Μηχανική ΙΙ
Πέτρος Ιωάννου & Θεοχάρης Αποστολάτος
25 Μαΐου 2001

Αγγύλες Poisson

Ας θεωρήσουμε κάποια συνάρτηση $F(q,p)$ των κανονικών μεταβλητών (q,p). Οι θέσεις και οι ορμές εξελίσσονται χρονικά σύμφωνα με τις εξισώσεις του Χάμιλτον:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Ποίος θα είναι ο νόμος εξέλιξης της $F(q,p)$;

Επειδή γνωρίζουμε τον τρόπο εξέλιξης των θέσεων και των ορμών η χρονική εξέλιξη της $F(q,p)$ θα είναι κάνοντας χρήση της αθροιστικής σύμβασης

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i}\dot{p}_i$$

η οποία με τη βοήθεια των εξισώσεων του Χάμιλτον παίρνει τη μορφή:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Το άθροισμα $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}$ συμβολίζεται $\{F,H\}$ και ονομάζεται η αγγύλη Poisson των συναρτήσεων F και H.

Γενικότερα η αγγύλη Poisson δύο συναρτήσεων $A(q,p)$, $B(q,p)$ είναι μία νέα συνάρτηση, $\{A,B\}$, η οποία ορίζεται ως

$$\{A,B\} = \frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i}.$$

Είναι χρήσιμο να υπολογίσουμε τις αγγύλες Poisson μεταξύ των θέσεων και των ορμών. Αμέσως βρίσκουμε:

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0 \text{ και } \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}.$$

Με το συβολισμό των αγγύλων Poisson συμπεραίνουμε ότι η $F(q,p)$ εξελίσσεται σύμφωνα με τον δυναμικό νόμο

$$\frac{dF}{dt} = \{F,H\}$$

Εάν $F(q,p,t)$ είχε και άμεση εξάρτηση από το χρόνο τότε η εξίσωση μεταβολής της θα ήταν βεβαίως:

$$\boxed{\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F,H\}}.$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να θεωρηθεί ως ο θεμελειώδης νόμος χρονικής εξέλιξης φυσικών συστημάτων που χαρακτηρίζονται από κάποια Χαμιλτονιανή συνάρτηση, $H(q,p)$. Παρατηρείστε ότι οι εξισώσεις του Χάμιλτον είναι ειδική μορφή της παραπάνω εξίσωσης. Η εξέλιξη των θέσεων παράγεται ως ειδική περίπτωση αν επιλέξουμε την $F = q_i$, και η εξέλιξη των ορμών αν επιλέξουμε την $F = p_i$.

Η διατύπωση του νόμου εξέλιξης με τις αγγύλες Poisson επιτρέπει την αναδιατύπωση της συνθήκης που πρέπει να ικανοποιείται για να διατηρείται μία ποσότητα. Μία ποσότητα είναι διατηρήσιμο μέγεθος αν δεν μεταβάλλεται με το χρόνο. Συνεπώς η $F(q,p)$ διατηρείται κατά τη κίνηση αν η αγγύλη Poisson της με την Χαμιλτονιανή συνάρτηση μηδενίζεται. Δηλαδή αν η $F(q,p)$ δεν εξαρτάται αμέσως από το χρόνο και $\{F,H\} = 0$ τότε η $F(q,p)$ είναι διατηρήσιμο μέγεθος.

Αλγεβρικές ιδιότητες των αγγύλων Poisson

Αλλά ας επανέλθουμε σε ορισμένες αλγεβρικές ιδιότητες των αγγύλων Poisson. Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι

A) $\{A,A\} = 0$

B) $\{A,B\} = -\{B,A\}$

Γ) $\{A, B+C\} = \{A,B\} + \{A,C\}$

Πιό δύσκολο είναι να αποδειχθεί η ταυτότητα του Jacobi:

Δ) $\{\{A,B\},C\} + \{\{B,C\},A\} + \{\{C,A\},B\} = 0$.

Άσκηση: Αποδείξτε ότι η αγγύλη Poisson ικανοποιεί τον κανόνα του Leibniz

$$\{AB,C\} = A\{B,C\} + B\{A,C\}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις σχηματίζουν ένα γραμμικό χώρο V (εάν $f(q,p)$ και $g(q,p)$ συνεχείς συναρτήσεις τότε αυτές σχηματίζουν ένα γραμμικό χώρο διότι πράγματι οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός των είναι συνεχής συνάρτηση) η αγγύλη Poisson είναι η συνάρτηση που προέρχεται από τη διγραμμική απεικόνιση δύο άλλων συναρτήσεων. Δηλαδή έστω η απεικόνιση $P: V \times V \to V$ όπου $P(A,B) = \{A,B\}$. Τότε οι ιδιότητες A), B), Γ) δείχνουν ότι η αγγύλη Poisson είναι μία αντισυμμετρική διγραμμική απεικόνιση συναρτήσεων, η οποία όμως επιπλέον ικανοποιεί επιπλέον τη σημαντική ταυτότητα του Jacobi. Απεικονίσεις τέτοιας μορφής σχηματίζουν μία αλγεβρα Lie.

