26/4/2001

Λαγκρανζιανή φορτισμένου σωματιδίου σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο

Μέχρι τώρα έχουμε κατασκευάσει Λαγκρανζιανές για σωματίδια ή γενικά για μηχανικά συστήματα που κινούνται σε δυναμικά πεδία που έχουν καθαρά χωρική εξάρτηση (ακόμη και τους συνδέσμους που αναγκάζουν τα μηχανικά συστήματα να κινούνται με έναν συγκεκριμένο τρόπο καταφέραμε να τα αναγάγουμε σε κινήσεις μέσα σε τεχνητά δυναμικά πεδία που αντικαθιστούν τους συνδέσμους). Επίσης την περίπτωση χρονοεξαρτώμενων δυνάμεων είναι εύκολο, όπως είδαμε στην αντίστοιχη άσκηση της Γ΄ σειράς, να αναπαράγουμε μέσω του Λαγκρανζιανού φορμαλισμού. Τι μπορούμε όμως να κάνουμε όταν η δύναμη που ασκείται σε ένα σωματίδιο εξαρτάται από την ταχύτητα; Κλασικό σημαντικό παράδειγμα τέτοιας περίπτωσης αποτελεί η κίνηση φορτισμένου σωματιδίου μέσα σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Η δυσκολία κατασκευής της αντίστοιχης Λαγκρανζιανής έγκειται στο γεγονός ότι αφού η δύναμη εξαρτάται από την ταχύτητα πρέπει ο όρος της δυναμικής ενέργειας να εμπεριέχει την ταχύτητα, αλλά τότε στις εξισώσεις Euler-Lagrange η γενικευμένη ορμή $\partial L / \partial \dot{\vec{x}}$ εκτός από την κλασική της μορφή που προέρχεται από την παραγώγιση της κινητικής ενέργειας θα περικλείει και άλλον έναν όρο εξαιτίας της εξάρτησης από την ταχύτητα της δυναμικής ενέργειας. Αυτό περιπλέκει τη δυναμική εξίσωση κίνησης και θα πρέπει να είναι κανείς τυχερός για να καταφέρει να κατασκευάσει το δυναμικό νόμο από μια Λαγκρανζιανή συνάρτηση. Την προσπάθεια αυτή για την περίπτωση του φορτισμένου σωματιδίου σε ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο θα περιγράψουμε στη συνέχεια.

Κατ' αρχάς ας δούμε ποια είναι η εξίσωση κίνησης που θα προσπαθήσουμε να αναπαράγουμε από κάποια Λαγκρανζιανή:

$$m\ddot{\vec{x}} = q\left(\vec{E} + \dot{\vec{x}} \times \vec{B}\right),$$

όπου $\vec{E}$ η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου και $\vec{B}$ η μαγνητική επαγωγή στη θέση $\vec{x}(t)$ του φορτισμένου με φορτίο q σωματιδίου, τη χρονική στιγμή t που αυτό βρίσκεται στη θέση αυτή. Η αντίστοιχη Λαγκρανζιανή θα έχει τη μορφή

$$L = T - V,$$

όπου T η κινητική ενέργεια του σωματιδίου ($T = \frac{1}{2}m\vec{u}^2$) και V η δυναμική ενέργεια η οποία θα έχει προφανώς εξάρτηση και από την ταχύτητα του σωματιδίου ώστε να είναι δυνατό να αναπαραχθεί η εξαρτώμενη από την ταχύτητα μαγνητική δύναμη Lorentz. Μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι η δυναμική αυτή ενέργεια θα πρέπει να έχει *το πολύ γραμμική εξάρτηση από την ταχύτητα*, ώστε και ο όρος $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{\vec{x}}}\right)$ και ο όρος $\frac{\partial V}{\partial \vec{x}}$ να δημιουργήσουν μια δύναμη το πολύ γραμμική ως προς την ταχύτητα, όπως είναι η δύναμη Lorentz. Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η δυναμική ενέργεια θα έχει τη μορφή

$$V(\vec{x},\vec{u},t) = q\left[-\vec{A}(\vec{x},t)\cdot\vec{u} + \phi(\vec{x},t)\right].$$

Η δυναμική ενέργεια, όντας μέρος της Λαγκρανζιανής δεν μπορεί παρά να είναι βαθμωτή ποσότητα, γεγονός το οποίο δικαιολογεί την ύπαρξη του εσωτερικού γινομένου[1]. Η δε παρουσία του φορτίου ως πολλαπλασιαστικού παράγοντα είναι επιβεβλημένη από τη μορφή της επιδιωκόμενης ως στόχου δύναμης. Τέλος το αρνητικό πρόσημο δεν έχει κανένα ουσιαστικό λόγο παρά μόνο για να αποκτήσουν οι ποσότητες $\vec{A},\phi$ συγκεκριμένο φυσικό περιεχόμενο στο τέλος της ανάλυσης.

Για να δοκιμάσουμε λοιπόν σε τι εξισώσεις κίνησης οδηγεί μια τέτοια Λαγκρανζιανή.

