

Κανονικοί τρόποι ταλάντωσης

Θεωρείστε και πάλι τη γενική περίπτωση μικρών κινήσεων περί κάποιο σημείο ισορροπίας, το οποίο λαμβάνουμε ως την αρχή των συντεταγμένων. Η Λαγκρανζιανή είναι:

$$L = \frac{1}{2} \dot{q}^T \mathbf{M} \dot{q} - \frac{1}{2} q^T \mathbf{K} q , \quad (1)$$

όπου ο πίνακας το μαζών $\mathbf{M}$ και της δυναμικής ενεργείας $\mathbf{K}$ είναι $n \times n$ συμμετρικοί πραγματικοί πίνακες, n οι βαθμοί ελευθερίας του προβλήματος και q οι γενικευμένες συντεταγμένες του φυσικού συστήματος $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$. Επίσης επειδή ο πίνακας $\mathbf{M}$ προσδιορίζει την κινητική ενέργεια του συστήματος, η οποία είναι μία πάντοτε θετική ποσότητα, ο $\mathbf{M}$ είναι ένας θετικός πίνακας, δηλαδή για κάθε μη μηδενική πραγματική κολώνα x είναι $x^T \mathbf{M} x > 0$. Ο πίνακας $\mathbf{K}$ δεν είναι αναγκαστικά θετικός πίνακας. Αν όμως η δυναμική ενέργεια στο σημείο ισορροπίας έχει ελάχιστο τότε ο πίνακας $\mathbf{K}$ είναι θετικός. Θυμηθείτε ότι τα στοιχεία του πίνακα $\mathbf{K}$ είναι

$$K_{ij} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right)_{q=0} \quad (2)$$

και επειδή στο σημείο ισορροπίας $q = 0$ είναι $(\partial V / \partial q)_{q=0} = 0$, η δυναμική ενέργεια σε προσέγγιση δεύτερης τάξης είναι:

$$V(q) = V(0) + \frac{1}{2} q^T \mathbf{K} q + O(q^3) , \quad (3)$$

και πράγματι αν ο πίνακας $\mathbf{K}$ είναι θετικός, τότε $q^T \mathbf{K} q > 0$, η δυναμική ενέργεια στο σημείο ισορροπίας είναι ελάχιστη. Θα δείξουμε ότι στη περίπτωση αυτή έχουμε μόνο ταλαντωτικές λύσεις και το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές. Αν ο πίνακας $\mathbf{K}$ δεν είναι θετικός έχουμε αστάθεια.

Οι εξισώσεις κίνησης είναι:

$$\mathbf{M} \ddot{q} + \mathbf{K} q = 0 . \quad (4)$$

Οι κανονικές ταλάντωσης του συστήματος είναι κινήσεις της μορφής $a e^{-i\Omega t}$, όπου οι συντεταγμένες του άνυσματος κολώνα a προσδιορίζει τα πλάτη των συντεταγμένων όταν όλες οι συντεταγμένες του συστήματος ταλαντώνονται με συχνότητα Ω . Το άνυσμα a ονομάζεται κανονικός τρόπος ταλάντωσης του συστήματος και η Ω χαρακτηριστική συχνότητα (ή κανονική συχνότητα) του συστήματος.

Αντικαθιστώντας τη λύση αυτή στις εξισώσεις κίνησης (4) θα πρέπει τα a και Ω να ικανοποιούν τη σχέση:

$$\mathbf{K} a = \Omega^2 \mathbf{M} a . \quad (5)$$

Συνεπώς το Ω^2 είναι ιδιοτιμή του πίνακα $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}$ και το a ιδιοάνυσμά του. Όταν έχουμε ένα βαθμό ελευθερίας ($n = 1$) οι πίνακες $\mathbf{M}$ και $\mathbf{K}$ είναι αριθμοί και η συχνότητα ταλάντωσης είναι $\omega^2 = k/m$. Βλέπετε, ότι σε ένα σύστημα n βαθμών ελευθερίας οι συχνότητες ταλάντωσης δίδονται από τις ιδιοτιμές του πίνακα $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}$ που είναι γενικέυση σε

n διαστάσεις του λόγου k/m . Στη γενίκευση όμως αυτή ο αντίστροφος πίνακας των μαζών προτάσσεται του πίνακα των σταθερών του Hooke. Η σειρά δε των πινάκων είναι σημαντική, διότι ενώ όλοι αριθμοί αντιμετωπίζονται, δύο πίνακες δεν είναι αναγκαίο να αντιμετωπίζονται.

