

Το πηλίκο Rayleigh

Ο Rayleigh το 1873 τη εποχή που ερευνούσε τις ιδιότητες των ηχητικών κυμάτων ανέκλυψε μία ιδιότητα των χαρακτηριστικών συχνοτήτων και ταλαντώσεων που έχει ιδιαίτερη σημασία. Απέδειξε ότι το πηλίκο

$$\rho(q) = \frac{q^T \mathbf{K} q}{q^T \mathbf{M} q}, \quad (1)$$

γίνεται στάσιμο όταν οι συντεταγμένες q αντιστοιχούν στους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης και οι στάσιμες τιμές του πηλίκου αυτού, που ονομάζεται πηλίκο Rayleigh, είναι τα τετράγωνα των χαρακτηριστικών συχνοτήτων του συστήματος.

Απόδειξη: Αρκεί να αποδείξουμε ότι το πηλίκο Rayleigh καθίσταται στάσιμο για τα ανύσματα q που είναι γενικευμένα ιδιοανύσματα των πινάκων $\mathbf{K}$ και $\mathbf{M}$, που ικανοποιούν δηλαδή τη σχέση: $\mathbf{K}q = \lambda \mathbf{M}q$. Αν είναι αληθές αυτό οι ιδιοτιμές λ είναι τα τετράγωνα των χαρακτηριστικών συχνοτήτων και τα ιδιοδιανύσματα q οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης του συστήματος.

Οι στάσιμες τιμές του πηλίκου $\rho(q)$ και τα q που καθιστούν το πηλίκο Rayleigh στάσιμο προσδιορίζονται από τις συνθήκες $\partial \rho / \partial q_i = 0$ για $i = 1, \dots, n$. Από την (1) έχουμε, κάνοντας χρήση της συμμετρικότητας των πινάκων $\mathbf{K}$ και $\mathbf{M}$, ότι:

$$\frac{\partial \rho}{\partial q_i} = \frac{1}{q^T \mathbf{M} q} (K_{ij} q_j - \rho(q) M_{ij} q_j) = 0, \quad (2)$$

συνεπώς το πηλίκο Rayleigh καθίσταται στάσιμο για τα q που ικανοποιούν τη σχέση:

$$\mathbf{K}q = \rho(q) \mathbf{M}q, \quad (3)$$

που σημαίνει ότι οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης καθιστούν στάσιμο το πηλίκο Rayleigh και οι χαρακτηριστικές συχνότητες δίδονται από τις στάσιμες τιμές του πηλίκου αυτού.

Η ιδιότητα αυτή του πηλίκου Rayleigh, η οποία ονομάζεται και αρχή Rayleigh-Ritz, έχει πολλές εφαρμογές στον προσεγγιστικό προσδιορισμό των χαρακτηριστικών συχνοτήτων σύνθετων φυσικών συστημάτων όπως λ.χ. ο προσδιορισμός των χαρακτηριστικών συχνοτήτων ταλαντώσεων του Ήλιου ή της Γης. Σύμφωνα με την παραπάνω ιδιότητα εάν κάνουμε λάθος τάξεως ϵ στον προσδιορισμό του κανονικού τρόπου ταλάντωσης το λάθος στην χαρακτηριστική συχνότητα είναι τάξεως ϵ^2 ! Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να προσεγγίσουμε πολύ καλά τις χαρακτηριστικές συχνότητες του συστήματος εάν μπορούμε να προτείνουμε βασισμένοι στη διαίσθηση μας κάποιο υποψήφιο κανονικό τρόπο ταλάντωσης. Εξάλλου ακόμη και αν δεν μπορούμε με κανένα τρόπο να προβλέψουμε τη δομή των κανονικών τρόπων ταλάντωσης μερικοί υπολογισμοί του πηλίκου Rayleigh με τυχαία ανύσματα αμέσως μας καταδεικνύουν ότι η μέγιστη χαρακτηριστική συχνότητα του συστήματος πρέπει να είναι μεγαλύτερη από τη μέγιστη τιμή των πηλίκων Rayleigh και η ελάχιστη ιδιοσυχνότητα πρέπει να είναι μικρότερη από όλες τις τιμές των πηλίκων Rayleigh (θα αποδείξουμε στο επόμενο εδάφιο τη πρόταση αυτή). Αν είχαμε δε υπομονή, και προβαίναμε σε πολλούς υπολογισμούς, τότε θα βλέπαμε, σύμφωνα με το παραπάνω

