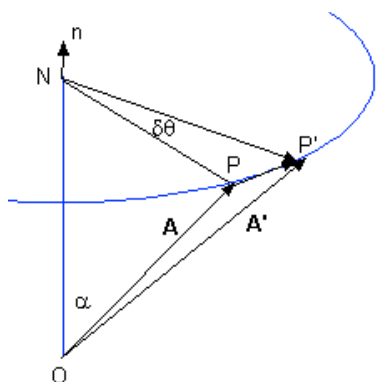


Μηχανική II

Στροφές

Μικρή γωνιακή μετάθεση διανύσματος - απειροστή στροφή διανύσματος



Περιστρέφουμε το διάνυσμα $\vec{A} = O\vec{P}$ κατά μια μικρή γωνία $\delta\theta$ (με δεξιόστροφη φορά) περί τον άξονα ON . Το διάνυσμα μετασχηματίζεται στο διάνυσμα $\vec{A}' = O\vec{P}'$, το οποίο έχει το ίδιο μέτρο με το αρχικό. Κατά τη στροφή, το άκρο του διανύσματος $\vec{A}$, P , κινείται στην περιφέρεια του κύκλου με κέντρο την προβολή N του άκρου του διανύσματος $\vec{A}$ στον άξονα περιστροφής και ακτίνα $NP = |\vec{A}| \sin \alpha$. Η μετατόπιση του διανύσματος $\delta\vec{A}$ δίδεται από το διάνυσμα $\vec{PP}'$ το

οποίο έχει μέτρο κατά προσέγγιση ίση με $PP' = |\vec{A}| \sin \alpha \delta\theta + O(\delta\theta^2)$ και διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο που σχηματίζει το αρχικό διάνυσμα $\vec{A}$ με το $\hat{n}$ (το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση του άξονα περιστροφής). Η μετατόπιση είναι δηλαδή, σε πρώτη προσέγγιση, $\delta\vec{A} = (\delta\theta) \hat{n} \times \vec{A}$. Επομένως σε μία απειροστή στροφή $\delta\theta$ περί τον άξονα $\hat{n}$ το διάνυσμα $\vec{A}$ μετασχηματίζεται στο

$$\vec{A}' = \vec{A} + (\delta\theta) \hat{n} \times \vec{A}.$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει μόνο για μικρές γωνιακές μετατοπίσεις και δεν μπορεί να γενικευτεί άμεσα για πεπερασμένες γωνίες, δηλαδή **δεν ισχύει** ότι $\vec{A}' = \vec{A} + \theta(\hat{n} \times \vec{A})$. [Υπόδειξη: το $\vec{A}'$ δεν θα είχε τότε το ίδιο μέτρο με το $\vec{A}$.]

Οι απειροστές στροφές προσδιορίζονται πλήρως από το διάνυσμα $\delta\vec{n} = \hat{n} \delta\theta$. Αν λοιπόν στρέψουμε το διάνυσμα $\vec{A}$ κατά $\delta\vec{n}_1$ θα έχουμε το διάνυσμα $\vec{A} + \delta\vec{n}_1 \times \vec{A}$ και εάν στη συνέχεια το στρέψουμε κατά $\delta\vec{n}_2$ το διάνυσμα θα μετασχηματισθεί στο

$$\vec{A}' = \vec{A} + \delta\vec{n}_1 \times \vec{A} + \delta\vec{n}_2 \times (\vec{A} + \delta\vec{n}_1 \times \vec{A})$$

και κρατώντας όρους πρώτης τάξης ως προς τις μικρές ποσότητες δ η συνολική μετατόπιση του διανύσματος θα είναι

$$\delta\vec{A} = (\delta\vec{n}_1 + \delta\vec{n}_2) \times \vec{A},$$

η οποία είναι ανεξάρτητη από τη σειρά που έγιναν οι απειροστές στροφές. Συνεπώς η μετατόπιση ενός διανύσματος στο οποίο διενεργούνται διαδοχικά δύο απειροστές στροφές $\delta\vec{n}_1$, $\delta\vec{n}_2$ είναι ίση με τη μετατόπιση την οποία επιφέρει η συνισταμένη απειροστή στροφή $\delta\vec{n}_1 + \delta\vec{n}_2$ και είναι ανεξάρτητη από τη σειρά που έγιναν οι στροφές. Το συμπέρασμα αυτό είναι απόρροια του γεγονότος ότι οι απειροστές

στροφές είναι διανύσματα. Το αποτέλεσμα αυτό **δεν ισχύει** για πεπερασμένες στροφές οι οποίες **δεν είναι** διανύσματα.

Άσκηση: Απειροστές στροφές $d\theta$ διενεργούνται διαδοχικά σε ένα κύβο περί τις τρεις διαγώνιες, των τριών εδρών μιας κορυφής του κύβου, οι οποίες συγκλίνουν στην κορυφή αυτή. Ποια η μετατόπιση της απέναντι κορυφής. Ως προς ποιο άξονα στρέφεται συνολικά ο κύβος ;

Επειδή τα διανύσματα ορίσθηκαν ως τριάδες αριθμών που μετασχηματίζονται στις στροφές όπως οι μετατοπίσεις διανυσμάτων θέσης, ο μετασχηματισμός στις στροφές που βρήκαμε ισχύει για όλα τα διανύσματα, άρα και για τα διανύσματα ταχύτητας, επιτάχυνσης κλπ.

