Τμήμα Π. Ιωάννου &
Θ. Αποστολάτου
2/2000

Μηχανική ΙΙ

Οι νόμοι του Νεύτωνα ως απόρροια της αρχής της ελάχιστης δράσης και πως ξέρει ένα σωματίδιο να επιλέξει τη φυσική διαδρομή

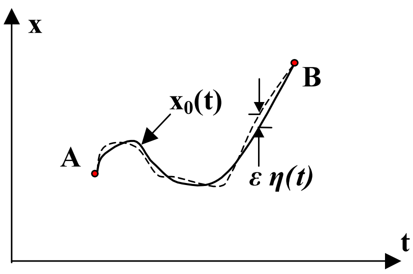
Ο κόσμος μας είναι τέλειος(;), όπου με τον όρο τελειότητα των φυσικών συστημάτων μπορούμε να ορίσουμε, σε μαθηματική γλώσσα, το γεγονός ότι η δράση καθίσταται στάσιμη ως προς κάθε δυνατή διαδρομή (εξέλιξη) του φυσικού συστήματος στο χώρο και το χρόνο. Ξεκινώντας από την αρχή αυτή, θα σχολιάσουμε το εύρος εφαρμογής της, θα μάθουμε να υπολογίζουμε τα ακρότατα της δράσης, θα αποδείξουμε ότι είναι ισοδύναμη με το 2ο νόμο του Νεύτωνα γενικά και θα προσπαθήσουμε να απαντήσουμε στο βαθύτερο ερώτημα που ακόμη αιωρείται μετέωρο: πώς καταφέρνουν τα σωματίδια να γνωρίζουν ποια είναι η διαδρομή που καθιστά τη δράση στάσιμη ώστε να επιλέγουν αυτήν.

Η δράση, $S = \int (E_{\kappa\iota\nu} - E_{\delta\upsilon\nu}) dt$, ενός μηχανικού συστήματος που αναφέρεται στην αρχή του Hamilton, έχει νόημα εφόσον το πρόβλημά μας μπορεί να συσχετιστεί με κάποια δυναμική ενέργεια. Στις περιπτώσεις που η κίνηση γίνεται σε πεδίο μη συντηρητικών δυνάμεων, όπως για παράδειγμα όταν κατεβαίνουμε σε μια τσουλήθρα υπό την επενέργεια τριβών, δεν μπορούμε, εν γένει, να κατασκευάσουμε μια δράση, αλλά σε θεμελιακό επίπεδο αυτό δεν αποτελεί πρόβλημα, αφού δεν υπάρχει θεμελιώδης δύναμη της φύσης η οποία να είναι μη συντηρητική. Οι μη συντηρητικές δυνάμεις, σαν την τριβή, είναι απλώς στατιστικό αποτέλεσμα συντηρητικών στη φύση τους δυνάμεων, που ασκούνται σε ατομικό επίπεδο και οι οποίες εμφανίζονται ως μη συντηρητικές, όταν περάσει κανείς σε μακροσκοπικό επίπεδο, αμελώντας τις λεπτομέρειες του μικρόκοσμου.

Στην πραγματικότητα, η αρχή του Hamilton έχει ακόμη μεγαλύτερη ισχύ από τους νόμους του Νεύτωνα. Μπορεί κανείς να κατασκευάσει αντίστοιχες συναρτήσεις δράσης και για τον ηλεκτρομαγνητισμό, και για τη θεωρία της σχετικότητας, και για πεδία που δεν μπορεί κανείς να τα εξετάσει μέσα από τα στενά πλαίσια της νευτώνειας μηχανικής.

Παραμένει ακόμη το τεχνικό πρόβλημα, του πώς θα υπολογίσουμε το ακρότατο της δράσης. Η δράση είναι συνάρτηση της καμπύλης που θα ακολουθήσει το μηχανικό σύστημα, και όχι συνάρτηση κάποιων μεταβλητών: είναι όπως λέμε ένα *συναρτησοειδές (*functional). Έμμεσα, έχουμε αγγίξει αυτό το τεχνικό πρόβλημα όταν ψάξαμε με τον πιο γενικό τρόπο να βρούμε την κίνηση που εκτελεί ένα ελεύθερο σωμάτιο. Με τον ίδιο τρόπο θα προσεγγίσουμε το γενικό πρόβλημα.

