

Κανονικές ταλαντώσεις

Είδαμε ήδη ότι φυσικά συστήματα πλησίον ενός σημείου ευαταθούς ισορροπίας συμπεριφέρονται όπως σωματίδια που αλληλεπιδρούν με γραμμικές δυνάμεις επαναφοράς όπως θα συνέβαινε σε σωματίδια που είναι συνδεδεμένα μεταξύ τους με γραμμικά ελατήρια διαφορετικής σκληρότητας. Τι μπορούμε να πούμε για τις ταλαντώσεις αυτού του συστήματος; Επιλέγουμε κάποιο σωματίδιο και αναλύουμε τη κίνησή του με ένα φασματογράφο. Θα παρατηρήσουμε ότι το φάσμα επικεντρώνεται σε ένα πεπερασμένο αριθμό συχνοτήτων και υποθέτουμε, επειδή οι εξισώσεις κίνησης είναι γραμμικές, ότι η κίνηση του σωματιδίου είναι υπέρθεση κινήσεων στις συχνότητες που εντόπισε ο φασματογράφος. Επαναλαμβάνουμε το πείραμα με κάποιο άλλο σωματίδιο. Αναρωτιόμαστε: ο φασματογράφος θα εντοπίσει τις ίδιες συχνότητες; Πόσες συχνότητες ταλάντωσης εντοπίζει ο φασματογράφος; Κάνοντας το πείραμα βρίσκουμε ότι οι συχνότητες που θα εμφανισθούν στη φασματική ανάλυση των σωματιδίων είναι ίδιες για όλα τα σωματίδια. Αυτές οι κοινές συχνότητες λέγονται κανονικές συχνότητες του συστήματος. Οι κοινές αυτές συχνότητες είναι και οι συχνότητες συντονισμού του συστήματος όταν το σύστημα διεγερθεί αρμονικά. Πως εντοπίζονται όμως θεωρητικά αυτές οι συχνότητες;

Πριν αντιμετωπίσουμε το γενικό πρόβλημα των μικρών ταλαντώσεων περί κάποιο σημείο ισορροπίας ας μελετήσουμε την κίνηση των δύο εκκρεμών που εκτελούν μικρές κινήσεις περί το σημείο ισορροπίας τους στο πεδίο βαρύτητας όταν υπάρχει μία ασθενής σύζευξις μεταξύ τους. Μία Λαγκρανζιανή που περιγράφει τη κίνηση τους είναι:

$$L = \frac{1}{2} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - \frac{\omega_g^2}{2} (\theta_1^2 + \theta_2^2) - \frac{\omega_k^2}{2} (\theta_1 - \theta_2)^2, \quad (1)$$

όπου $\omega_g = \sqrt{g/l}$ η συχνότητα ταλάντωσης των εκκρεμών και $\omega_k = \sqrt{k/m}$ η συχνότητα ταλάντωσης του ελατηρίου. Η διάταξη φαίνεται στο σχήμα 1.

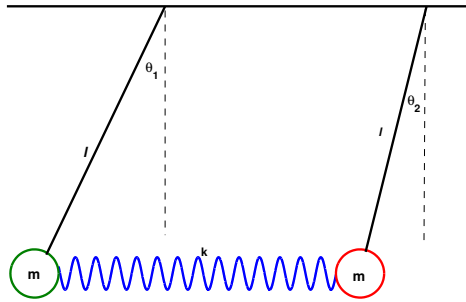
Το φυσικό αυτό σύστημα έχει δύο βαθμούς ελευθερίας, τις γωνίες θ_1 και θ_2 . Η κατάσταση του συστήματος προσδιορίζεται από τη κολώνα πραγματικών αριθμών $\Theta = [\theta_1, \theta_2]^T$, όπου το T συμβολίζει τον ανάστροφο. Ο ανάστροφος του Θ είναι η γραμμή $[\theta_1, \theta_2]$ και το Ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο δύο καταστάσεων $\Theta_1 = [\theta_1, \theta_2]^T$ και $\Theta_2 = [\theta_3, \theta_4]^T$ γράφεται ως $\Theta_1^T \Theta_2 = \theta_1 \theta_3 + \theta_2 \theta_4$. (Εάν η κατάσταση προσδιοριζόταν από κολώνα μιγαδικών αριθμών τότε το ανάστροφο πρέπει στα παραπάνω να αντικατασταθεί από το ερμιτιανό ανάστροφο, που συμβολίζεται με $\dagger$, και $\Theta^\dagger = [\theta_1^*, \theta_2^*]^T$, όπου * συμβολίζει το συζυγές. Σε αυτή τη περίπτωση το εσωτερικό γινόμενο είναι $\Theta_1^\dagger \Theta_2$).

