

Μηχανική II

Γεννήτορες στροφών

Ας υπολογίσουμε τώρα την παράγωγο $\frac{d\mathbf{R}(\vec{\theta})}{d\theta}$. Αυτή θα έχει στοιχεία:

$$\frac{d\mathbf{R}(\vec{\theta})}{d\theta} = \lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}(\theta + \delta\theta, \hat{n}) - \mathbf{R}(\theta, \hat{n})}{\delta\theta} = \lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}(\delta\theta, \hat{n})\mathbf{R}(\theta, \hat{n}) - \mathbf{R}(\theta, \hat{n})}{\delta\theta} =$$

$$\left[\lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}(\delta\theta, \hat{n}) - \mathbf{I}}{\delta\theta} \right] \mathbf{R}(\theta)$$

Επειδή όμως μία απειροστή στροφή $\mathbf{R}(\delta\theta, \hat{n})$ έχει στοιχεία:

$$R_{ij}(\delta\theta, \hat{n}) = \delta_{ij} + \varepsilon_{ikj} n_k (\delta\theta),$$

θα έχουμε $\lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{R_{ij}(\delta\theta, \hat{n}) - \delta_{ij}}{\delta\theta} = \varepsilon_{ikj} n_k$. Ορίζουμε λοιπόν την τριάδα των πινάκων:

$$\mathbf{S}_x = \varepsilon_{i1j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{S}_y = \varepsilon_{i2j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S}_z = \varepsilon_{i3j} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Τότε το $\varepsilon_{ikj} n_k = (\vec{\mathbf{S}} \cdot \hat{n})_j$ όπου με το εσωτερικό γινόμενο των πινάκων $\mathbf{S}_i$ με το μοναδιαίο διάνυσμα του άξονα περιστροφής $\hat{n}$ εννοούμε το άθροισμα: $\vec{\mathbf{S}} \cdot \hat{n} = \mathbf{S}_i \hat{n}_i$. Μια απειροστή στροφή τότε μπορεί να γραφεί ως:

$$\mathbf{R}(d\theta, \hat{n}) = \mathbf{I} + \vec{\mathbf{S}} \cdot \hat{n} d\theta,$$

και

$$\frac{d\mathbf{R}(\vec{\theta})}{d\theta} = (\vec{\mathbf{S}} \cdot \hat{n}) \mathbf{R}(\vec{\theta}). \quad (2)$$

Οι τρεις πίνακες $\mathbf{S}_i$ λέγονται γεννήτορες των στροφών αφού ο καθένας από αυτούς ευθύνεται για τη μεταβολή ενός διανύσματος όταν αυτό στραφεί κατά $d\theta$ γύρω από τον εκάστοτε άξονα.. Αρκεί η γνώση των γεννητόρων ενός μετασχηματισμού για το προσδιορισμό ολόκληρου το μετασχηματισμού αφού η συνεχής δράση με απειροστούς μετασχηματισμούς μπορεί να οικοδομήσει ένα πεπερασμένο μετασχηματισμό. Ισοδυνάμως επειδή η διαφορική εξίσωση (2) χαρακτηρίζει τον μετασχηματισμό, ο μετασχηματισμός ορίζεται πλήρως από τον γεννήτορά του και δίδεται από το ολοκλήρωμα της διαφορικής εξίσωσης (2), το οποίο θα κατασκευάσουμε στο επόμενο εδάφιο.

Άσκηση: Θεωρήστε τη μετάθεση ενός διανύσματος κατά a μονάδες μήκους στη κατεύθυνση $\hat{n}$: $\vec{r}' = \vec{r} + a\hat{n}$. Δείξτε ότι ο γεννήτορας αυτών των μεταθέσεων είναι ο $\hat{n} \cdot \vec{\nabla}$.

Κατασκευή του μετασχηματισμού της στροφής από τους γεννήτορές της

Για να κατασκευάσουμε τον πεπερασμένο μετασχηματισμό πρέπει να ολοκληρώσουμε την (2). Ειδικά εάν ο άξονας της στροφής παραμένει σταθερός η διαφορική εξίσωση (2) ολοκληρώνεται αμέσως και δίνει¹:

$$\mathbf{R}(\theta, \hat{n}) = \exp(\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{n} \theta). \quad (3)$$

Άσκηση: Αποδείξτε ότι η έκφραση των στροφών (3) είναι η ίδια με την έκφραση (1) που συναγάγαμε γεωμετρικά.