Έστω $x_0(t)$ η φυσική διαδρομή του μηχανικού συστήματος, αυτή δηλαδή που καθιστά τη δράση στάσιμη. Αυτό σημαίνει ότι αν παρεκκλίνουμε πολύ λίγο από αυτή τη διαδρομή, η δράση δεν θα αλλάξει αισθητά. Πιο ποσοτικά, αν η παρέκκλισή μας είναι τάξης ε, όπου ε ένας πολύ μικρός αριθμός, η δράση που θα αντιστοιχεί σε αυτή την καινούρια διαδρομή θα είναι τάξης ε^2. Προκειμένου να αποκτήσουμε βαθύτερη κατανόηση, της παραπάνω έκφρασης για τη στασιμότητας της δράσης, ας δούμε ένα παράδειγμα από την ανάλυση που γνωρίζουμε καλά. Μια συνάρτηση[1] f μίας μεταβλητής, μπορεί να αναπτυχθεί γύρω από οποιοδήποτε σημείο μέσω του αναπτύγματος Taylor: $f(x) \underset{x \cong x_0}{\cong} f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(x_0) + \ldots$ Αν το σημείο x_0 αποτελεί ακρότατο της συνάρτησης, τότε $f'(x_0) = 0$, οπότε αν ξεφύγουμε κατά μία πολύ μικρή απόσταση ε μακριά από το σημείο x_0, $f(x_0 + \varepsilon) \cong f(x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)\varepsilon^2 + \ldots = f(x_0) + \mathrm{O}(\varepsilon^2)$, όπου το σύμβολο $\mathrm{O}(\varepsilon^2)$ δηλώνει ποσότητα τάξης ε^2. Το ίδιο θα συμβαίνει και με τη δράση, μόνο που σε αυτή την περίπτωση το ε θα δηλώνει μια παραμετροποίηση της πολύ γειτονικής, προς τη φυσική, διαδρομής. Θα πρέπει δηλαδή



$$S(x_o + \varepsilon\eta) - S(x_0) = \mathrm{O}(\varepsilon^2),$$

όπου $\eta(t)$ είναι μια οποιαδήποτε συνάρτηση που δείχνει με πιο τρόπο η καινούρια διαδρομή απομακρύνεται από τη φυσική. Η συνάρτηση η είναι απολύτως αυθαίρετη, αλλά χωρίς απειρισμούς, με μοναδική απαίτηση να ισχύει $\eta(t_A) = \eta(t_B) = 0$. Ο παράγοντας ε, όντας οσοδήποτε μικρός, εξασφαλίζει τη γειτνίαση της καινούριας διαδρομής στη φυσική. Εκτελώντας τις πράξεις στην παραπάνω σχέση και συγκεντρώνοντας τα αποτελέσματα σε όρους αύξουσας τάξης ως προς ε παίρνουμε:

$$S(x_o + \varepsilon\eta) - S(x_0) = \int_{t_A}^{t_B} \frac{1}{2} m(\dot{x}_0 + \varepsilon\dot{\eta})^2 dt - \int_{t_A}^{t_B} V(x_0 + \varepsilon\eta) dt - \int_{t_A}^{t_B} \frac{1}{2} m(\dot{x}_0)^2 dt + \int_{t_A}^{t_B} V(x_0) dt =$$

$$\varepsilon\left(\int_{t_A}^{t_B} m\dot{x}_0\dot{\eta} dt - \int_{t_A}^{t_B} V'(x_0)\eta dt \right) + \mathrm{O}(\varepsilon^2)$$

Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες το πρώτο ολοκλήρωμα της τελευταίας σειράς γίνεται $\int_{t_A}^{t_B} m\dot{x}_0\dot{\eta} dt = m\dot{x}_0\eta\Big|_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} - \int_{t_A}^{t_B} m\ddot{x}_0\eta dt = -\int_{t_A}^{t_B} m\ddot{x}_0\eta dt$, αφού $\eta(t_A)$=$\eta(t_B)$=0. Το συμπέρασμα λοιπόν είναι ότι προκειμένου να είναι στάσιμη η δράση θα πρέπει, ο όρος τάξης ε να είναι μηδενικός εκ ταυτότητας. Δηλαδή θα πρέπει

$$\int_{t_A}^{t_B} \left(m\ddot{x}_0 + V'(x_0)\right)\eta dt = 0,$$

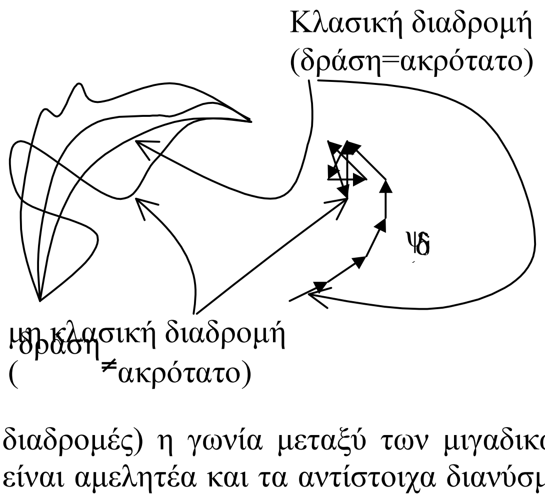
και προφανώς αυτό θα πρέπει να ισχύει για κάθε είδους γειτονική διαδρομή, δηλαδή για κάθε συνάρτηση $\eta(t)$. Είναι διαισθητικά προφανές, αν και αργότερα θα το αποδείξουμε με απόλυτη αυστηρότητα, ότι η ποσότητα μέσα στην παρένθεση θα

[1] Όποτε αναφερόμαστε στο εξής σε συναρτήσεις θα υποθέτουμε ότι έχουν όλες τις καλές ιδιότητες (συνέχεια, παραγωγισιμότητα, κλπ.), που χρειαζόμαστε ώστε να στηρίξουμε το επιχείρημά μας. Σε αντίθετη περίπτωση, όταν δηλαδή θελήσουμε να ελέγξουμε παθολογικές καταστάσεις, θα είμαστε σαφείς στη διατύπωση μας.

πρέπει να είναι ταυτοτικά μηδέν: $m\ddot{x}_0 = -V'(x_0)$, που δεν είναι τίποτε άλλο από το νόμο του Νεύτωνα. Στο σημείο αυτό επιβεβαιώνουμε ότι η διαδρομή που καθιστά τη δράση στάσιμη είναι εκείνη που ακολουθεί το σωματίδιο υπακούοντας στο νόμο της δυναμικής του Νεύτωνα. Είναι εύλογο ότι η παραπάνω απόδειξη θα μπορούσε να λειτουργήσει και με αντίστροφη φορά (από το νόμου του Νεύτωνα προς την αρχή ελάχιστης δράσης. Στην κλασική θεώρηση λοιπόν, όπου το σωματίδιο έχει καθορισμένη θέση σε κάθε χρονική στιγμή και οι κινήσεις του ακολουθούν τη σχέση αίτιο - αιτιατό (κινητήρια δύναμη - καθορισμός τροχιάς), η αρχή ελάχιστης δράσης δεν είναι κάποιος τελεολογικός νόμος, απλώς απορρέει από το 2^o νόμο του Νεύτωνα, αφού αποδεικνύεται ισοδύναμη με αυτόν. Με άλλα λόγια, η εφαρμογή της αρχής ελάχιστης δράσης μεταξύ ενός αρχικού και ενός τελικού σημείου της τροχιάς, μπορεί να εστιαστεί και σε ένα απειροελάχιστο τμήμα της διαδρομής, οπότε η αναζήτηση ακροτάτου σε αυτή την περίπτωση σχετίζεται άμεσα με τη διαφορική αλλαγή της δυναμικής ενέργειας, δηλαδή τη δύναμη που λέει στο σωμάτιο πώς να κινηθεί.