θεώρημα, ότι οι τιμές του πηλίκου που θα υπολογίζαμε, για τυχαία ανύσματα, συσσωρεύονται γύρω από κάποιες συγκεκριμένες τιμές, οι οποίες δεν είναι τίποτε άλλο από τις χαρακτηριστικές συχνότητες του συστήματος. Μπορεί να μη σας ικανοποιεί το γεγονός ότι πολλές φορές πρέπει να προβούμε σε προσεγγιστικές μεθόδους τέτοιας μορφής, αλλά αυτό είναι αναγκαίο όταν αντιμετωπίζουμε σύνθετα και δυσεπίλυτα φυσικά συστήματα.

Προσεγγιστικός προσδιορισμός της θεμελειώδους ταλάντωσης μίας αλυσίδας

Ένα σύνθετο εκκρεμές αποτελείται από ένα αβαρές νήμα συνολικού μήκους L στο οποίο είναι δεμένες ανα διαστήματα μήκους l , n χάντρες μάζας, m . Το νήμα βρίσκεται στο σταθερό πεδίο βαρύτητας και θα εξετάσουμε μικρές κινήσεις από τη κατακόρυφο, που είναι η κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας του συστήματος. Θέλουμε να προσδιορίσουμε τη θεμελειώδη κανονική ταλάντωση του εκκρεμούς αυτού, δηλαδή να προσδιορίσουμε τη μικρότερη χαρακτηριστική συχνότητα και τον αντιστοιχούντα κανονικό τρόπο ταλάντωσης. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει το όριο $n \rightarrow \infty$ όταν η συνολική μάζα που προσαρτάται στο νήμα είναι σταθερή, έστω M , οπότε η μάζα κάθε χάντρας είναι $m = M/n = \rho l$ όπου $\rho = M/L$ η γραμμική πυκνότητα των μαζών στο νήμα και το συνολικό μήκος είναι $L = nl$. Σε αυτό το όριο θα περιγράψουμε τις ταλαντώσεις ενός σχοινιού στο πεδίο βαρύτητας ή μίας αλυσίδας.

Ας γράψουμε την Λαγκρανζιανή του συστήματος των n μαζών. Ως συντεταγμένες της i -οστής μάζας λαμβάνουμε τη γωνία, θ_i , που σχηματίζει το τμήμα του νήματος, μήκους $l = L/n$, μεταξύ της i και $i - 1$ μάζας. Εάν λάβουμε καρτεσιανό σύστημα αξόνων με αρχή το σημείο ανάρτησης του νήματος η θέση της πρώτης χάντρας είναι $x_1 = l \sin \theta_1$, $y_1 = -l \cos \theta_1$ ενώ η θέση της i -οστής μάζας προσδιορίζεται από την αναδρομική σχέση:

$$x_i = x_{i-1} + l \sin \theta_i \quad , \quad y_i = y_{i-1} - l \cos \theta_i \quad (i = 2, \dots, n) \quad . \quad (4)$$

Η Λαγκρανζιανή που περιγράφει τη γενική κίνηση των χαντρών είναι:

$$L = \rho l \sum_{i=1}^n \left(\frac{\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2}{2} - g y_i \right) \quad . \quad (5)$$

Για να μελετήσουμε μικρές κινήσεις περί το ευσταθές σημείο ισορροπίας $\theta_1 = \dots = \theta_n = 0$, γραμμικοποιούμε τη Λαγκρανζιανή. Η γραμμικοποιημένη Λαγκρανζιανή που περιγράφει τη κίνηση μπορεί να ληφθεί στη μορφή:

$$L = \dot{\theta}_1^2 + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + \dots + (\dot{\theta}_1 + \dots + \dot{\theta}_n)^2 - \frac{g}{l} (\theta_1^2 + (\theta_1^2 + \theta_2^2) + \dots + (\theta_1^2 + \dots + \theta_n^2)) \quad , \quad (6)$$