Οι γεννήτορες των στροφών δεν είναι μεταθετοί μεταξύ των και ικανοποιούν την ακόλουθη σχέση:

$$[\mathbf{S}_i, \mathbf{S}_j] = \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j - \mathbf{S}_j \mathbf{S}_i = \varepsilon_{ijk} \mathbf{S}_k.$$

Άσκηση: Υπολογίστε το άθροισμα $\mathbf{S}_i \mathbf{S}_i$.

Η σχέση (2) μπορεί ισοδυνάμως να γραφεί και ως:

$$\frac{d\mathbf{R}(\vec{\theta})}{dt} = (\vec{\mathbf{S}} \cdot \vec{\Omega}) \mathbf{R}(\vec{\theta}) \quad (4)$$

όπου $\vec{\Omega} = \frac{d\theta}{dt} \hat{n}$ η στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα της περιστροφής. Εάν η γωνιακή ταχύτητα έχει μεταβαλλόμενη διεύθυνση τότε η συνολική στροφή του διανύσματος θα είναι η σύνθεση των στροφών που εκτελέστηκαν στα ενδιάμεσα χρονικά διαστήματα με τη σωστή χρονολογική σειρά που εκτελέστηκαν αυτές και έτσι μπορεί να γραφεί ως

$$\mathbf{R}(t) = \prod_k \mathbf{R}(t, t_{k-1}) \mathbf{R}(t_{k-2}, t_{k-3}) \cdots \mathbf{R}(t_1, 0)$$

όπου $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = t$ μια αυθαίρετη διαίρεσις του χρονικού διαστήματος $[0, t]$ σε k υποδιαστήματα. Εάν ο αριθμός των υποδιαίρεσεων του χρονικού διαστήματος $[0, t]$ αυξηθεί έτσι ώστε $\lim_{k \rightarrow \infty} (t_{i+1} - t_i) = 0$ τότε η ολική στροφή μπορεί να θεωρηθεί ως γινόμενο των διαφορικών στροφών $\mathbf{R}(t_{k+1}, t_k) = \exp(\vec{\mathbf{S}} \cdot \vec{\Omega}(t_k)(t_{k+1} - t_k))$. Εάν επιλέξουμε να διαιρέσουμε το συνολικό χρόνο t σε ίσα χρονικά διαστήματα δt έτσι ώστε $k\delta t = t$, και $t_0 = 0, \dots, t_k = t$ η συνολική στροφή θα δίνεται από το γινόμενο:

$$\mathbf{R}(t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \prod_k \exp(\vec{\mathbf{S}} \cdot \vec{\Omega}(t_{k-1})\delta t) \cdots \exp(\vec{\mathbf{S}} \cdot \vec{\Omega}(t_0)\delta t) \quad (5)$$

¹Η έκφραση e^{At} , όπου A ένας πίνακας ορίζεται ως $e^{At} = I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + A^3 \frac{t^3}{3!} + \cdots$, και

είναι εύκολο να επιβεβαιώσετε ότι ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση $\frac{d(e^{At})}{dt} = Ae^{At}$.

Ο υπολογισμός του παραπάνω γινομένου είναι δυσχερής. Συνήθως ο υπολογισμός αυτός γίνεται αριθμητικά. Η σειρά όμως με την οποία θα γίνουν οι διαδοχικές στροφές πρέπει να διατηρηθεί *αυστηρά* στον υπολογισμό της συνολικής στροφής διότι οι γεννήτορες $\mathbf{S}_i$ δεν μετατίθενται: $\mathbf{S}_i \mathbf{S}_j \neq \mathbf{S}_j \mathbf{S}_i$. Αυτό πηγάζει από την ιδιότητα ότι όταν δύο πίνακες A, B δεν μετατίθενται τότε $e^{At} e^{Bt} \neq e^{(A+B)t}$, οπότε η σειρά του πολλαπλασιασμού έχει σημασία. Για αυτό εάν $[\vec{\mathbf{S}} \cdot \vec{\Omega}(t_i), \vec{\mathbf{S}} \cdot \vec{\Omega}(t_j)] \neq 0$, πράγμα το οποίο συμβαίνει όταν οι γωνιακές ταχύτητες αλλάζουν διεύθυνση με το χρόνο, η έκφραση (5) δεν είναι ίση με την $\exp\left(\int_0^t \vec{\mathbf{S}} \cdot \vec{\Omega}(s) ds\right)$. Εξαίρεση βεβαίως αποτελεί η περίπτωση κατά την οποία η περιστροφή γίνεται περί σταθερό άξονα $\hat{n}$ οπότε τότε πράγματι

$$\mathbf{R}(t) = \exp\left(\int_0^t \vec{\mathbf{S}} \cdot \vec{\Omega}(s) ds\right) = \exp\left(\vec{\mathbf{S}} \cdot \hat{n} \int_0^t \Omega(s) ds\right).$$