Η κβαντομηχανική όμως περιγραφή ενός σωματίου δεν είναι αυτή της κλασικής μηχανικής. Το σωματίδιο παύει να είναι μια οντότητα με συγκεκριμένη θέση και ταχύτητα. Η καλύτερη δυνατή περιγραφή γι' αυτό δίνεται από την κυματοσυνάρτηση, μια μιγαδική συνάρτηση της οποίας το μέτρο στο τετράγωνο είναι η πιθανότητα ανίχνευσης του σωματιδίου στην εκάστοτε θέση. Μαθαίνει κανείς ότι η κυματοσυνάρτηση αυτή, όταν το σωματίδιο ακολουθήσει μια υποτιθέμενη διαδρομή στο χώρο και το χρόνο είναι ανάλογη της ποσότητας $e^{iS/\hbar}$, όπου S η δράση που αντιστοιχεί στη διαδρομή αυτή. (Στο σημείο αυτό υπάρχει πλήρης αναλογία με την κυματική περιγραφή του φωτός το οποίο μπορεί να περιγραφεί ως μια διαταραχή με μέγεθος ανάλογο της ποσότητας $e^{i\int d\phi}$ όπου φ η φάση του μετώπου κύματος καθώς αυτό ακολουθεί την καθορισμένη διαδρομή.) Η ποσότητα $e^{iS/\hbar}$ μπορεί να παρασταθεί στο μιγαδικό επίπεδο ως ένα διάνυσμα μοναδιαίου μήκους και στραμμένο κατά γωνία $S/\hbar$ ως προς τον άξονα των πραγματικών αριθμών. Όντας γραμμική θεωρία, η κβαντομηχανική, η κυματοσυνάρτηση του σωματιδίου θα είναι κάποιος γραμμικός συνδυασμός όλων των επί μέρους λύσεων. Δηλαδή

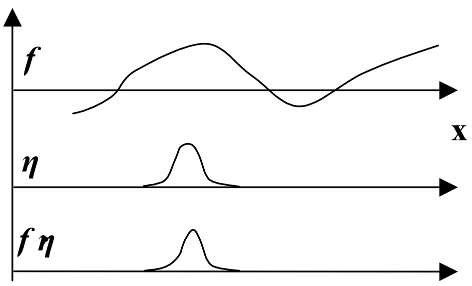
$$\Psi = \sum_j e^{iS_j/\hbar},$$



όπου j ο δείκτης που καθορίζει την κάθε διαδρομή. Όμως για διαδρομές για τις οποίες η δράση S αλλάζει πολύ γρήγορα, σε σχέση με την ποσότητα $\hbar$ (μην ξεχνάτε το τρομακτικά μικρό μέγεθος του $\hbar$, $1.054\text{x}10^{-34}$joule·s), αν αλλάξουμε λίγο τη διαδρομή, τα μιγαδικά διανύσματα προστιθέμενα κατασκευάζουν κύκλους (βλ. σχήμα) και το συνολικό τους άθροισμα είναι περίπου μηδενικό. Για τις διαδρομές, για τις οποίες η δράση καθίσταται ακρότατο (ας τις πούμε κλασικές διαδρομές) η γωνία μεταξύ των μιγαδικών διανυσμάτων από γειτονικές διαδρομές είναι αμελητέα και τα αντίστοιχα διανύσματα προστιθέμενα δίνουν ένα μη αμελητέο αποτέλεσμα, οπότε η πιθανότητα να παρατηρήσουμε ένα σωματίδιο προερχόμενο από την διαδρομή αυτή είναι σημαντική. Η κβαντομηχανική λοιπόν απάντηση στον αν η αρχή ελάχιστης δράσης είναι απλώς μια απόρροια του δυναμικού νόμου του

