

Μηχανική II

Λογισμός των μεταβολών

Προκειμένου να αντιμετωπίσουμε προβλήματα μεγιστοποίησης (ελαχιστοποίησης) όπως τα παραπάνω, όπου η ποσότητα που θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε (ελαχιστοποιήσουμε) είναι συναρτησοειδές, δηλαδή είναι συνάρτηση μιας άλλης συνάρτησης, ακολουθούμε σε γενικές γραμμές τη συνταγή που ακολουθήσαμε οδηγούμενοι από τη μορφή της δράσης για τα μηχανικά συστήματα στο θεμελιώδη νόμο της δυναμικής.

$x_i(t)$

Ας ξεκινήσουμε με ένα συναρτησοειδές της μορφής $S = \int_{t_A}^{t_B} L dt$, όπου η L είναι

μια συνάρτηση μιας άλλης συνάρτησης του t και των παραγώγων της συνάρτησης αυτής ως προς t . Για ευκολία θα θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση L (ονομάζεται *Λαγκρανζιανή* –Lagrangian– όταν πρόκειται για την περιγραφή ενός μηχανικού συστήματος) είναι απλώς συνάρτηση μόνο των συναρτήσεων $x_i(t)$ και των παραγώγων τους $\dot{x}_i(t)$, καθώς επίσης και, εν γένει, του ίδιου του t . (Μια τέτοια υπόθεση είναι δικαιολογημένη, όταν πρόκειται για μηχανικά συστήματα αφού ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα είναι διαφορικός νόμος δευτέρας τάξης και επομένως απαιτείται η γνώση και της αρχικής θέσης και της ταχύτητας για την εξεύρεση της τροχιάς ενός σώματος.) Η απαίτηση να είναι ακρότατο η S για κάποιες συγκεκριμένες συναρτήσεις $x_i(t)$ σημαίνει, όπως εξηγήσαμε προηγουμένως, ότι αν παραλλάξουμε ελαφρά τις συναρτήσεις αυτές η S δεν αλλάζει (αλλάζει σε δεύτερη τάξη συγκριτικά με την αλλαγή των συναρτήσεων). Φορμαλιστικά, θα πρέπει:

$$\tilde{S} - S = \int_{t_A}^{t_B} L(\tilde{x}(t), \dot{\tilde{x}}(t), t) dt - \int_{t_A}^{t_B} L(\bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), t) dt = O(\varepsilon^2),$$

όπου $\tilde{x}(t) = (\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \dots, \tilde{x}_N(t))$ είναι όλες οι παραλλαγμένες συναρτήσεις από τις οποίες εξαρτάται η συνάρτηση L , και ε είναι η πολύ μικρή παράμετρος που καθορίζει το πόσο κοντά είναι οι παραλλαγμένες συναρτήσεις στις συναρτήσεις $x_i(t)$ που καθιστούν την S ακρότατο: $\tilde{x}_i(t) = x_i(t) + \varepsilon \xi_i(t)$. [Σημείωση: ο συμβολισμός $\bar{x}(t)$ δεν σημαίνει ότι κατ' ανάγκη αναφέρεται σε κάποιο διάνυσμα θέσης σωματιδίου· είναι απλά ένας συνοπτικός τρόπος γραφής ενός συνόλου ανεξαρτήτων μεταξύ τους συναρτήσεων.] Οι συναρτήσεις $\xi_i(t)$ είναι τυχαίες, ομαλά συμπεριφερόμενες, συναρτήσεις, όχι αναγκασμένες να παίρνουν μικρές τιμές –αυτό το εξασφαλίζει η παράμετρος ε –, οι οποίες καθορίζουν με ποιο ακριβώς τρόπο οι παραλλαγμένες συναρτήσεις διαφοροποιούνται από τις συναρτήσεις-λύσεις του προβλήματός μας. Η μόνη απαίτηση για τις συναρτήσεις αυτές είναι να είναι $\xi_i(t_A) = \xi_i(t_B) = 0$, δηλαδή οι

παραλλαγμένες συναρτήσεις να ταυτίζονται με τις συναρτήσεις-λύσεις στα άκρα της ολοκλήρωσης.