Η έκφραση (5) της συνολικής στροφής μπορεί να γραφεί όμως ως

$$\mathbf{R}(t) = \mathfrak{Z}\left[\exp\left(\int_0^t \vec{\mathbf{S}} \cdot \vec{\Omega}(s) ds\right)\right] \quad (6)$$

όπου το $\mathfrak{Z}$ είναι το σύμβολο της χρονολογικής διάταξης, δηλαδή χρησιμοποιείται η σύμβαση ότι στο ανάπτυγμα της εκθετικής συνάρτησης οι παράγοντες οποιουδήποτε γινομένου πινάκων διατάσσονται σε χρονολογική σειρά. Π.χ. εάν $t_1 < t_2$ $\mathfrak{Z}[\vec{\mathbf{S}} \cdot \vec{\Omega}(t_2) \vec{\mathbf{S}} \cdot \vec{\Omega}(t_1) \vec{\mathbf{S}} \cdot \vec{\Omega}(t_2)] = [\vec{\mathbf{S}} \cdot \vec{\Omega}(t_2)] \vec{\mathbf{S}} \cdot \vec{\Omega}(t_1)$. Ομοίως, όταν έχουμε μεγαλύτερο αριθμό παραγόντων. Βεβαίως, πρακτικά για να υπολογίσουμε την έκφραση (6) πρέπει να διαιρέσουμε το χρονικό διάστημα σε μικρά υποδιαστήματα.

Ισοδυνάμως η συνολική στροφή του διανύσματος μπορεί να βρεθεί με σύνθεση απειροστών στροφών. Η στοιχειώδης μετατόπιση $d\vec{r}$ από μία απειροστή στροφή είναι:

$$d\vec{r} = (d\theta)(\hat{n} \cdot \vec{\mathbf{S}}) \vec{r} = (\vec{\Omega}(t) \cdot \vec{\mathbf{S}}) \vec{r} dt,$$

όπου η στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα ορίζεται από τη σχέση: $\hat{n} d\theta = \vec{\Omega}(t) dt$. Έτσι το τελικό διάνυσμα θα δίνεται από τη ολοκληρωτική εξίσωση:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \int d\vec{r} = \vec{r}(0) + \mathfrak{Z} \int dt (\vec{\Omega}(t) \cdot \vec{\mathbf{S}}) \vec{r}(t).$$

Το σύμβολο $\mathfrak{Z}$ έχει γραφεί και πάλι για να μας θυμίζει ότι κατά την ολοκλήρωση η δράση των τελεστών $\vec{\Omega}(t) \cdot \vec{\mathbf{S}}$ γίνεται με χρονολογική σειρά, πάντα δηλαδή δρα πρώτα ο προγενέστερος χρονολογικά τελεστής και μετά ο μεταγενέστερος. Ο υπολογισμός του παραπάνω ολοκληρώματος είναι από πρακτικής άποψης εν γένει δύσκολος, ακριβώς εξαιτίας αυτής της χρονολογικής τάξης που πρέπει να τηρηθεί και η οποία οφείλεται στην ιδιαιτερότητα των στροφών.

Η δυσκολία αυτή συναντάται συχνότατα σε προβλήματα κβαντομηχανικής καθώς και σε προβλήματα εξέλιξης των διαταραχών σε χρονοεξαρτώμενες ροές, όπως αυτές που συναντώνται στις ατμόσφαιρες των ουρανίων σωμάτων, όπου η μη μεταθετικότητα των τελεστών είναι γενικό φαινόμενο. Ειδικά οι πίνακες $\mathbf{S}$ που γράψαμε νωρίτερα βρίσκονται σε πλήρη αντιστοιχία με τους πίνακες του Pauli που περιγράφουν την κβαντομηχανική συμπεριφορά του σπιν των ηλεκτρονίων.