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{u}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} =$$

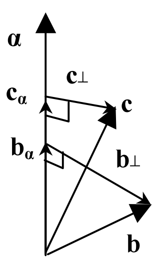
$$\frac{d}{dt}\left(m\vec{u} + q\vec{A}(\vec{x},t)\right) - q\left(\frac{d}{d\vec{x}}\left(\vec{A}(\vec{x},t)\cdot\vec{u} - \phi(\vec{x},t)\right)\right)$$

Η παραπάνω εξίσωση θα μπορούσε πιθανώς να πάρει τη μορφή της δυναμικής εξίσωσης του σωματιδίου αν μπορούσαμε να κατασκευάσουμε ποσότητες $\vec{A},\phi$ τέτοιες ώστε

$$-\frac{d}{dt}\left(\vec{A}(\vec{x},t)\right) + \frac{d}{d\vec{x}}\left(\vec{A}(\vec{x},t)\cdot\vec{u} - \phi(\vec{x},t)\right) = \vec{E} + \vec{u}\times\vec{B}. \qquad (1)$$

Με μια μικρή επεξεργασία της παραπάνω σχέσης και με τη βοήθεια της μαθηματικής ταυτότητας $\vec{V}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{V}\cdot\vec{A}\right) - \left(\vec{V}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A}$, που ισχύει όταν το διάνυσμα $\vec{V}$ δεν έχει εξάρτηση από το $\vec{x}$, μπορούμε να επιτύχουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Απόδειξη της διανυσματικής ταυτότητας $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$: Η ταυτότητα αυτή είναι εύκολο να αποδειχθεί με τη χρήση δεικτών και την ταυτότητα $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$ που έχουμε ήδη αποδείξει. Εδώ θα παρουσιάσουμε μια πιο μακροσκελή αλλά περισσότερο εποπτική απόδειξη. Για το λόγο αυτό θα «σπάσουμε» τα διανύσματα $\vec{b}$ και $\vec{c}$ σε διανύσματα παράλληλα και κάθετα στο διάνυσμα $\vec{a}$. Δηλαδή, $\vec{b} = \vec{b}_a + \vec{b}_\perp$ και $\vec{c} = \vec{c}_a + \vec{c}_\perp$, με $\vec{a}\cdot\vec{b}_\perp = \vec{a}\cdot\vec{c}_\perp = 0$. Έτσι:



$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{a}\times\left[\left(\vec{b}_a + \vec{b}_\perp\right)\times\left(\vec{c}_a + \vec{c}_\perp\right)\right] = \vec{a}\times\left[\left(\vec{b}_a\times\vec{c}_a\right) + \left(\vec{b}_a\times\vec{c}_\perp\right) + \left(\vec{b}_\perp\times\vec{c}_a\right) + \left(\vec{b}_\perp\times\vec{c}_\perp\right)\right].$$

Από τους τέσσερις όρους μέσα στις τετράγωνες παρενθέσεις, μόνο οι τρεις τελευταίοι είναι εν γένει μη μηδενικοί –ο πρώτος είναι ταυτοτικά μηδέν. Ο δε τέταρτος όρος είναι ένα διάνυσμα κάθετο στα $\vec{b}_\perp,\vec{c}_\perp$, επομένως παράλληλο στο $\vec{a}$ και δεν συνεισφέρει καθόλου στο εξωτερικό γινόμενο με το $\vec{a}$. Ο τρίτος όρος αφού αποτελείται από δύο κάθετα διανύσματα δημιουργεί ένα καινούριο διάνυσμα κάθετο σε αυτά με μέτρο όσο το γινόμενό τους. Είναι εύκολο να δείτε ότι το εξωτερικό γινόμενο του $\vec{a}$ με το καινούριο αυτό διάνυσμα είναι ένα διάνυσμα παράλληλο με το $\vec{b}_\perp$ και με μέτρο όσο το γινόμενο των τριών διανυσμάτων, δηλαδή

---

[1] Μια άλλη δυνατότητα κατασκευής βαθμωτού μεγέθους φαινομενικά γραμμικού ως προς την ταχύτητα θα ήταν τα $\left|\vec{A}\times\vec{u}\right|$, ή $A\left|\vec{u}\right|$, αλλά και οι δύο αυτές περιπτώσεις δεν είναι πραγματικά γραμμικές ως προς την ταχύτητα αφού η αντικατάσταση της $\vec{u}$ με $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$ δεν ισούται εν γένει με άθροισμα των αντιστοίχων ποσοτήτων.