Αναπτύσσοντας τώρα τη συνάρτηση L της οποίας μεταβλητές είναι οι παραλλαγμένες συναρτήσεις σε όρους μηδενικής, πρώτης, κλπ. τάξης ως προς τη μικρή παράμετρο ε βρίσκουμε:

$$L(\tilde{x}(t), \dot{\tilde{x}}(t), t) = L(\bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), t) + \varepsilon \left(\frac{\partial L}{\partial \bar{x}} \cdot \tilde{\xi} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{x}}} \cdot \dot{\tilde{\xi}} \right) + O(\varepsilon^2),$$

όπου με το συμβολισμό $\frac{\partial L}{\partial \bar{x}} \cdot \tilde{\xi}$ εννοούμε $\sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i} \xi_i$. Χρησιμοποιώντας την παραπάνω

σχέση η διαφορά των δύο S που αντιστοιχούν στις παραπλήσιες διαδρομές γίνεται:

$$\tilde{S} - S = \varepsilon \int_{t_A}^{t_B} \left(\frac{\partial L}{\partial \bar{x}} \cdot \tilde{\xi} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{x}}} \cdot \dot{\tilde{\xi}} \right) dt + O(\varepsilon^2).$$

Προκειμένου λοιπόν η S να καθίσταται στάσιμη, θα πρέπει ο όρος πρώτης τάξης ως προς ε να είναι μηδενικός και μάλιστα για οποιαδήποτε επιλογή των συναρτήσεων $\tilde{\xi}$. Αν επαναλάβουμε το τέχνασμα με την παραγοντική ολοκλήρωση που εκτελέσαμε στην πρώτη μας απόπειρα εύρεσης ακροτάτου μιας δράσης, θα έχουμε ότι:

$$0 = \int_{t_A}^{t_B} \left(\frac{\partial L}{\partial \bar{x}} \cdot \tilde{\xi} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{x}}} \right) \cdot \tilde{\xi} \right) dt + \int_{t_A}^{t_B} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{x}}} \cdot \tilde{\xi} \right) dt = \int_{t_A}^{t_B} \left(\frac{\partial L}{\partial \bar{x}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{x}}} \right) \right) \cdot \tilde{\xi} dt + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{x}}} \cdot \tilde{\xi} \right)_{t_A}^{t_B}.$$

Ο τελευταίος όρος είναι προφανώς μηδενικός, αφού η τιμή των συναρτήσεων $\tilde{\xi}$ στα άκρα έχει ληφθεί ως μηδενική. Η απαίτηση λοιπόν, το ολοκλήρωμα που απομένει να είναι ταυτοτικά μηδέν θυμίζει πάρα πολύ τη μαθηματική πρόταση που συναντήσαμε παραπάνω με μια μικρή όμως διαφορά: στην παρούσα περίπτωση η ποσότητα που μηδενίζεται δεν είναι ένα απλό ολοκλήρωμα αλλά ένα άθροισμα ολοκληρωμάτων (προσέξτε το εσωτερικό γινόμενο). Μπορεί όμως κανείς με μια έξυπνη τροποποίηση της προηγούμενης απόδειξης να δείξει ότι και σε αυτή την περίπτωση η ποσότητα

$\left(\frac{\partial L}{\partial \bar{x}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{x}}} \right) \right)$ πρέπει να είναι μηδενική (στην πραγματικότητα κάθε συνιστώσα αυτής, δηλαδή για κάθε δείκτη του x , θα πρέπει να είναι μηδενική). (i) Υποθέστε ότι η συνάρτηση μέσα στην παρένθεση δεν είναι μηδενική και πιο συγκεκριμένα η 1η συνιστώσα αυτής: $\left(\frac{\partial L}{\partial x_1} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) \right)$. (ii) Επιλέξτε ως $\tilde{\xi}(t)$, το σύνολο συναρτήσεων

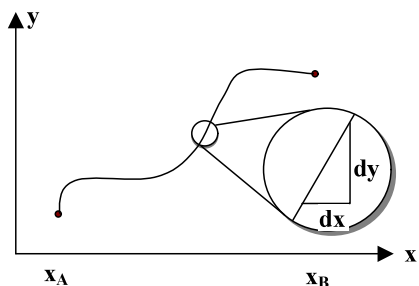
$(\xi_1(t), 0, 0, \dots, 0)$, όπου η $\xi_1(t)$ είναι τέτοια ώστε να μηδενίζεται οπουδήποτε αλλού εκτός από μια μικρή περιοχή στην οποία η συνάρτηση μέσα στην παρένθεση έχει σταθερό πρόσημο και δεν μηδενίζεται. (iii) Τότε το αποτέλεσμα του ολοκληρώματος δεν θα ήταν μηδενικό. (iv) Συνεπώς η παράσταση μέσα στην τελευταία παρένθεση πρέπει να είναι μηδέν. (v) Επαναλάβετε τα προηγούμενα βήματα με τη 2η, 3η, κλπ.

