega} \notin (R\text{-}n) . \end{cases} \qquad (8.4\text{-}8)$$

Διά τοιαῦτα $\vec{\omega}$ ἔχομεν

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega}.I.\vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{\omega}.I_n^{-1}\, I.\vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{L}\,.I_n^{-1}\vec{L} \quad .(8.4\text{-}9)$$

Ὁ χῶρος n εἶναι τό πολύ μιᾶς διαστάσεως, εὐθύγραμμος κατανομή μάζης (ἄσκ. 6) $I_1 \neq 0$, $I_2 \neq 0$, $I_3 = 0$,

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_n^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{I_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (8.4\text{-}10)$$

καί

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{L_1^2}{I_1} + \frac{L_2^2}{I_2} \right). \qquad (8.4\text{-}11)$$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ.

1. Εἰς περίπτωσιν καθ'ἥν ἡ συνισταμένη ἐξωτερική δύναμις ἐπί στερεοῦ εἶναι μηδέν, δείξατε ὅτι ἡ κίνησίς του ἀναλύεται εἰς μίαν εὐθύγραμμον μεταφορικήν κίνησιν τοῦ κέντρου μάζης O, μέ σταθεράν ταχύτητα, καί μίαν στροφικήν κίνησιν περί τό O. Εἰς τό σύστημα ἀναφορᾶς τοῦ κέντρου μάζης ἡ κίνησις τοῦ στερεοῦ εἶναι καθαρῶς στροφική κίνησις περί τό O.

2. Δείξατε ὅτι ἡ κανονική ὁρμή στερεοῦ,ἔχοντος ἕν σημεῖον σταθερόν,συζυγής μιᾶς γωνίας περιστροφῆς $\vec{\varphi}$ ἰσοῦται πρός τήν προβολήν $\vec{L}\cdot\frac{\varphi}{\varphi}$ τῆς στροφορμῆς ἐπί τοῦ ἄξονος τῆς περιστροφῆς.

3. Δείξατε τόν τύπον

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{A}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{A}',$$

ὁ ὁποῖος δίδει τόν μετασχηματισμόν τῆς χρονικῆς παραγώγου τυχόντος ἀνυσματικοῦ μεγέθους $\vec{A}$ ἀπό ἀδρανειακοῦ εἰς περιστρεφόμενον σύστημα ἀναφορᾶς $\vec{A}'$.

4. Βάσει τῆς ἀσκήσεως (3) δείξατε ὅτι

$$\left(\frac{dI}{dt}\right) \vec{\omega} = \vec{\omega} \times (\vec{I}.\vec{\omega}) = \vec{\omega} \times \vec{L}.$$

5. Δείξατε ὅτι εὐθύγραμμος κατανομή μάζης κατά μῆκος τοῦ ἄξονος Z, ἔχει $I_1 = I_2$, $I_3 = 0$

6. Εἶναι δυνατόν νά ἔχωμεν στερεόν μέ $I_1 = I_2 = 0$, $I_3 \neq 0$;
Νά αἰτιολογηθῆ ἡ ἀπάντησις.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ΠΡΟΣ ΕΚΤΕΝΕΣΤΕΡΑΝ ΜΕΛΕΤΗΝ.

1. Κ. Παπαϊωάννου: "Μηχανική" (I,II), Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν 1954.
2. Berkeley Physics course, "Mechanics", Mc Graw-Hill 1970.
3. H. Goldstein, "Classical Mechanics", Addison-Wesley 1964.
4. H. C. Corben and P. Stehle, "Classical Mechanics", John Wiley 1960.
5. T. W. B. Kibble, "Classical Mechanics", Mc Graw-Hill 1966.
6. L. Landau, "Mechanics", Pergamon Press 1960.
7. E. Mach, "The Science of Mechanics", Open Court, Chicago 1907.
8. A. Sommerfeld, "Mechanics", Academic Press 1966.
9. J. L. Synge and B. A. Griffith, "Principles of Mechanics" Mc Graw-Hill 1942.
10. E. T. Whittaker, " Analytical Dynamics", Dover Pub. 1944.