Για να έχει το γραμμικό αλγεβρικό σύστημα (5) μη τετριμμένη μηδενική λύση a θα πρέπει το Ω να είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου:

$$\det(\mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M}) = 0 \quad , \quad (6)$$

που είναι ένα πολυώνυμο n βαθμού ως προς Ω^2 . Η (6) θα έχει γενικά n ρίζες, οι οποίες μπορεί να είναι και μιγαδικές. Θα δείξουμε όμως ότι η (6) έχει αναγκαστικά n πραγματικές ρίζες. Για να το δείξουμε αυτό λαμβάνουμε τον ερμιτιανό ανάστροφο¹ της (5):

$$a^\dagger \mathbf{K} = \Omega^{*2} a^\dagger \mathbf{M} \quad (7)$$

και πολλαπλασιάζουμε από δεξιά με το a , οπότε έχουμε:

$$a^\dagger \mathbf{K} a = \Omega^{*2} a^\dagger \mathbf{M} a \quad . \quad (8)$$

Επειδή όμως $\mathbf{K} a = \Omega^2 \mathbf{M} a$ η παραπάνω σχέση γράφεται ως: $\Omega^2 a^\dagger \mathbf{M} a = \Omega^{*2} a^\dagger \mathbf{M} a$ ή

$$(\Omega^2 - \Omega^{*2}) a^\dagger \mathbf{M} a = 0 \quad . \quad (9)$$

Ο πίνακας $\mathbf{M}$ είναι όμως θετικός και για κάθε μη μηδενικό a θα είναι $a^\dagger \mathbf{M} a > 0$. Συνεπώς $\Omega^2 = \Omega^{*2}$ και τα Ω^2 είναι πραγματικά.

Άσκηση: Ο $\mathbf{M}$ έχει ορισθεί θετικός όταν για κάθε x , μη μηδενικό πραγματικό, $x^T \mathbf{M} x > 0$. Αποδείξτε ότι και για κάθε z , μη μηδενικό μιγαδικό, είναι επίσης $z^\dagger \mathbf{M} z > 0$.

Επειδή τα ιδιοανύσματα a προκύπτουν από τη λύση του γραμμικού συστήματος (5) του οποίου όλοι οι συντελεστές είναι πραγματικοί αριθμοί τα ιδιοανύσματα μπορούν να λαμβάνονται ως πραγματικά. Παρατηρείστε ότι οι χαρακτηριστικές συχνότητες δίδονται από το λόγο:

$$\Omega^2 = \frac{a^T \mathbf{K} a}{a^T \mathbf{M} a} \quad , \quad (10)$$

όπου το a είναι ένας κανονικός τρόπος ταλάντωσης. Από αυτό το πηλίκο μπορούμε να προσδιορίσουμε το πρόσημο του Ω^2 . Επειδή ο παρονομαστής είναι πάντοτε θετικός αριθμός το πρόσημο του Ω^2 εξαρτάται από το πρόσημο του αριθμητή. Αν ο πίνακας $\mathbf{K}$ είναι θετικός τότε το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές διότι όλα τα Ω^2 είναι θετικά και έχουμε ταλαντωτικές κινήσεις. Όταν ο $\mathbf{K}$ δεν είναι θετικός θα υπάρχουν και αρνητικά Ω^2 και θα έχουμε ως λύσεις και ζεύγη εκθετικά μειούμενων και αυξανόμενων λύσεων $e^{\pm|\Omega|t}$, και το

