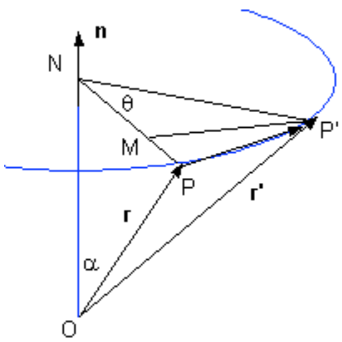
Τμήμα Π. Ιωάννου &
Θ. Αποστολάτου
27/3/2000

Μηχανική ΙΙ

Πεπερασμένες στροφές

Ας εξετάσουμε στη συνέχεια πως μπορούμε να γράψουμε τη δράση μιας *μη* απειροστής στροφής γύρω από κάποιον άξονα $\hat{n}$. Στρέφουμε το διάνυσμα $\vec{r}$ κατά γωνία θ περί τον άξονα ON που χαρακτηρίζεται από το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{n}$. Τότε η νέα θέση του διανύσματος $\vec{r}\,'$ είναι:



$$\vec{r}\,' = \vec{r} + \Delta\vec{r} = O\vec{P}' = O\vec{N} + N\vec{M} + M\vec{P}' =$$
$$(\vec{r}\cdot\hat{n})\hat{n} + \left[\vec{r} - (\vec{r}\cdot\hat{n})\hat{n}\right]\cos\theta + \left[\hat{n}\times\vec{r}\right]\sin\theta\,.$$

(Προσέξτε ότι τα διανύσματα $N\vec{P} = \left[\vec{r} - (\vec{r}\cdot\hat{n})\hat{n}\right]$ και $\left[\hat{n}\times\vec{r}\right]$ έχουν το ίδιο μέτρο —πρόκειται για την ακτίνα περιστροφής του άκρου του διανύσματος $\vec{r}$— αλλά κάθετες μεταξύ τους κατευθύνσεις.) Αλλάζοντας λίγο τη σειρά των όρων, μπορούμε να γράψουμε το τελικό στραμμένο διάνυσμα στη μορφή:

$$\vec{r}\,' = \vec{r}\cos\theta + \hat{n}(\hat{n}\cdot\vec{r})(1-\cos\theta) + (\hat{n}\times\vec{r})\sin\theta\,.$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση αυτή για απειροστές γωνίες, δηλαδή κρατώντας όρους πρώτης τάξης ως προς τη γωνία, $\cos(d\theta)\cong 1$ και $\sin(d\theta)\cong d\theta$, επιστρέφουμε στην προηγούμενη σχέση που γράψαμε για απειροστές στροφές.

Άσκηση: Δείξτε ότι πράγματι: $|\vec{r}\,'|^2 = |\vec{r}|^2$.

Η στροφή γύρω από κάποιον άξονα είναι όπως βλέπει κανείς γραμμική ως προς το διάνυσμα $\vec{r}$, επομένως μπορεί να γραφεί ως ένας πίνακας που δρα πάνω σε διανύσματα. Η μορφή του πίνακα αυτού μπορεί να βρεθεί απλά ως ακολούθως:

$$r_i' = r_i\cos\theta + n_i(n_j r_j)(1-\cos\theta) + \varepsilon_{ikj}n_k r_j\sin\theta = R_{ij}(\vec{\theta})r_j\,,$$

όπου

$$R_{ij}(\vec{\theta}) = \delta_{ij}\cos\theta + n_i n_j(1-\cos\theta) + \varepsilon_{ikj}n_k\sin\theta\,, \quad (1)$$

και $\vec{\theta}$ συμβολίζει το $\vec{\theta} = \theta\hat{n}$ (το οποίο καταχρηστικά συμβολίζεται ως διάνυσμα αφού όπως θα δούμε αμέσως παρακάτω οι στροφές δεν λειτουργούν ως διανύσματα). Μια στροφή λοιπόν προσδιορίζεται από το πίνακα $\mathbf{R}(\vec{\theta})$.

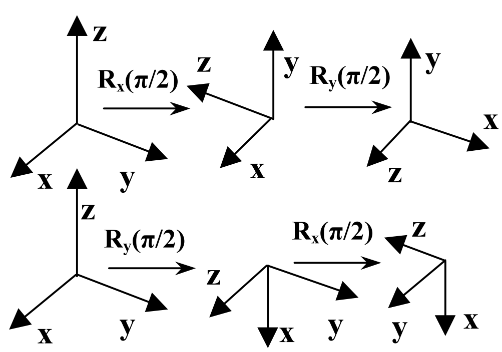
Άσκηση: Αποδείξτε ότι η ορίζουσα του πίνακα στροφής είναι 1.