ή σε μορφή πινάκων:

$$L = \dot{\theta}^T \mathbf{M} \dot{\theta} - \theta^T \mathbf{K} \theta \quad , \quad (7)$$

όπου $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_n]^T$. Ο συμμετρικός πίνακας $\mathbf{M}$ έχει στοιχεία τα $M_{ij} = n + 1 - j$ για

$i \leq j$, δηλαδή ο πίνακας έχει τη μορφή:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & & 1 \\ n-1 & n-1 & n-2 & & \vdots \\ n-2 & n-2 & n-2 & & \\ & & & \ddots & 1 \\ 1 & & \dots & & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

και ο πίνακας $\mathbf{K}$ είναι ο διαγώνιος πίνακας με i -οστό διαγώνιο στοιχείο το $K_{ii} = g(n+1-i)/l$.

Άσκηση: Επιβεβαιώστε ότι οι μικρές ταλαντώσεις διέπονται από τη Λαγκρανζιανή (7).

Αντιλαμβάνεστε ότι ο υπολογισμός των χαρακτηριστικών συχνοτήτων και κανονικών τρόπων ταλάντωσης αυτού του συστήματος είναι δύσκολος. Μπορεί βεβαίως αμέσως να υπολογίσουμε τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης για κάθε n κάνοντας χρήση αριθμητικών μεθόδων. Εμείς, όμως, θα προσφύγουμε σε προσεγγιστικό υπολογισμό της θεμελιώδους ταλάντωσης. Αναμένουμε ότι η μικρότερη χαρακτηριστική συχνότητα να προκύπτει όταν το νήμα είναι σχεδόν ευθύγραμμο και λαμβάνουμε ως πρώτη προσεγγίση στον θεμελιώδη κανονικό τρόπο ταλάντωσης την κίνηση για την οποία

$$\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_n \text{ δηλαδή } \theta = [1, 1, \dots, 1]^T. \quad (9)$$

Θα πείτε ότι γνωρίζετε τη συχνότητα ταλάντωσης στο όριο $n \rightarrow \infty$ αυτής της περιορισμένης κίνησης. Η συχνότητα ταλάντωσης αυτού του τρόπου είναι η συχνότητα ταλάντωσης μίας ομογενούς ράβδου στο βαρυτικό πεδίο: $\omega = \sqrt{1.5g/L}$. Για να δούμε όμως τι συχνότητα μας δίνει το πηλίκο Rayleigh. Το πηλίκο Rayleigh για το προσεγγιστικό θ είναι:

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \frac{\theta^T \mathbf{K} \theta}{\theta^T \mathbf{M} \theta} = \frac{g}{l} \frac{1+2+\dots+n}{1^2+2^2+\dots+n^2} = \frac{3g}{2L} \frac{1}{1+1/(2n)}. \quad (10)$$

Συνεπώς αναμένουμε ότι η θεμελιώδης ταλάντωση να έχει χαρακτηριστική συχνότητα για $n \gg 1$:

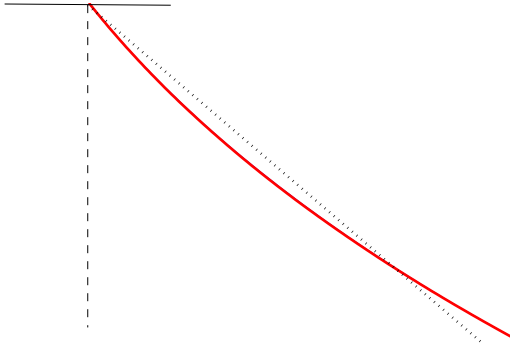
$$\omega \approx \sqrt{1.5 \frac{g}{L}} \left(1 - \frac{1}{4n}\right). \quad (11)$$