Νεύτωνα ή μια βαυύτερη αρχή που καθορίζει τις κινήσεις των σωμάτων είναι μάλλον το δεύτερο. Τα σώματα πράγματι απλώνονται σε όλο το χώρο και δοκιμάζουν κάθε απίθανη διαδρομή και όταν καταφθάνουν στο τελικό σημείο παρατήρησης απλώς συμβάλλουν με τον εαυτό τους άλλοτε ενισχυτικά (αν ακολούθησαν τις κλασικές διαδρομές) και άλλοτε καταστροφικά (αν ακολούθησαν τροχιές που θα έφερναν σε απελπισία τον Νεύτωνα). Πως μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ότι κάτι τέτοιο συμβαίνει; Έχουμε παρατηρήσει ότι τα υποατομικά σωματίδια αν και εγκλωβισμένα σε κάποιο πηγάδι δυναμικού που δεν τους επιτρέπει να ξεφύγουν, αυτά τα καταφέρνουν να δραπετεύουν, ακολουθώντας προφανώς απαγορευμένες διαδρομές.

Τέλος, πριν μάθουμε στη συνέχεια να λύνουμε προβλήματα λογισμού μεταβολών, θα αποδείξουμε τη μαθηματική πρόταση που παρουσιάστηκε προηγουμένως στο πρόβλημά μας. Δηλαδή αν ισχύει $\int_A^B f(x)\eta(x)dx = 0$ για οποιαδήποτε συνεχή και μη απειριζόμενη συνάρτηση $\eta(x)$, τότε η $f(x)$ πρέπει να είναι ταυτοτικά μηδέν.



Απόδειξη: Έστω κάποια περιοχή εντός του διαστήματος ΑΒ για την οποία $f(x) \neq 0$, στην οποία η συνάρτηση είναι είτε θετική είτε αρνητική. Ας επιλέξουμε ως συνάρτηση $\eta(x)$ μια συνάρτηση η οποία είναι παντού μηδέν, εκτός της περιοχής μη μηδενισμού της f, όπου και παίρνει συνεχείς θετικές τιμές (βλ. σχήμα). Τότε η συνάρτηση $f(x)\eta(x)$ είναι παντού ή μηδέν ή έχει το πρόσημο της f στο εν λόγω διάστημα, οπότε και το ολοκλήρωμα αυτής θα είναι καθαρά θετικός ή αρνητικός αριθμός. Άτοπο λοιπόν.

Ένας άλλος, γεωμετρικός τρόπος, να αντιληφθούμε την παραπάνω πρόταση είναι ο ακόλουθος. Το ολοκλήρωμα $\int_A^B f(x)\eta(x)dx = 0$ μπορούμε να το δούμε ως ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle f|\eta\rangle$ μεταξύ των δύο συναρτήσεων (έχει όλα τα χαρακτηριστικά ενός εσωτερικού γινομένου: (i) είναι μηδέν αν η μια από τις δύο συναρτήσεις είναι η μηδενική, (ii) το εσωτερικό γινόμενο μιας συνάρτησης με τον εαυτό της είναι θετικά ορισμένο και (iii) είναι γραμμικό ως προς την πρώτη ή τη δεύτερη συνάρτηση $\langle f|a\eta_1 + b\eta_2\rangle = a\langle f|\eta_1\rangle + b\langle f|\eta_2\rangle$). Για να είναι λοιπόν το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος-συνάρτηση f με οποιοδήποτε διάνυσμα-συνάρτηση η μηδέν δεν μπορεί παρά το πρώτο διάνυσμα να είναι μηδενικό. Μόνο ένα μηδενικό διάνυσμα μπορεί να είναι κάθετο σε κάθε άλλο διάνυσμα.

Την πρόταση αυτή θα χρησιμοποιήσουμε σε γενικά προβλήματα μεταβολών παρακάτω.