Το σύνολο των στροφών σχηματίζει ομάδα

Εάν μια στροφή $\mathbf{R}(\vec{\theta}_1)$ τη διαδεχθεί μια άλλη στροφή ως προς γενικά έναν άλλο άξονα, $\mathbf{R}(\vec{\theta}_2)$, τότε ο συνολικός μετασχηματισμός θα είναι το γινόμενο των πινάκων $\mathbf{R}(\vec{\theta}_2)\mathbf{R}(\vec{\theta}_1)$. Δεν είναι προφανές τι θα είναι αυτός ο μετασχηματισμός αλλά μπορεί να αποδειχθεί ότι το γινόμενο δύο στροφών είναι και πάλι στροφή, δηλαδή υπάρχει πάντοτε $\vec{\theta}$ έτσι ώστε $\mathbf{R}(\vec{\theta}) = \mathbf{R}(\vec{\theta}_2)\mathbf{R}(\theta_1)$, δηλαδή το σύνολο των στροφών είναι κλειστό στην πράξη της σύνθεσης ή ισοδυνάμως στην πράξη πολλαπλασιασμού των αντιστοίχων πινάκων των. Επειδή οι στροφές αφήνουν αναλλοίωτο το μέτρο των διανυσμάτων ο πίνακας της στροφής είναι *ορθογώνιος*[1] δηλαδή το γινόμενο του πίνακα μιας στροφής επί τον ανάστροφό του πίνακα δίνει τον ταυτοτικό μετασχηματισμό που δίνεται από τον μοναδιαίο πίνακα, $\mathbf{I}$, δηλαδή ισχύει ότι $\mathbf{R}(\vec{\theta})\mathbf{R}^{\mathrm{T}}(\vec{\theta}) = \mathbf{I}$. Επειδή όμως το γινόμενο δύο στροφών κατά γωνία θ και κατά γωνία $-\theta$ αντίστοιχα παράγει τον ταυτοτικό μετασχηματισμό, δηλαδή $\mathbf{R}(-\vec{\theta})\mathbf{R}(\vec{\theta}) = \mathbf{I}$, ο αντίστροφος πίνακας μιας στροφής $\mathbf{R}^{-1}(\vec{\theta})$ είναι και αυτός μία στροφή και συγκεκριμένα η στροφή κατά την αντίθετη γωνία δηλαδή $\mathbf{R}^{-1}(\vec{\theta}) = \mathbf{R}(-\vec{\theta})$. Ισχύει λοιπόν ότι οι πίνακες των στροφών έχουν αντίστροφους οι οποίοι είναι και αυτοί στροφές. Το σύνολο των στροφών σχηματίζει δηλαδή μια ομάδα, την επονομαζόμενη ομάδα *SO*(3) (το *O* δηλώνει τον ορθογώνιο χαρακτήρα των στροφών που διατηρεί αναλλοίωτο το μέτρο των διανυσμάτων και το *S (special)* το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό των πινάκων των στροφών ότι έχουν ορίζουσα +1, τέλος το 3 αναφέρεται στη διάσταση του χώρου στον οποίο ενεργούν οι στροφές.).

Μη μεταθετικότητα των στροφών

Το ιδιαίτερο και εντυπωσιακό χαρακτηριστικό των στροφών όμως είναι ότι δύο στροφές που γίνονται γύρω από διαφορετικούς άξονες δεν καταλήγουν στο ίδιο αποτέλεσμα αν εναλλαχθεί η σειρά με την οποία θα γίνουν αυτές. Οπότε οι στροφές δεν λειτουργούν ως διανύσματα. Οι στροφές δηλαδή *δεν μετατίθενται*, όπως λέγεται στη γλώσσα των μαθηματικών, με άλλα λόγια αν $\mathbf{R}(\vec{\theta}_1)$ και $\mathbf{R}(\vec{\theta}_2)$ είναι δύο στροφές γύρω από διαφορετικούς άξονες τότε $\mathbf{R}(\vec{\theta}_1)\mathbf{R}(\vec{\theta}_2) \neq \mathbf{R}(\vec{\theta}_2)\mathbf{R}(\vec{\theta}_1)$ ή ο *μεταθέτης* δύο στροφών δεν είναι μηδενικός:



$$\left[\mathbf{R}(\vec{\theta}_2),\mathbf{R}(\vec{\theta}_1)\right] \equiv \mathbf{R}(\vec{\theta}_2)\mathbf{R}(\vec{\theta}_1) - \mathbf{R}(\vec{\theta}_1)\mathbf{R}(\vec{\theta}_2) \neq 0 .$$

Επομένως όταν συνθέτουμε στροφές πρέπει να προσέχουμε τη χρονολογική σειρά που αυτές διενεργούνται.

---

[1] Ισχύει και το αντίστροφο: όλοι οι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί που έχουν ορίζουσα 1 είναι στροφές. Οι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί γενικά έχουν ορίζουσα ± 1.

Για να πειστείτε για τη μη μεταθικότητα των στροφών αρκεί να θεωρήσετε το παράδειγμα του σχήματος στο οποίο σχεδιάζεται η δράση της στροφής περί τον άξονα x κατά γωνία $\pi/2$, $\mathbf{R}_x(\pi/2)$, και της στροφής περί τον άξονα y κατά γωνία $\pi/2$, $\mathbf{R}_y(\pi/2)$, επί των μοναδιαίων διανυσμάτων ενός καρτεσιανού συστήματος αναφοράς. Η δράση της σύνθεσης $\mathbf{R}_x(\pi/2)\,\mathbf{R}_y(\pi/2)$ φαίνεται στο πάνω σχήμα, ενώ της σύνθεσης $\mathbf{R}_y(\pi/2)\,\mathbf{R}_x(\pi/2)$ στο κάτω. Εμφανώς το αποτέλεσμα της σύνθετης στροφής εξαρτάται από τη σειρά που ακολουθήθηκε. Το γεγονός αυτό θα φανεί καλύτερα στην παράγραφο που ακολουθεί και εμβαθύνει περισσότερο στη δομή των στροφών.

Παρ' όλα αυτά οι στροφές που διενεργούνται περί ενός κοινού άξονα μετατίθενται. Σε αυτή την περίπτωση δύο διαδοχικές στροφές κατά γωνίες θ_1 και θ_2 αντίστοιχα είναι ισοδύναμες με μία στροφή κατά $\theta_1 + \theta_2$ όπως θα περίμενε κανείς, *εφόσον* γίνονται γύρω από τον ίδιο άξονα. [Δείξτε το, εκμεταλλευόμενοι τις ιδιότητες που γνωρίζετε για το γινόμενο των δύο αντισυμμετρικών τανυστών ε_{ijk}.]