¹Ο ερμιτιανός ανάστροφος ενός πίνακα $\mathbf{A}$ είναι ο ανάστροφος του συζυγούς πίνακα $\mathbf{A}^*$. Ο ανάστροφος συμβολίζεται με ένα σπαθί (dagger) και συνεπώς $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^{*T}$. Αν ο πίνακας είναι πραγματικός ο ερμιτιανός ανάστροφος είναι απλώς ο ανάστροφος πίνακας. Οι ερμιτιανοί πίνακες (hermitian) είναι οι πίνακες που ισούνται με τον ερμιτιανό ανάστρόφo τους: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger$, και επέχουν τη θέση των συμμετρικών πραγματικών πινάκων. Είναι εύκολο να διαπιστώσετε ότι $(\mathbf{AB})^\dagger = \mathbf{B}^\dagger \mathbf{A}^\dagger$.

σημείο ισορροπίας είναι ασταθές. Αυτό είναι λογικό διότι παρότι μπορεί να υπάρχουν αρχικές συνθήκες από τις οποίες η κίνηση είναι ταλαντωτική, η πιθανότητα να παρασκευάσει κανείς το σύστημα σε αυτή τη κατάσταση έχει μηδενική πιθανότητα. Όταν έχουμε αστάθεια παρότι αρχικά μπορεί να έχουν διεγερθεί όλοι οι βαθμοί ελευθερίας με τη πάροδο του χρόνου η διαταραχή θα αποκτήσει τη δομή του κανονικού τρόπου ταλάντωσης που δίνει τη μέγιστη εκθετική αύξηση (πόσος χρόνος απαιτείται για την υπέρσχυση αυτού του κανονικού τρόπου ;).

Έστω τώρα δύο κανονικοί τρόποι a_i, a_j αντιστοιχούν σε διαφορετικές χαρακτηριστικές συχνότητες Ω_i^2, Ω_j^2 . Τι μπορούμε να πούμε για την σχέση ορθογωνιότητας των ; Επαναλαμβάνουμε τα βήματα που ακολούθησαμε προηγουμένως. Υποθέσαμε ότι:

$$\mathbf{K}a_i = \Omega_i^2 \mathbf{M}a_i, \quad \mathbf{K}a_j = \Omega_j^2 \mathbf{M}a_j. \quad (11)$$

Αναστρέφουμε μία από τις δύο σχέσεις (επειδή όλα τα στοιχεία είναι πραγματικά δεν παίρνουμε πλέον τον ερμιτιανό ανάστροφο):

$$a_i^T \mathbf{K} = \Omega_i^2 a_i^T \mathbf{M}, \quad (12)$$

και πολλαπλασιάζουμε από δεξιά με το a_j :

$$a_i^T \mathbf{K}a_j = \Omega_i^2 a_i^T \mathbf{M}a_j, \quad (13)$$

οπότε

$$\Omega_j^2 a_i^T \mathbf{M}a_j = \Omega_i^2 a_i^T \mathbf{M}a_j, \quad (14)$$

που συνεπάγεται ότι

$$(\Omega_j^2 - \Omega_i^2) a_i^T \mathbf{M}a_j = 0, \quad (15)$$

και επειδή έχουμε λάβει $\Omega_i^2 \neq \Omega_j^2$ θα είναι:

$$a_i^T \mathbf{M}a_j = 0. \quad (16)$$

Δηλαδή οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης δεν είναι ορθογώνιοι με την Ευκλείδεια έννοια, $a_i^T a_j = 0$, αλλά υπό τη γενικότερη έννοια $a_i^T \mathbf{M}a_j = 0$. Επιλέγουμε δε να κανονικοποιήσουμε τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης στη μετρική $\mathbf{M}$ επιλέγοντάς τα ανύσματα ώστε $a_i^T \mathbf{M}a_i = 1$ και αυτό είναι εφικτό διότι ο πίνακας $\mathbf{M}$ είναι θετικός.