Βλέπετε ότι πράγματι όταν το $n \rightarrow \infty$ η συχνότητα αυτή προσεγγίζει τη συχνότητα ταλάντωσης μίας ομογενούς ράβδου:

$$\omega = \sqrt{1.5 \frac{g}{L}} = 1.2247 \sqrt{\frac{g}{L}}. \quad (12)$$

Με τι ακρίβεια έχουμε προβλέψει όμως τη χαρακτηριστική συχνότητα της θεμελιώδους ταλάντωσης μίας αλυσίδας; Σε επόμενο κεφάλαιο θα υπολογίσουμε ακριβώς τη θεμελιώδη χαρακτηριστική συχνότητα μίας κρεμάμενης ομογενούς αλυσίδας. Θα βρούμε ότι η θεμελιώδης χαρακτηριστική συχνότητα είναι:

$$\omega_1 = 0.7655 \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{g}{L}} \approx 1.2024 \sqrt{\frac{g}{L}}, \quad (13)$$



Σχήμα 1: Ο ακριβής θεμελειώδης κανονικός τρόπος ταλάντωσης μίας αλυσίδας (κόκκινη συνεχής γραμμή). Η ευθεία γραμμή είναι η προσέγγιση που χρησιμοποιήθηκε για να προσεγγισθεί με το πηλίκο Rayleigh η θεμελειώδης χαρακτηριστική συχνότητα.

ενώ ο προσεγγιστικός υπολογισμός μέσω του πηλίκου Rayleigh έδωσε $\omega = 1.2247\sqrt{g/L}$. Δηλαδή καταφέραμε να προσεγγίσουμε τη χαρακτηριστική συχνότητα με σχετικό σφάλμα 1.9 % ! Ο ακριβής θεμελειώδης τρόπος ταλάντωσης είναι

$$x = J_0 \left(2\omega_1 \sqrt{\frac{l-y}{g}} \right) , \quad (14)$$

όπου x η μετατόπιση από το σημείο ισορροπίας σε ύψος y από το σημείο ανάρτησης. Η συνάρτηση $J_0(z)$ είναι η συνάρτηση Bessel μηδενικής τάξεως οι πρώτοι όροι της οποίας είναι:

$$J_0(z) = 1 - \frac{z^2/4}{1!^2} + \frac{(z^2/4)^2}{2!^2} - \dots \quad (15)$$

Το γράφημα του ακριβούς τρόπου ταλάντωσης παρουσιάζεται στο Σχήμα 1. Στο ίδιο σχήμα παρουσιάζεται με διακεκομμένη γραμμή η προσέγγιση στο κανονικό τρόπο ταλάντωσης. Ενώ η προσέγγιση στο κανονικό τρόπο ταλάντωσης δεν είναι ιδιαιτέρως ακριβής, η χαρακτηριστική συχνότητα που προβλέπεται από το πηλίκο Rayleigh έχει ιδιαίτερη ακρίβεια, καταδεικνύοντας τη σημασία της προσεγγιστικής μεθόδου που ανακάλυψε ο Rayleigh. Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι αν προσεγγίσουμε την συνεχή αλυσίδα με 10 μόνο μάζες ο θεμελειώδης κανονικός τρόπος ταλάντωσης που προκύπτει από την ακριβή εύρεση των κανονικών τρόπων ταλάντωσης (που γίνεται με αριθμητικές μεθόδους) είναι απαράλλακτη με τον ακριβή θεμελειώδη κανονικό τρόπο ταλάντωσης της συνεχούς αλυσίδας.

Συμπεριφορά των χαρακτηριστικών συχνοτήτων

Το πηλίκο του Rayleigh μπορεί να αποκαλύψει τη συμπεριφορά των χαρακτηριστικών συχνοτήτων. Ιδιαίτερως μας ενδιαφέρει να μπορούμε να εκτιμήσουμε τη μεταβολή των χαρακτηριστικών συχνοτήτων αν μεταβάλλουμε τις δυνάμεις επαναφοράς (την ελαστικότητα) του συστήματος ή μεταβάλλουμε την αδράνεια του συστήματος ή όταν με κάποιο τρόπο περιορίζουμε ή ελευθερώνουμε τους βαθμούς ελευθερίας του συστήματος.