συνιστώσα της συνάρτησης $\left(\frac{\partial L}{\partial \bar{x}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{x}}} \right) \right)$, φροντίζοντας πάντα να μηδενίζετε όλες

τις άλλες συναρτήσεις ξ_i εκτός από αυτή που σας ενδιαφέρει. Το συμπέρασμα λοιπόν είναι ότι:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \right) = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots$$

Οι παραπάνω εξισώσεις ονομάζονται *εξισώσεις Euler-Lagrange*, και είναι αυτές οι οποίες μας οδηγούν στη λύση του ευρύτερου προβλήματός μας. Δηλαδή, είναι διαφορικές εξισώσεις 2ας τάξεως, οι λύσεις των οποίων καθιστούν τη δράση στάσιμη. Πιο συγκεκριμένα όσον αφορά τα μηχανικά συστήματα, είναι οι διαφορικές εξισώσεις που μας παρέχουν τις εξισώσεις κίνησης αυτών.



Παραδείγματα: *Γεωμετρικό πρόβλημα.* Ποια επίπεδη καμπύλη που συνδέει δύο δοσμένα σημεία είναι η συντομότερη;

Το μήκος της τυχαίας καμπύλης που συνδέει το αρχικό σημείο A με το τελικό σημείο B είναι

$$\int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_A^B \sqrt{1 + (y')^2} dx. \quad \text{Η}$$

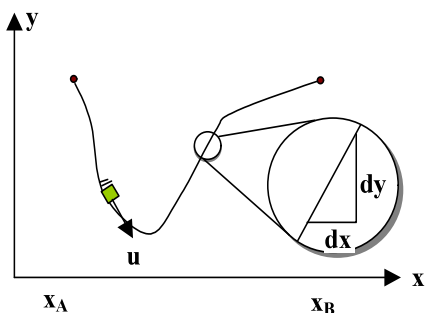
συνάρτηση L λοιπόν στο πρόβλημα αυτό είναι η

$$L(y, y', x) = L(y') = \sqrt{1 + (y')^2}. \text{ Η εξίσωση Euler-Lagrange τότε δίνει:}$$

$$0 = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = \text{σταθ} \Rightarrow y' = \text{σταθ}$$

Η συντομότερη «καμπύλη» λοιπόν είναι της μορφής $y = y_A + c(x - x_A)$, δηλαδή ευθεία.

Κινηματικό πρόβλημα. Τι μορφή πρέπει να έχει μια τσουλήθρα η οποία ενώνει δύο σημεία που βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο ώστε ένα σώμα γλιστρώντας, χωρίς αρχική ταχύτητα, ελεύθερα πάνω της να φτάσει από το ένα σημείο στο άλλο στο συντομότερο χρόνο;



Η ποσότητα που πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε

$$\text{τώρα είναι η } \int_A^B dt = \int_A^B \frac{ds}{u} = \int_A^B \frac{\sqrt{1 + (y')^2} dx}{u(y)}, \text{ αφού η}$$

ταχύτητα, από διατήρηση της ενέργειας, γνωρίζουμε ότι είναι συνάρτηση μόνο του ύψους και πιο συγκεκριμένα $u(y) = \sqrt{-2gy}$.

Τώρα η συνάρτηση L είναι πιο πολύπλοκη απ' ό,τι στο προηγούμενο πρόβλημα και εξαρτάται και από το y και από το y' . Ύστερα από κάποιες

πράξεις η εξίσωση Euler-Lagrange καταλήγει στη διαφορική εξίσωση:

$$1 + (y')^2 + 2yy'' = 0. \text{ Πολλαπλασιάζοντας αυτή με } y' \text{ μεταμορφώνουμε τη διαφορική}$$

$$\text{αυτή εξίσωση στην κάπως απλούστερη: } \frac{d}{dx} [y(1 + (y')^2)] = 0 \Rightarrow y(1 + (y')^2) = \text{σταθ}. \text{ Η}$$

τελευταία αυτή σχέση επαληθεύεται από την εξίσωση της κυκλοειδούς καμπύλης: $x(\eta) = A(\eta - \sin \eta), y = A(-1 + \cos \eta)$ όπου η μια παράμετρος που παίρνει τιμές από 0 έως 2π .

Πρόβλημα μηχανικής. Να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης ενός σωματίου μάζας m κινούμενου μέσα στο ομογενές βαρυτικό πεδίο της Γης.