Αν όλες οι χαρακτηριστικές συχνότητες είναι διαφορετικές έχουμε n γραμμικώς ανεξάρτητους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης a_i κανονικοποιημένους με τη μετρική των μαζών $\mathbf{M}$. Οι σχέσεις ορθογωνιότητας $a_i^T \mathbf{M}a_j = \delta_{ij}$ μπορούν να γραφούν όμορφα αν ορίσουμε τον $n \times n$ πίνακα:

$$\mathbf{A} = [a_1, a_2, \dots, a_n], \quad (17)$$

που έχει ως κολώνες του τα ανύσματα των κανονικών τρόπων ταλάντωσης. Με τον τρόπο μπορείτε να ελέγξετε ότι οι σχέσεις ορθογωνιότητας γράφονται ως:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{A} = \mathbf{I}. \quad (18)$$

όπου ο πίνακας $\mathbf{I}$ είναι ο μοναδιαίος πίνακας. Επίσης, όλες οι σχέσεις (5), που ικανοποιούνται από τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης μπορούν να γραφούν ως:

$$\mathbf{K}\mathbf{A} = \mathbf{M}\mathbf{A}\Delta, \quad (19)$$

όπου Δ ένας διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία τις χαρακτηριστικές συχνότητες: Ω_i^2 (προσέξτε τη σειρά των πινάκων).

Τι συμβαίνει όμως όταν υπάρχουν δύο ή περισσότεροι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης που έχουν την ίδια κανονική συχνότητα; Μία τέτοια περίπτωση είναι οι μικρές κινήσεις στο χώρο ενός εκκρεμούς στο πεδίο βαρύτητας, οι κινήσεις δηλαδή του καλούμενου σφαιρικού εκκρεμούς. Στο πρόβλημα αυτό υπάρχει μία μόνο κανονική συχνότητα, $\Omega = \sqrt{g/l}$ όπου l το μήκος του νήματος του εκκρεμούς, και οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης είναι η κίνηση του εκκρεμούς σε οποιοδήποτε κατακόρυφο επίπεδο. Με το παράδειγμα αυτό φαίνεται ότι δεν συμβαίνει τίποτα το εξαιρετικό όταν υπάρχει αυτός ο εκφυλισμός των συχνοτήτων.² Ενώ δύο τυχαίοι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης δεν είναι αναγκαστικά ορθογώνιοι, ως προς τη μετρική $\mathbf{M}$, είναι προφανές ότι μπορούμε να επιλέξουμε δύο τρόπους ταλάντωσης (κίνηση σε δύο κάθετα κατακόρυφα επίπεδα) που είναι ορθογώνιοι μεταξύ τους. Θα δείξουμε ότι αυτό μπορεί να γίνει πάντοτε.

Έστω λοιπόν ότι τα a_1, a_2 είναι δύο διαφορετικοί κανονικοί τρόποι ταλάντωσης με χαρακτηριστική συχνότητα Ω^2 . Τότε επειδή:

$$\mathbf{K}a_1 = \Omega^2\mathbf{M}a_1, \quad \mathbf{K}a_2 = \Omega^2\mathbf{M}a_2, \quad (20)$$

κάθε άνυσμα $a = \lambda a_1 + \mu a_2$ που προκύπτει από γραμμικό συνδυασμό των a_1 και a_2 θα είναι κανονικός τρόπος ταλάντωσης με συχνότητα Ω^2 . Διότι πολλαπλασιάζοντας τις (20) με λ και μ αντιστοίχως και προσθέτοντας έχουμε:

$$\mathbf{K}(\lambda a_1 + \mu a_2) = \Omega^2\mathbf{M}(\lambda a_1 + \mu a_2). \quad (21)$$

Αν οι κανονικοί τρόποι a_1, a_2 δεν είναι ορθογώνιοι, δηλαδή $a_1^T \mathbf{M} a_2 \neq 0$, τότε ο κανονικός τρόπος ταλάντωσης

$$a'_2 = a_2 - \frac{a_1^T \mathbf{M} a_2}{a_1^T \mathbf{M} a_1} a_1, \quad (22)$$

θα είναι ορθογώνιος του a_1 , δηλαδή: $a_1^T \mathbf{M} a'_2 = 0$. Αυτή η κατασκευή μπορεί να επεκταθεί και σε άλλους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης που έχουν την ίδια χαρακτηριστική συχνότητα. Συνεπώς μπορούμε σε κάθε περίπτωση να υποθέσουμε ότι όλοι οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης είναι ορθογώνιοι μεταξύ τους και ο πίνακας $\mathbf{A}$ μπορεί να πάντοτε να κατασκευασθεί ώστε $\mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{A} = \mathbf{I}$.