Ενα παράδειγμα περιορισμού των βαθμών ελευθερίας του συστήματος είναι η δέσμευση των συντεταγμένων του συστήματος ώστε να μεταβάλλονται όλες μαζί κρατώντας συγκεκριμένο λόγο μεταξύ τους, δηλαδή για όλους τους χρόνους να ισχύει:

$$\frac{q_1}{q_n} = \frac{\beta_1}{\beta_n}, \quad \frac{q_2}{q_n} = \frac{\beta_2}{\beta_n}, \quad \dots, \quad \frac{q_{n-1}}{q_n} = \frac{\beta_{n-1}}{\beta_n}. \quad (16)$$

Οι $n-1$ αυτοί περιορισμοί μετατρέπουν το σύστημα σε σύστημα ενός βαθμού ελευθερίας, η δε κίνηση του δεσμευμένου συστήματος μπορεί να περιγραφεί από μία μεταβλητή η η οποία σχετίζεται με τις αρχικές συντεταγμένες με τις σχέσεις $q_i = \beta_i \eta$ οι οποίες γράφονται συνοπτικά υπό μορφή πινάκων ως $q = \beta \eta$ όπου $\beta = [\beta_1, \dots, \beta_n]^T$ η κολώνα των σχετικών αποκλίσεων των αρχικών συντεταγμένων. Η κίνηση της περιορισμένης κίνησης ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\beta^T \mathbf{M} \beta \ddot{\eta} + \beta^T \mathbf{K} \beta \eta = 0, \quad (17)$$

η οποία έχει εκθετικές λύσεις της μορφής e^{ipt} με

$$p^2 = \frac{\beta^T \mathbf{K} \beta}{\beta^T \mathbf{M} \beta} = \rho(\beta). \quad (18)$$

Βλέπουμε ότι η συχνότητα ταλάντωσης του δεσμευμένου συστήματος δίνεται από το πηλίκο Rayleigh του ανύσματος β . Ήδη γνωρίζουμε ότι όταν έχουμε ένα κανονικό τρόπο ταλάντωσης $\beta = a_i$ η συχνότητα ταλάντωσης p^2 ισούται με μία από τις χαρακτηριστικές συχνότητες Ω_i^2 και το πηλίκο Rayleigh έχει στάσιμη τιμή για $\beta = a_i$. Για τυχαίο β μπορούμε εύκολα να φράξουμε τη συχνότητα ταλάντωσης μετασχηματίζοντας το πηλίκο Rayleigh στις χαρακτηριστικές συντεταγμένες όπου το β έχει συντεταγμένες Q , όπου $\beta = \mathbf{A}Q$. Σε αυτές τις συντεταγμένες επειδή,

$$p^2 = \frac{Q^T \mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A} Q}{Q^T \mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{A} Q} = \frac{\Omega_1^2 Q_1^T Q_1 + \dots + \Omega_n^2 Q_n^T Q_n}{Q_1^T Q_1 + \dots + Q_n^T Q_n}. \quad (19)$$

Εάν οι χαρακτηριστικές συχνότητες του συστήματος διαταχθούν έτσι ώστε $\Omega_1 \leq \Omega_2 \leq \dots \leq \Omega_n$ παρατηρούμε ότι αναγκαστικά η συχνότητα ταλάντωσης του περιορισμένου συστήματος ενός βαθμού ελευθερίας πρέπει να ικανοποιεί την ανισότητα:

$$\Omega_1^2 \leq p^2 \leq \Omega_n^2, \quad (20)$$

η μέγιστη δε συχνότητα πραγματοποιείται όταν το σύστημα δεσμεύεται να κινείται τον n κανονικό τρόπο ταλάντωσης $\beta = a_n$, και η ελάχιστη συχνότητα επιτυγχάνεται όταν το σύστημα δεσμεύεται με $\beta = a_1$. Αποδείξαμε δηλαδή ότι

1. Το ελάχιστο του πηλίκου Rayleigh $\rho(x)$ ως προς όλα τα ανύσματα x είναι Ω_1^2 .
2. Το μέγιστο του πηλίκου Rayleigh $\rho(x)$ ως προς όλα τα ανύσματα x είναι Ω_n^2 .