Έχετε γνωρίσει ήδη και έχετε χρησιμοποιήσει άλγεβρες Lie. Το εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων που απεικονίζει τα διανύσματα $\vec{A}$ και $\vec{B}$ στο διάνυσμα $\vec{A} \times \vec{B}$ είναι μία τέτοια αντισυμμετρική απεικόνιση που ικανοποιεί και τη ταυτότητα του Jacobi (Αποδείξτε το). Επίσης αν A και B είναι πίνακες και τους απεικονίσουμε στο μεταθέτη τους, δηλαδή στο πίνακα $[A,B] = AB - BA$ τότε και πάλι σχηματίζεται μία άλγεβρα Lie. Μάλιστα υπάρχει στενή σχέση μεταξύ του μεταθέτη και των αγγύλων Poisson. Για να δείξουμε αυτή τη σχέση ορίζουμε τον τελεστή D_A που αντιστοιχεί στη συνάρτηση $A(q,p)$:

$$D_A = \frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i}$$

τότε $\{A,B\} \equiv D_A B$. Θα αποδείξουμε τώρα ότι ο μεταθέτης των τελεστών D_A και D_B είναι ο τελεστής που αντιστοιχεί στην αγγύλη Poisson των A και B, δηλαδή:

$$\left[D_A, D_B\right] = D_{\{A,B\}}$$

Απόδειξη

Υπόλογίζουμε πρώτα το

$$D_A D_B C = \left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i}\right)\left(\frac{\partial B}{\partial q_j}\frac{\partial C}{\partial p_j} - \frac{\partial B}{\partial p_j}\frac{\partial C}{\partial q_j}\right) =$$

$$= \frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial^2 B}{\partial p_i \partial q_j}\frac{\partial C}{\partial p_j} + \frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial q_j}\frac{\partial^2 C}{\partial p_i \partial p_j} - \frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial^2 B}{\partial p_i \partial p_j}\frac{\partial C}{\partial q_j} - \frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_j}\frac{\partial^2 C}{\partial p_i \partial q_j} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial^2 B}{\partial q_i \partial q_j}\frac{\partial C}{\partial p_j} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_j}\frac{\partial^2 C}{\partial q_i \partial p_j}$$
$$+ \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial^2 B}{\partial q_i \partial p_j}\frac{\partial C}{\partial q_j} + \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial p_j}\frac{\partial^2 C}{\partial q_i \partial q_j}$$

και

$$D_B D_A C = \left(\frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i}\right)\left(\frac{\partial A}{\partial q_j}\frac{\partial C}{\partial p_j} - \frac{\partial A}{\partial p_j}\frac{\partial C}{\partial q_j}\right) =$$

$$= \frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial^2 A}{\partial p_i \partial q_j}\frac{\partial C}{\partial p_j} + \frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial A}{\partial q_j}\frac{\partial^2 C}{\partial p_i \partial p_j} - \frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial^2 A}{\partial p_i \partial p_j}\frac{\partial C}{\partial q_j} - \frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial A}{\partial p_j}\frac{\partial^2 C}{\partial p_i \partial q_j} - \frac{\partial B}{\partial p_i}\frac{\partial^2 A}{\partial q_i \partial q_j}\frac{\partial C}{\partial p_j} - \frac{\partial B}{\partial p_i}\frac{\partial A}{\partial q_j}\frac{\partial^2 C}{\partial q_i \partial p_j}$$
$$+ \frac{\partial B}{\partial p_i}\frac{\partial^2 A}{\partial q_i \partial p_j}\frac{\partial C}{\partial q_j} + \frac{\partial B}{\partial p_i}\frac{\partial A}{\partial p_j}\frac{\partial^2 C}{\partial q_i \partial q_j}$$

Παρατηρούμε ότι όλοι οι όροι οι οποίοι περίεχουν δεύτερης τάξης παράγωγο της συνάρτησης C αλληλοαναιρούνται όταν αφαιρέσουμε τις δύο παραπάνω σχέσεις κατα μέλη, καταλήγοντας στην ζητούμενη έκφραση:

$$D_A D_B C - D_B D_A C = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i}\right)\frac{\partial C}{\partial p_j} - \frac{\partial}{\partial p_j}\left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i}\right)\frac{\partial C}{\partial q_j}.$$

Μπορούμε τώρα εύκολα να αποδείξουμε τη ταυτότητα του Jacobi:

$$\{C,\{A,B\}\} + \{A,\{B,C\}\} + \{B,\{C,A\}\} = 0.$$

Απόδειξη

Παρατηρούμε ότι $\{C,\{A,B\}\} = D_C D_A B$ και $\{A,\{B,C\}\} = D_A D_B C$ και συνεπώς οι δύο πρώτοι όροι της ταυτότητας είναι:

$$\boxed{\{C,\{A,B\}\} + \{A,\{B,C\}\} = D_C D_A B + D_A D_B C = D_C D_A B - D_A D_C B = D_{\{C,A\}} B = -\{B,\{C,A\}\}}$$

κάνοντας χρήση της $D_B C = -D_C B$ και της ταυτότητας για το μεταθέτη που αποδείξαμε. Με το τρόπο αυτό αποδείχθηκε η ταυτότητα του Jacobi.

Η ταυτότητα του Jacobi μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εξεύρεση νέων διατηρησίμων ποσοτήτων.

Άσκηση: (θεώρημα Poisson) Αν οι F,G είναι δύο διατηρήσιμες ποσότητες τότε και η $\{F,G\}$ είναι διατηρήσιμη ποσότητα.