Οι χαρακτηριστικές συντεταγμένες

²Είναι περίεργο ότι και ο Lagrange και Laplace πίστευαν λανθασμένα ότι όταν εμφανίζεται αυτός ο εκφυλισμός των κανονικών συχνοτήτων θα πρέπει να υπάρχει συντονισμός και να εμφανίζονται λύσεις που αυξάνονται γραμμικά με τον χρόνο. Αυτό δεν μπορεί να συμβεί σε αυτό το πρόβλημα στο οποίο οι πίνακες είναι ερμιτιανοί. Συμβαίνει όμως σε μη ερμιτιανούς πίνακες.

Οι χαρακτηριστικές συχνότητες είναι φυσική ιδιότητα του συστήματος και δεν εξαρτώνται από τις συντεταγμένες. Οποιοσδήποτε γραμμικός μετασχηματισμός των συντεταγμένων θα διατηρήσει τη γραμμικότητα των εξισώσεων κίνησης και θα δώσει τις ίδιες χαρακτηριστικές συχνότητες.

Άσκηση: Αποδείξτε αυτή τη πρόταση.

Όπως ήδη συζητήσαμε στο παράδειγμα αν ορίσουμε τις χαρακτηριστικές συντεταγμένες 3Q ως εξής:

$$q = \mathbf{A}Q \quad , \quad Q = \mathbf{A}^{-1}q \quad , \quad (23)$$

τότε η Λαγκρανζιανή χωρίζεται στη Λαγκρανζιανή n ανεξαρτήτων ταλαντωτών. Πράγματι στις χαρακτηριστικές συντεταγμένες η Λαγκρανζιανή (1) γράφεται χρησιμοποιώντας την ορθογωνιότητα των κανονικών τρόπων ταλάντωσης (18) και την (19):

$$L = \frac{1}{2} \left(\dot{Q}^T \mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{A} \dot{Q} - Q^T \mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A} Q \right) = \frac{1}{2} \left(\dot{Q}^T \dot{Q} - Q^T \Delta Q \right) \quad , \quad (24)$$

όπου ο διαγώνιος πίνακας Δ έχει ως στοιχεία του τα τετράγωνα των χαρακτηριστικών συχνοτήτων. Η Λαγκρανζιανή αυτή γράφεται συναρτήσει των συντεταγμένων του Q ως:

$$L = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left(\dot{Q}_i^2 - \Omega_i^2 Q_i^2 \right) \quad , \quad (25)$$

και στις χαρακτηριστικές συντεταγμένες το φυσικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το σύστημα n ανεξάρτητων ταλαντωτών. Πράγματι οι εξισώσεις κίνησης για τα Q_i είναι

$$\ddot{Q}_i + \Omega_i^2 Q_i = 0 \quad , \quad (26)$$

με λύση:

$$Q_i(t) = \begin{cases} \alpha_i \cos(\Omega_i t + \delta_i), & \Omega_i^2 > 0 ; \\ \alpha_i (t + \delta_i), & \Omega_i^2 = 0 ; \\ \alpha_i \cosh(\Omega_i t + \delta_i), & \Omega_i^2 < 0. \end{cases} \quad (27)$$