και γενικότερα θα αποδείξουμε ότι:

3. Εάν περιορίσουμε το x με $n - k$ περιορισμούς της μορφής $p_i^T x = 0$, για $n - k$ ανύσματα p_i , και μεγιστοποιήσουμε το πηλίκο Rayleigh $\rho(x)$ ως προς τα x που ικανοποιούν αυτούς τους περιορισμούς, τότε το ελάχιστο, ως προς όλες τις τιμές των p_i , αυτών των μεγίστων είναι το τετράγωνο της k χαρακτηριστικής συχνότητας Ω_k^2 .

Επειδή η μεγιστοποίηση του πηλίκου Rayleigh διενεργείται για τα ανύσματα x που είναι κάθετα στα συγκεκριμένα p_i , η παραπάνω πρόταση γράφεται συμβολικά ως εξής:

$$\Omega_k^2 = \min_{p_i} \left(\max_{x \perp p_i} \rho(x) \right), \quad i = 1, \dots, n - k, \quad (21)$$

όπου το $\min_{p_i}$ συμβολίζει το ελάχιστο ως προς όλες τις επιλογές των $n - k$, p_i , και το $\max_{x \perp p_i}$ συμβολίζει το μέγιστο ως προς τα x που είναι κάθετα σε όλα τα p_i .

Για την απόδειξη αυτού του min-max χαρακτηρισμού των χαρακτηριστικών συχνότητων πρώτα παρατηρούμε ότι η διαδικασία μεγιστοποίησης μπορεί χωρίς έλλειψη της γενικότητας να διενεργηθεί στις χαρακτηριστικές συντεταγμένες διότι δεδομένων των ανυσμάτων p_i η μεγιστοποίηση του πηλίκου Rayleigh στις κανονικές συντεταγμένες, Q , πρέπει να διενεργηθεί στα Q που είναι κάθετα τώρα στα ανύσματα $P_i = A^T p_i$. Διότι είναι:

$$\min_{p_i} \max_{x \perp p_i} \frac{x^T K x}{x^T M x} = \min_{P_i} \max_{Q \perp P_i} \frac{\Omega_1^2 Q_1^T Q_1 + \dots + \Omega_n^2 Q_n^T Q_n}{Q_1^T Q_1 + \dots + Q_n^T Q_n}. \quad (22)$$

Αν αποδείξουμε ότι για ορισμένα Q , που ικανοποιούν τις συνθήκες $Q \perp P_i$, το μέγιστο του πηλίκου Rayleigh είναι μεγαλύτερο ή ίσο του Ω_k^2 , τότε το μέγιστο ως προς όλα τα $Q \perp P_i$ θα είναι σίγουρα μεγαλύτερο ή ίσο του Ω_k^2 . Επιλέγουμε τα Q που έχουν συντεταγμένες:

$$Q_1 = \dots = Q_{k-1} = 0. \quad (23)$$

Μία τέτοια επιλογή είναι συμβατή με τους περιορισμούς. Διότι οι περιορισμοί: $P_1^T Q = 0, P_2^T Q = 0, \dots, P_{n-k}^T Q = 0$ μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να εκφράσουμε τις $n - k$ συντεταγμένες $Q_{k+1}, \dots, Q_n$ συναρτήσει των υπολοίπων συντεταγμένων $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$ και να μηδενίσουμε όλες αυτές τις συντεταγμένες εκτός της Q_k . Δηλαδή επειδή γενικά κάθε σύστημα $n - k$ εξισώσεων με $n - k + 1$ αγνώστους έχει πάντα λύση, μπορούμε να θέσουμε $Q_1 = \dots = Q_{k-1} = 0$ και να προσδιορίσουμε επιλεγμένα ειδικά Q , με μη μηδενικές μόνο τις συντεταγμένες $Q_k, Q_{k+1}, \dots, Q_n$, που ικανοποιούν τους περιορισμούς. Για αυτά όμως τα Q είναι βέβαιο ότι $\max \rho(Q) \geq \Omega_k^2$ και ότι ισότητας πραγματοποιείται για τα p_i που δίνουν τις (23). Συνεπώς το ελάχιστο ως προς όλους τους περιορισμούς θα είναι:

$$\min_{p_i} \left(\max_{x \perp p_i} \rho(x) \right) = \Omega_k^2. \quad (24)$$

Ομοίως αποδεικνύεται η εξής πρόταση:

4. Εάν περιορίσουμε το x με $k - 1$ περιορισμούς της μορφής $p_i^T x = 0$, με $k - 1$ ανύσματα p_i , και ελαχιστοποιήσουμε το πηλίκο Rayleigh $\rho(x)$ ως προς τα x που ικανοποιούν αυτούς τους περιορισμούς, τότε το μέγιστο, ως προς όλες τις τιμές των p_i , αυτών των ελαχίστων είναι το τετράγωνο της k χαρακτηριστικής συχνότητας Ω_k^2 , δηλαδή

$$\Omega_k^2 = \max_{p_i} \left(\min_{x \perp p_i} \rho(x) \right), \quad i = 1, \dots, k - 1. \quad (25)$$

Άσκηση: Αποδείξτε τον max-min χαρακτηρισμό (25) των χαρακτηριστικών συχνοτήτων.

Οι χαρακτηρισμοί min-max και max-min είναι πολύ χρήσιμοι διότι αποκαλύπτουν την συμπεριφορά των χαρακτηριστικών συχνοτήτων σε μεταβολές του αρχικού συστήματος.

Ως πρώτο παράδειγμα λαμβάνουμε ένα σύστημα n βαθμών ελευθερίας με χαρακτηριστικές συχνότητες $\Omega_1 \leq \Omega_2 \leq \dots \leq \Omega_n$ στο οποίο επιβάλλουμε ένα περιορισμό της μορφής: $p^T q = 0$, όπου p κάποιο άνυσμα. Το αρχικό σύστημα μετατρέπεται σε σύστημα $n - 1$ βαθμών ελευθερίας με χαρακτηριστικές συχνότητες $\Omega'_1 \leq \Omega'_2 \leq \dots \leq \Omega'_n$. Τι σχέση έχουν οι αρχικές χαρακτηριστικές συχνότητες με τις τελικές; Θα δείξουμε ότι οι νέες χαρακτηριστικές συχνότητες εναλλάσσονται μεταξύ των αρχικών:

$$\Omega_1 \leq \Omega'_1 \leq \Omega_2 \leq \dots \leq \Omega_k \leq \Omega'_k \leq \Omega_{k+1} \leq \dots \leq \Omega_{n-1} \leq \Omega'_{n-1} \leq \Omega_n. \quad (26)$$

Οι χαρακτηριστικές συχνότητες του νέου συστήματος μπορούν να βρεθούν περιορίζοντας το πηλίκο Rayleigh του νέου συστήματος $\bar{\rho}$ που προκύπτει από το πηλίκο Rayleigh, ρ , του αρχικού συστήματος επιβάλλοντας τον συγκεκριμένο περιορισμό $p^T q = 0$. Σύμφωνα με τον χαρακτηρισμό min-max η k χαρακτηριστική συχνότητα του αρχικού συστήματος, Ω_k , προκύπτει από ελαχιστοποίηση του $\max \rho$ ως προς όλους τους $n - k$ περιορισμούς. Το ελάχιστο όμως αυτό θα είναι προφανώς μικρότερο του ελαχίστου που θα προκύψει αν λάβουμε τον $p^T q = 0$ ως ένα από τους $n - k$ περιορισμούς (έτσι ώστε το πηλίκο Rayleigh, ρ , του αρχικού συστήματος γίνει το πηλίκο Rayleigh, $\bar{\rho}$, του νέου συστήματος) και ελαχιστοποιήσουμε ως προς τους υπόλοιπους $n - 1 - k$ περιορισμούς. Η δεύτερη όμως ελαχιστοποίηση θα δώσει το τετράγωνο της Ω'_k . Συνεπώς θα είναι: $\Omega_k \leq \Omega'_k$. Η άλλη πλευρά της ανισότητας αποδεικνύεται κάνοντας χρήση του max-min χαρακτηρισμού. Πράγματι, περιορίζοντας το σύστημα n βαθμών ελευθερίας με $k - 1$ περιορισμούς έχουμε ότι $\max \min \rho = \Omega_k^2$. Αλλά το μέγιστο $\min \rho$ ως προς όλους τους $k - 1$ περιορισμούς θα είναι μεγαλύτερο του μεγίστου του $\min \rho$ όταν μία από τις συνθήκες πάρει την ειδική μορφή $p^T q = 0$ (και το ρ γίνει $\bar{\rho}$) και η μεγιστοποίηση διενεργηθεί ως προς τους υπόλοιπους $k - 2$ περιορισμούς. Αλλά η μεγιστοποίηση ως προς $k - 2$ περιορισμούς της $\bar{\rho}$ δίνει το τετράγωνο της Ω'_{k-1} . Συνεπώς $\Omega'_{k-1} \leq \Omega_k$. Με τον τρόπο αποδείχθηκε η αλήθεια της (26).