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}_\perp\times\vec{c}_a\right)=|\vec{a}||\vec{c}_a|\vec{b}_\perp=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}_\perp .$$

Τέλος ο δεύτερος όρος ομοιάζει εκπληκτικά με τον τρίτο και γίνεται πανομοιότυπος ως προς τη μορφή αν αλλάξει η σειρά των $\vec{b}_a$ και $\vec{c}_\perp$ με φυσικό επακόλουθο την αλλαγή προσήμου. Το αρχικό λοιπόν διπλό εξωτερικό γινόμενο έχει απλοποιηθεί σε

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{a}\times\left(\vec{b}_\perp\times\vec{c}_a\right)=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}_\perp-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}_\perp .$$

Αν μάλιστα παρατηρήσουμε ότι $\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}_a-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}_a=0$, αφού και τα δύο αυτά διανύσματα έχουν μέτρο $|\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}|\cos(\vec{a},\vec{b})\cos(\vec{a},\vec{c})$ και την κατεύθυνση του $\vec{a}$, και προσθέσουμε την τελευταία αυτή μηδενική σχέση στην προηγούμενη καταλήγουμε στην επιθυμητή ταυτότητα

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}.$$

Γνωρίζοντας τη διανυσματική αυτή ταυτότητα είναι εύκολο να την εφαρμόσουμε και στην περίπτωση που κάποιο από τα διανύσματα είναι διανυσματικός τελεστής με την απαιτούμενη προσοχή όμως. Ο τελεστής πρέπει να τοποθετηθεί σε τέτοια θέση ώστε να δρα αποκλειστικά και μόνο όπου δρούσε αρχικά. Έτσι αν θέλουμε να υπολογίσουμε το αντικείμενο $\vec{V}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)$, μπορούμε να το αναλύσουμε σύμφωνα με τη διανυσματική ταυτότητα ως $\underset{*}{\vec{\nabla}}\left(\vec{V}\cdot\underset{*}{\vec{A}}\right)-\left(\vec{V}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A}$, αρκεί να προσέξουμε ο διαφορικός τελεστής του πρώτου όρου να δράσει *μόνο* στο $\vec{A}$ (αυτό το νόημα έχουν τα σημάδια * κάτω από τα εν λόγω μεγέθη). Η επισήμανση αυτή είναι ανούσια αν το διάνυσμα $\vec{V}$ περνά «απαρατήρητο» από τον διαφορικό τελεστή όπως στην περίπτωσή μας.

Έτσι λοιπόν το αριστερό μέλος της σχέσης (1) απλοποιείται σε

$$-\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{x},t)-\left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A}(\vec{x},t)+\vec{\nabla}\left(\vec{A}(\vec{x},t)\cdot\vec{u}\right)-\vec{\nabla}\phi(\vec{x},t)=$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{x},t)-\vec{\nabla}\phi(\vec{x},t)+\vec{u}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{x},t)\right)$$

Αν απαιτήσουμε οι μεν δύο πρώτοι όροι να παριστάνουν το ηλεκτρικό πεδίο και ο τελευταίος όρος μέσα στην παρένθεση το μαγνητικό πεδίο, όπως αρχικά ζητήσαμε, άμεσα αναγνωρίζουμε τη φυσική σημασία των $\vec{A},\phi$ -πρόκειται για το ανυσματικό δυναμικό και το ηλεκτρικό δυναμικό αντίστοιχα. Οι ορισμοί αυτοί των βοηθητικών πεδίων εισήχθησαν στην θεωρία του ηλεκτρομαγνητισμού προκειμένου να ικανοποιούνται αυτόματα οι δύο από τις τέσσερις εξισώσεις του Maxwell.

$$\vec{B}\equiv\vec{\nabla}\times\vec{A}\Rightarrow\vec{\nabla}\times\vec{B}=0,$$

$$\vec{E}\equiv-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\vec{\nabla}\phi\Rightarrow\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

Συνεπώς ένα φορτισμένο σωματίδιο μέσα σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο περιγράφεται από τη Λαγκρανζιανή

$$L=\frac{1}{2}m\vec{u}^2+q\vec{A}\cdot\vec{u}-q\phi$$

με τον προφανή συμβολισμό των ποσοτήτων που εμφανίζονται. Κλείνοντας το κεφάλαιο αυτό αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η γενικευμένη ορμή τώρα του σωματιδίου δεν είναι η κλασική $m\vec{u}$, αλλά η $\frac{\partial L}{\partial\vec{u}}=m\vec{u}+q\vec{A}$. Θα μπορούσαμε να την ερμηνεύσουμε ως μια συνεισφορά του ίδιου του μαγνητικού πεδίου στην ορμή του σωματιδίου. Το γεγονός αυτό έχει άμεσες επιπτώσεις κυρίως σε κβαντομηχανικά συστήματα όπου η ορμή, που σε κάποιες περιπτώσεις είναι κβαντισμένη, είναι η γενικευμένη, όπως η παραπάνω και όχι η συνήθης.

Μια άλλη κοινή περίπτωση Λαγκρανζιανής με δυναμικό που εξαρτάται από την ταχύτητα είναι η περίπτωση σωματιδίου που κινείται σε περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς. Η αναλογία μάλιστα με το φορτισμένο σωματίδιο σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο είναι πλήρης, αφού το ρόλο του μαγνητικού πεδίου τον παίζει η γωνιακή ταχύτητα. Θα κατασκευάσουμε την αντίστοιχη Λαγκρανζιανή με διαφορετικό τρόπο εκτελώντας απλώς ένα μετασχηματισμό συντεταγμένων όταν παρακάτω θα συζητήσουμε το θέμα των στροφών.