Γωνιακή ταχύτητα

Εάν η μετατόπιση του διανύσματος $\vec{A}$ συντελεσθεί σε χρονικό διάστημα dt τότε ο ρυθμός μεταβολής του διανύσματος είναι :

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{A}' - \vec{A}}{\delta t} = \frac{d\theta}{dt} \hat{n} \times \vec{A} = \vec{\Omega} \times \vec{A}$$

όπου $\vec{\Omega} \equiv \hat{n} \frac{d\theta}{dt}$ είναι το διάνυσμα με μέτρο τη γωνιακή ταχύτητα και διεύθυνση το μοναδιαίο διάνυσμα του άξονα στροφής. Η παραπάνω σχέση για το ρυθμό μεταβολής ενός διανύσματος μας επιτρέπει να θεωρούμε τη γωνιακή ταχύτητα $\vec{\Omega} \equiv \hat{n} \frac{d\theta}{dt}$ ως ένα διάνυσμα.

Αντιστρόφως, εάν ο ρυθμός μεταβολής ενός διανύσματος είναι $\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{A}$, με $\vec{\Omega}$ σταθερό διάνυσμα, τότε το διάνυσμα $\vec{A}$ περιστρέφεται περί τον άξονα $\vec{\Omega}$ με γωνιακή ταχύτητα $|\vec{\Omega}|$. Διότι επειδή $\frac{d\vec{A}}{dt} \cdot \vec{A} = 0$ το $|\vec{A}|^2$ είναι σταθερό και το άκρο του $\vec{A}$ κινείται πάνω σε μια σφαίρα σταθερής ακτίνας, και επειδή $\frac{d\vec{A}}{dt} \cdot \vec{\Omega} = 0$ το $\vec{A} \cdot \vec{\Omega}$ είναι σταθερό και επομένως το άκρο του $\vec{A}$ κινείται πάνω σε ένα επίπεδο κάθετο στο $\vec{\Omega}$. Συνεπώς το άκρο του $\vec{A}$ διαγράφει κυκλική τροχιά ακτίνας $r = \frac{|\vec{A} \times \vec{\Omega}|}{|\vec{\Omega}|}$. Επειδή δε

$$\frac{d\vec{A}}{dt} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} = (\vec{\Omega} \times \vec{A}) \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{A}) = r^2 \Omega^2$$

η ταχύτητα περιστροφής του διανύσματος είναι σταθερή.

Άσκηση: Ποια η οδογράφος (η καμπύλη που διαγράφει το άκρο του βέλους της ταχύτητας κρατώντας την αρχή αυτού σταθερή) ενός φορτισμένου σωματίου όταν αυτό κινείται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο;

Περιστρεφόμενα συστήματα αναφοράς

Θέλουμε να συγκρίνουμε το ρυθμό μεταβολής κάποιου διανύσματος $\vec{A}(t)$ σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς και σε ένα καρτεσιανό σύστημα αναφοράς που περιστρέφεται ως προς το αδρανειακό με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\Omega}$. Έστω $\hat{e}_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$) τα ορθογώνια μοναδιαία διανύσματα του περιστρεφόμενου συστήματος αναφοράς. Το διάνυσμα $\vec{A}$ γράφεται με την αθροιστική σύμβαση $\vec{A} = \hat{e}_\alpha A_\alpha$ όπου A_α η προβολή του διανύσματος $\vec{A}$ στο α -μοναδιαίο διάνυσμα. Παρατηρητής του περιστρεφόμενου συστήματος υπολογίζει το ρυθμό μεταβολής του διανύσματος: $\left[\frac{d\vec{A}}{dt} \right]_\Pi = \hat{e}_\alpha \frac{dA_\alpha}{dt}$, επειδή για αυτόν τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{e}_\alpha$ είναι σταθερά. Ο παρατηρητής όμως του αδρανειακού συστήματος υπολογίζει τον εξής ρυθμό μεταβολής:

$$\left[\frac{d\vec{A}}{dt} \right]_A = \hat{e}_\alpha \frac{dA_\alpha}{dt} + \frac{d\hat{e}_\alpha}{dt} A_\alpha = \hat{e}_\alpha \frac{dA_\alpha}{dt} + (\vec{\Omega} \times \hat{e}_\alpha A_\alpha) = \hat{e}_\alpha \frac{dA_\alpha}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{A},$$

επειδή ως προς αυτόν

$$\frac{d\hat{e}_\alpha}{dt} = \vec{\Omega} \times \hat{e}_\alpha.$$

Συνεπώς οι δύο ρυθμοί σχετίζονται ως εξής:

$$\left[\frac{d\vec{A}}{dt} \right]_A = \left[\frac{d\vec{A}}{dt} \right]_\Pi + \vec{\Omega} \times \vec{A}.$$