Χρησιμοποιώντας ως συντεταγμένη την Θ η Λαγκρανζιανή συνάρτηση παίρνει τη μορφή:

$$L = \frac{1}{2} \dot{\Theta}^T \dot{\Theta} - \frac{1}{2} \Theta^T \mathbf{K} \Theta, \quad (2)$$

όπου ο σταθερός πίνακας $\mathbf{K}$ της δυναμικής ενέργειας χωρίς έλλειψη της γενικότητας μπορεί να ληφθεί ο συμμετρικός πίνακας (ερώτηση: γράψτε μία μη συμμετρική μορφή το πίνακα αυτού):

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \omega_g^2 + \omega_k^2 & -\omega_k^2 \\ -\omega_g^2 & \omega_g^2 + \omega_k^2 \end{pmatrix}. \quad (3)$$



Σχήμα 1: Συζευγμένα εκκρεμή

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange είναι:

$$\ddot{\Theta} + \mathbf{K}\Theta = 0, \quad (4)$$

οι οποίες είναι συμβολικά ίδιες με την εξίσωση ταλαντωτή μοναδιαίας μάζας. Η διαφορά εδώ είναι ότι ο $\mathbf{K}$ είναι πίνακας αντί να είναι αριθμός και η δυσκολία χαρακτηρισμού της λύσης έγκειται στο ότι ο πίνακας $\mathbf{K}$ δεν είναι διαγώνιος. Διότι αν ήταν διαγώνιος τότε οι δύο συντεταγμένες θα εκτελούσαν κινήσεις ανεξάρτητες και το πρόβλημα θα αναγόταν σε δύο ανεξάρτητα προβλήματα στη μία διάσταση. Γνωρίζουμε επίσης ότι στη μία διάσταση, όταν ο $\mathbf{K}$ είναι θετικός αριθμός έχουμε ταλαντωτικές λύσεις περί το σημείο ισορροπίας και το σημείο ισορροπίας χαρακτηρίζεται ως ευσταθές, όταν είναι αρνητικός αριθμός έχουμε εκθετικά αυξανόμενες λύσεις και το σημείο ισορροπίας χαρακτηρίζεται ως ασταθές. Είναι αναγκαία η γενίκευση της έννοιας του θετικού όταν ο $\mathbf{K}$ είναι πίνακας. Θα δούμε ότι η κατάλληλη γενίκευση είναι ο συμμετρικός πίνακας $\mathbf{K}$ να είναι θετικά ορισμένος να έχει δηλαδή την ιδιότητα $x^T \mathbf{K} x > 0$ για κάθε μη μηδενική κολώνα x ή ισοδυνάμως ο $\mathbf{K}$ ονομάζεται θετικά ορισμένος όταν είναι συμμετρικός και έχει θετικές ιδιοτιμές. Τότε η γενική κίνηση είναι ταλαντωτική και το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές. Άλλως το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές. Η διερεύνηση της ευστάθειας ή αστάθειας δηλαδή κάποιου σημείου ισορροπίας ανάγεται μέσω της εξίσωσης (4) στη θετικότητα ή μη του συμμετρικού πίνακα $\mathbf{K}$.

Επειδή η (4) είναι γραμμική διαφορική εξίσωση και οι συντελεστές της δεν έχουν χρονική εξάρτηση γνωρίζουμε ότι θα υπάρχουν ειδικές λύσεις της μορφής $\Re(ae^{i\Omega t})$, όπου $\Re$ συμβολίζει το πραγματικό μέρος. Μπορούμε να ερευνήσουμε την υπάρξη τέτοιων λύσεων στο πεδίο των μιγαδικών διότι η δυναμική εξίσωση (4) είναι γραμμική και οι συντελεστές της πραγματικοί, οπότε αν μία μιγαδική λύση ικανοποιεί την εξίσωση το πραγματικό και φανταστικό της μέρος θα ικανοποιεί επίσης την εξίσωση. Οι λύσεις αυτές ονομάζονται

κανονικοί τρόποι ταλάντωσης και πραγματοποιούνται με κατάλληλες αρχικές τιμές των Θ και $\dot{\Theta}$. Όταν το σύστημα βρίσκεται σε μία τέτοια κατάσταση τότε όλες οι συντεταγμένες ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα Ω , η οποία ονομάζεται κανονική συχνότητα, με πλάτη ανάλογα των συντεταγμένων του κανονικού ιδιοανύσματος a .