Επικεντρωνόμαστε στη περίπτωση όπου το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές και έχουμε ταλαντωτικές λύσεις. Στις χαρακτηριστικές συντεταγμένες κάθε Q_i ταλαντώνεται με συχνότητα Ω_i . Ο αριθμός των συχνοτήτων είναι δε ίσος με τους βαθμούς ελευθερίας του συστήματος (λαμβάνοντας υπ' όψη και τους τυχόν εκφυλισμούς συχνοτήτων). Οι αρχικές συντεταγμένες q_i (που θα μπορούσαν να είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες των θέσεων ενός συστήματος μαζών συνεδεμένων με ελατήρια) μπορούν αμέσως να βρεθούν πολλαπλασιάζοντας το $Q = [Q_1(t), Q_2(t), \dots, Q_n(t)]^T$ με τον πίνακα $\mathbf{A}$.

$$q(t) = \mathbf{A}Q(t) \quad (28)$$

ή

$$q_i(t) = \sum_{j=1}^n A_{ij} Q_j(t) \quad . \quad (29)$$

³Χρησιμοποιείται και ο όρος κανονικές συντεταγμένες (normal coordinates). Αποφεύγεται όμως εδώ για να μη δημιουργηθεί σύγχυση με τις κανονικές συντεταγμένες της Χαμιλτονιανής μηχανικής.

Ας εξετάσουμε μερικές ενδιαφέρουσες ειδικές περιπτώσεις. Ας υποθέσουμε πρώτον ότι μόνον ένας κανονικός τρόπος ταλάντωσης διεγείρεται, έστω ο j . Τότε οι συντελεστές a_i είναι μηδενικοί εκτός του a_j , δηλαδή:

$$a_i = a_j \delta_{ij} , \quad (30)$$

οπότε η κίνηση στις αρχικές συντεταγμένες είναι (χωρίς αθροιστική σύμβαση)

$$q_i(t) = A_{ij} a_j \cos(\Omega_j t + \delta_j) . \quad (31)$$

Έχουμε διεγείρει δηλαδή τον j κανονικό τρόπο ταλάντωσης: όλοι οι βαθμοί ελευθερίας του συστήματος ταλαντώνονται με την χαρακτηριστική συχνότητα Ω_j με πλάτη ανάλογα των συντεταγμένων του j κανονικού τρόπου ταλάντωσης a_j .

Μία άλλη ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι όταν αρχικά το σύστημα είναι ακίνητο με όλες τις συντεταγμένες του συστήματος στη θέση ισορροπίας εκτός από τη j συντεταγμένη η οποία βρίσκεται στη θέση $q_j(0)$. Επειδή η αρχική ταχύτητα είναι μηδενική, η ταχύτητα θα είναι μηδενική και στις χαρακτηριστικές συντεταγμένες, οπότε η μετέπειτα κίνηση είναι:

$$q_i(t) = \sum_{j=1}^n A_{ij} Q_j(0) \cos(\Omega_i t) . \quad (32)$$

Επειδή αρχικά

$$q(0) = [0, 0, \dots, q_j(0), 0, 0, \dots]^T \quad (33)$$

η αρχική διέγερση των χαρακτηριστικών συντεταγμένων θα είναι (χωρίς αθροιστική σύμβαση):

$$Q_i(0) = (A^{-1})_{ij} q_j(0) . \quad (34)$$

Παρατηρείτε ότι αναμένεται να διεγερθούν όλοι οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης και η κίνηση μεταφέρεται σε όλες τις συντεταγμένες q και η κίνηση είναι μία πολύπλοκη υπέρθεση ταλαντώσεων στις n συχνότητες Ω_i .

Άσκηση: Το σύστημα εκτελεί περιοδική κίνηση όταν υπάρχει ένας ελάχιστος χρόνος T , για τον οποίο $q(t) = q(t + T)$. Ο χρόνος T ονομάζεται η περίοδος του συστήματος. Δείξτε ότι μόνον όταν οι χαρακτηριστικές συχνότητες είναι ρητοί αριθμοί προκύπτει περιοδική κίνηση. Ποία η περίοδος της κίνησης; Όταν οι χαρακτηριστικές συχνότητες είναι άρρητοι αριθμοί τότε η κίνηση ονομάζεται οιωνεί-περιοδική (quasi-periodic).