Η σχέση αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εκφράσουμε τις ταχύτητες και επιταχύνσεις που υπολογίζει ένας παρατηρητής σε ένα περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς όπως αυτό της Γης (με αρχή το κέντρο της Γης που περιστρέφεται με τη γωνιακή ταχύτητα $\vec{\Omega}$ της Γης) με τις ταχύτητες και επιταχύνσεις ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς όπως αυτό που έχει αρχή το κέντρο της Γης και είναι ακλόνητο ως προς τους μακρινούς αστέρες. Εάν ο παρατηρητής στη Γη υπολογίζει ότι κάποιο σωματίδιο που βρίσκεται στη θέση $\vec{r}$ έχει ταχύτητα $\vec{v}_\Gamma$, ο αδρανειακός παρατηρητής θα πρέπει να μετρήσει ταχύτητα

$$\vec{v}_A = \vec{v}_\Gamma + \vec{\Omega} \times \vec{r}. \quad (1)$$

Για τον υπολογισμό της επιτάχυνσης που εκτιμούν οι δύο παρατηρητές χρειάζεται λίγο περισσότερη προσοχή. Η επιτάχυνση που εκτιμά ο αδρανειακός παρατηρητής

είναι $\left[\frac{d\vec{v}_A}{dt} \right]_A$ ενώ η επιτάχυνση που εκτιμά ο παρατηρητής στη Γη είναι $\left[\frac{d\vec{v}_A}{dt} \right]_\Gamma$. Η

σχέση μεταξύ των δύο ποσοτήτων δεν είναι άμεση. Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d\vec{v}_A}{dt} \right]_A &= \left[\frac{d\vec{v}_A}{dt} \right]_\Gamma + \vec{\Omega} \times \vec{v}_A = \left[\frac{d(\vec{v}_\Gamma + \vec{\Omega} \times \vec{r})}{dt} \right]_\Gamma + \vec{\Omega} \times (\vec{v}_\Gamma + \vec{\Omega} \times \vec{r}) = \\ &= \left[\frac{d\vec{v}_\Gamma}{dt} \right]_\Gamma + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_\Gamma + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \end{aligned}$$

εφόσον η γωνιακή ταχύτητα της Γης μπορεί να θεωρηθεί σταθερή (τουλάχιστον για φαινόμενα που έχουν χαρακτηριστικό χρόνο μεταβολής μικρότερο από έναν αιώνα).

Άσκηση: Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης που περιγράφουν την κίνηση σε ένα περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς.

Επειδή όμως οι εξισώσεις Euler-Lagrange είναι αναλλοίωτες στους σημειακούς μετασχηματισμούς μπορούμε να καταλήξουμε στις δυναμικές εξισώσεις της κίνησης κατευθείαν γράφοντας τη Λαγκρανζιανή που διέπει την κίνηση στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς. Η Λαγκρανζιανή ενός σωματιδίου στο περιστρεφόμενο σύστημα είναι:

$$L = \frac{m}{2} |\vec{v}_\Gamma + \vec{\Omega} \times \vec{r}|^2 - V(\vec{r}) = \frac{m}{2} \left(|\vec{v}_\Gamma|^2 + 2\vec{v}_\Gamma \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + |\vec{\Omega} \times \vec{r}|^2 \right) - V(\vec{r}).$$

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange απαιτούν τον υπολογισμό της γενικευμένης ορμής $\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_\Gamma}$ και της γενικευμένης δύναμης $\frac{\partial L}{\partial \vec{r}}$. Προς τούτο υπολογίζουμε το τέλει διαφορικό dL :

$$\begin{aligned} dL &= m\vec{v}_\Gamma \cdot d\vec{v}_\Gamma + m d\vec{v}_\Gamma \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + m\vec{v}_\Gamma \cdot (\vec{\Omega} \times d\vec{r}) + m(\vec{\Omega} \times \vec{r}) \cdot (\vec{\Omega} \times d\vec{r}) - (\vec{\nabla} V) \cdot d\vec{r} = \\ &= m\vec{v}_\Gamma \cdot d\vec{v}_\Gamma + m(\vec{\Omega} \times \vec{r}) \cdot d\vec{v}_\Gamma - m(\vec{\Omega} \times \vec{v}_\Gamma) \cdot d\vec{r} - m(\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})) \cdot d\vec{r} - (\vec{\nabla} V) \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

έχοντας κάνει χρήση της ταυτότητας $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$. Συνεπώς:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_\Gamma} = m\vec{v}_\Gamma + m\vec{\Omega} \times \vec{r},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = -m\vec{\Omega} \times \vec{v}_\Gamma - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) - \vec{\nabla} V,$$

οπότε οι εξισώσεις κίνησης είναι:

$$m \frac{d\vec{v}_\Gamma}{dt} + 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}_\Gamma + m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = -\vec{\nabla} V.$$