Με τον ίδιο τρόπο μπορεί να αποδειχθεί ότι αν περιορίσουμε ένα σύστημα n βαθμών ελευθερίας με k περιορισμούς έτσι ώστε να αποκτήσουμε ένα νέο σύστημα $n - k$ βαθμών ελευθερίας, το νέο σύστημα θα έχει $n - k$ χαρακτηριστικές συχνότητες $\Omega'_1, \Omega'_2, \dots, \Omega'_{n-k}$ οι οποίες δεν θα είναι μεγαλύτερες των αντιστοίχων $\Omega_{k+1}, \Omega_{k+2}, \dots, \Omega_n$ και δεν θα είναι μικρότερες των αντιστοίχων $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_{n-k}$ του αρχικού συστήματος. Με τον τρόπο αυτό

καταλήγουμε και πάλι στη πρόταση που ήδη αποδείξαμε ότι αν ένα σύστημα n βαθμών ελευθερίας περιορισθεί σε σύστημα ενός βαθμού ελευθερίας η χαρακτηριστική συχνότητα του μονοδιαστάτου συστήματος, Ω'_1 , θα ικανοποιεί την ανισότητα: $\Omega_1 \leq \Omega'_1 \leq \Omega_n$.

Άσκηση: Ένας σεισμός δημιουργεί ρωγμές σε ένα κτήριο. Πως αλλάζουν οι χαρακτηριστικές συχνότητες του κτηρίου; Η ισοδυνάμως μία καμπάνα ραγίζει, πως αλλάζει η συχνότητα του ήχου της (Arnold);

Τώρα θα διερευνήσουμε πως μεταβάλλονται οι χαρακτηριστικές συχνότητες όταν αυξήσουμε τη σκληρότητα του συστήματος. Ένα σύστημα που χαρακτηρίζεται από το πηλίκο Rayleigh $\rho_1(q)$ θα ονομάζεται πιο σκληρό από ένα άλλο σύστημα με πηλίκο Rayleigh $\rho_2(q)$, αν $\rho_1(q) \geq \rho_2(q)$ για όλα τα q . Αν στη περίπτωση του συστήματος μαζών συνδεδεμένων με ελατήρια πολλαπλασιάσουμε όλες τις σταθερές των ελατηρίων με ένα αριθμό είτε παρομοίως μειώσουμε όλες τις μάζες του συστήματος το νέο σύστημα είναι σκληρότερο του αρχικού. Επίσης αν διαταράξουμε τον πίνακα δυναμικής ενέργειας, $\mathbf{K}$, έτσι ώστε το νέο σύστημα να έχει ως πίνακα δυναμικής ενέργειας τον $\mathbf{K} + \mathbf{K}'$, με $\mathbf{K}'$ θετικό, το νέο σύστημα θα είναι σκληρότερο του αρχικού. Στη περίπτωση αυτή προκύπτει αμέσως από τον χαρακτηρισμό min-max ή max-min των χαρακτηριστικών συχνοτήτων ότι μία προς μία οι χαρακτηριστικές συχνότητες του σκληροτέρου συστήματος δεν μπορεί να είναι μικρότερες από τις αντίστοιχες συχνότητες του αρχικού συστήματος.