Στο πρόβλημα των δύο εκκρεμών είναι εύκολο χωρίς να κάνουμε υπολογισμούς να προσδιορίσουμε τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης. Ο ένας τρόπος είναι να κινούνται τα δύο σώματα με μετατοπίσεις $\theta_1 = \theta_2$ οπότε και τα δύο σώματα ταλαντώνονται με την συχνότητα ταλάντωσης του εκκρεμούς $\Omega_1 = \omega_g$ δεδομένου ότι το ελατήριο δεν επιμηκύνεται κατά τη κίνηση. Ότι αυτή η κίνηση αποτελεί δυνατή κίνηση των εκκρεμών προκύπτει και από τη Λαγκρανζιανή, διότι για ίσες μετατοπίσεις η Λαγκρανζιανή είναι:

$$L = \dot{\theta}_1^2 - \omega_g^2 \theta_1^2, \quad (5)$$

οπότε η κίνηση είναι ταλάντωση στη συχνότητα του εκκρεμούς. Το κανονικοποιημένο ιδιοάνυσμα a_1 που αντιστοιχεί στη κανονική αυτή συχνότητα είναι:

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Μία τέτοια ταλάντωση προκύπτει αν οι αρχικές μετατοπίσεις των εκκρεμών είναι ίσες και η ταχύτητα τους μηδενική, οπότε και οι γωνίες των εκκρεμών θα είναι: $\Theta(t) = \theta_0 a_1 \cos(\omega_g t)$, όπου θ_0 η αρχική θέση των εκκρεμών. Αν τα εκκρεμή βρίσκονται στη θέση ισορροπίας με ίσες αρχικές ταχύτητες $\dot{\theta}_0$, τότε η μετέπειτα κίνηση θα είναι: $\Theta(t) = \theta_0 a_1 \sin(\omega_g t)/\omega_g$.

Η δεύτερη κανονική συχνότητα προκύπτει όταν τα εκκρεμή κινούνται με ίσες και αντίθετες μετατοπίσεις: $\theta_1 = -\theta_2$. Επειδή δεν υπάρχει τίποτε να διαχωρίσει το ένα σωματίδιο από το άλλο και πάλι η συχνότητα ταλάντωσης των συζευγμένων εκκρεμών θα είναι η ίδια, η δε συχνότητα αυτής της ταλάντωσης υπολογίζεται παρατηρώντας ότι στη δύναμη επαναφοράς από το πεδίο της βαρύτητας, που είναι ανάλογη της μετατόπισης με συντελεστή ω_g^2 , πρέπει να προστεθεί η δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου που είναι ανάλογη της μετατόπισης με συντελεστή $2\omega_k^2$, δεδομένου ότι λόγω της αντισυμμετρικής μετατόπισης των σωματιδίων το ελατήριο έχει διπλάσια επιμήκυνση, οπότε η κανονική συχνότητα στη περίπτωση αυτή είναι η $\Omega_2 = \sqrt{\omega_g^2 + 2\omega_k^2}$ και το κανονικοποιημένο ιδιοάνυσμα a_2 είναι:

$$a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Πάλι μπορούμε να επιβεβαιώσουμε τη συχνότητα ταλάντωσης θέτοντας $\theta_1 = -\theta_2$ στην Λαγκρανζιανή συνάρτηση η οποία λαμβάνει τότε τη μορφή:

$$L = \dot{\theta}_1^2 - \omega_g^2 \theta_1^2 - 2\omega_k^2 \theta_1^2, \quad (8)$$