Η δράση για τα μηχανικά συστήματα μάθαμε ότι είναι το ολοκλήρωμα της διαφοράς κινητικής μείον δυναμικής ενέργειας. Επομένως η Λαγκρανζιανή συνάρτηση για το

$$\text{πρόβλημα αυτό είναι } L = \frac{1}{2} m \left(\dot{\vec{x}} \right)^2 - m\vec{g} \cdot \vec{x} = \frac{1}{2} m \left(\dot{\vec{x}} \right)^2 + mgz. \text{ Σύμφωνα με την αρχή}$$

ελάχιστης δράσης η διαδρομή, δηλαδή η εξίσωση κίνησης, πρέπει να είναι τέτοια

ώστε η δράση να καθίσταται στάσιμη. Η Λαγκρανζιανή συνάρτηση εδώ είναι συνάρτηση των τριών καρτεσιανών συντεταγμένων της θέσης του σωματιδίου και των παραγώγων τους. Επομένως θα υπάρχουν τρεις εξισώσεις Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0$$

οι οποίες ύστερα από απλές παραγωγίσεις παίρνουν τη μορφή:

$$m\ddot{x} = 0$$

$$m\ddot{y} = 0$$

$$m\ddot{z} - mg = 0$$

Η λύση αυτών δίνει τη γνωστή μας παραβολική τροχιά:

$$x = x_0 + u_x t, y = y_0 + u_y t, z = z_0 + u_z t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Αξίζει να παρατηρήσει κανείς ότι οι εξισώσεις Euler-Lagrange δεν ενδιαφέρονται για τα ακραία σημεία της διαδρομής. Στην πραγματικότητα οι εξισώσεις Euler-Lagrange είναι μια άλλη παρουσίαση του 2ου νόμου του Νεύτωνα και είναι διαφορικές σχέσεις που «καθοδηγούν» το μηχανικό σύστημα με ποιο τρόπο να «κινήθει» κάθε χρονική στιγμή. Τα ακραία σημεία απλώς καθορίζουν τις παραμέτρους της ορθής διαδρομής ώστε αυτή να περνά από τα σημεία αυτά.

Κάτι άλλο εξίσου σημαντικό είναι ότι ενώ ο 2ος νόμος του Νεύτωνα σε διαφορετικά συστήματα συντεταγμένων παίρνει διαφορετική μορφή, οι εξισώσεις Euler-Lagrange μένουν απαράλλαχτες, αυτό που αλλάζει κάθε φορά είναι η γραφή της Λαγκρανζιανής. Ως παράδειγμα ας εξετάσουμε ένα πρόβλημα κίνησης σωματίου σε κεντρικό πεδίο δυνάμεων με τις δύο μεθοδολογίες:

Νευτώνεια μεθοδολογία: Η κίνηση του σωματίου (για απλότητα θα θεωρήσουμε ως δεδομένο ότι αυτή κείται σε ένα επίπεδο) υπαγορεύεται από το διανυσματικό νόμο $\vec{F} = m\vec{\ddot{r}}$. Γράφοντας τη σχέση αυτή σε καρτεσιανές συντεταγμένες με κέντρο του συστήματος το κέντρο του πεδίου δυνάμεων έχουμε

$$F_x = F(r) \frac{x}{r} = m\ddot{x}$$

$$F_y = F(r) \frac{y}{r} = m\ddot{y}$$

ενώ σε πολικές συντεταγμένες, ύστερα από κάποιες, σχετικά επίπονες, πράξεις διανυσματικής ανάλυσης

$$F(r) = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

$$F(\theta) = 0 = \frac{m}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta})$$

Αναλυτική μεθοδολογία: Η Λαγκρανζιανή είναι στις μεν καρτεσιανές συντεταγμένες $L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(r)$, στις δε πολικές συντεταγμένες $L = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(r)$,

όπου $V(r) = -\int F(r) dr$. Οι εξισώσεις Euler-Lagrange που θα χρησιμοποιήσεις

κάποιος για να εξάγει τις εξισώσεις κίνησης είναι αυτές που είδαμε παραπάνω και δεν διαφοροποιούνται καθόλου ανάλογα με το σύστημα αναφοράς. Προφανώς θα καταλήξουν στις παραπάνω νευτώνειες εξισώσεις ανάλογα με την επιλογή του συστήματος αναφοράς. Η σύγκριση είναι οφθαλμοφανής. Οι εξισώσεις Euler-Lagrange είναι γενικότερης εφαρμογής και μπορεί κανείς να θυμάται λιγότερα πράγματα απ' έξω.