η οποία είναι η ίδια με τη Λαγκρανζιανή συνάρτηση με μεταβλητή την θ_2 , οπότε πράγματι και οι δύο συντεταγμένες ταλαντώνονται με τη κανονική συχνότητα Ω_2 . Η ταλάντωση αυτή προκύπτει αν αρχικά οι μετατοπίσεις ή ταχύτητες είναι ίσες και αντίθετες. Αν θ_0 ήταν η αρχική μετατόπιση του πρώτου εκκρεμούς και τα εκκρεμή δεν είχαν αρχική

ταχύτητα τότε οι γωνίες των εκκρεμών είναι: $\Theta(t) = \theta_0 a_2 \cos(\Omega_2 t)$, ενώ αν αρχικά τα σωματίδια βρίσκονταν στο σημείο ισορροπίας με ίσες και αντίθετες αρχικές ταχύτητες η μετέπειτα κίνηση είναι: $\Theta(t) = \dot{\theta}_0 a_2 \sin(\Omega_2 t)/\Omega_2$, όπου $\dot{\theta}_0$ η αρχική ταχύτητα του πρώτου εκκρεμούς. Μόνον όταν έχουμε τις παραπάνω αρχικές συνθήκες το σύστημα ταλαντώνεται σε μία συχνότητα. Για άλλες αρχικές συνθήκες η κίνηση των εκκρεμών είναι υπέρθεση ταλαντώσεων στις δύο κανονικές συχνότητες. Διότι κάθε αρχική συνθήκη $\Theta_0, \dot{\Theta}_0$ είναι στοιχείο του διανυσματικού χώρου των δύο διαστάσεων και μπορεί να αναλυθεί στη βάση των ιδιοανυσμάτων a_1 και a_2 , τα οποία σχηματίζουν μία πλήρη βάση του διανυσματικού χώρου των δύο διαστάσεων. Συνεπώς υπάρχουν αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ τέτοιοι ώστε:

$$\Theta_0 = \alpha a_1 + \gamma a_2, \quad \dot{\Theta}_0 = \beta a_1 + \delta a_2, \quad (9)$$

οπότε η μετέπειτα κίνηση που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες Θ_0 και $\dot{\Theta}_0$ είναι:

$$\Theta(t) = \left(\alpha \cos \Omega_1 t + \frac{\beta}{\Omega_1} \sin \Omega_1 t \right) a_1 + \left(\gamma \cos \Omega_2 t + \frac{\delta}{\Omega_2} \sin \Omega_2 t \right) a_2. \quad (10)$$

Προκύπτει δηλαδή ότι η γενική κίνηση των εκκρεμών είναι υπέρθεση δύο ταλαντώσεων.

Για να προσδιορίσουμε με συστηματικό τρόπο τις κανονικές συχνότητες Ω και τα αντιστοιχούντα κανονικά ιδιοανύσματα a διερευνούμε τι απαιτείται για να ταλαντώνονται όλες οι συντεταγμένες με την αυτή συχνότητα. Αντικαθιστώντας στην (4) λύση της μορφής $ae^{i\Omega t}$ προκύπτει ότι πρέπει το Ω να έχει την κατάλληλη τιμή ώστε μη μηδενικό a να ικανοποιεί το σύστημα εξισώσεων:

$$(\mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{I}) a = 0, \quad (11)$$

όπου $\mathbf{I}$ ο μοναδιαίος πίνακας. Για να υπάρχει μη τετριμμένη μηδενική λύση a πρέπει η ορίζουσα του γραμμικού συστήματος (11) να είναι μηδενική, δηλαδή:

$$\det(\mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{I}) = 0. \quad (12)$$

Η (12) είναι ένα πολύωνυμο δευτέρου βαθμού ως προς Ω^2 , και για να υπάρχει λύση της (11) οι κανονικές συχνότητες Ω^2 πρέπει να είναι οι ρίζες αυτού του πολυωνύμου. Το πολυώνυμο αυτό λέγεται το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $\mathbf{K}$ και στη περίπτωση αυτή οι κανονικές συχνότητες είναι οι ιδιοτιμές του $\mathbf{K}$ και τα a τα ιδιοανύσματά του. Όταν ο πίνακας $\mathbf{K}$ είναι θετικός οι ιδιοτιμές του είναι θετικές και τα Ω είναι πραγματικοί αριθμοί και το σύστημα εκτελεί ταλάντωση.

Ας υπολογίσουμε τώρα τις κανονικές συχνότητες και τα κανονικά ιδιοανύσματα στη περίπτωση των συζευγμένων εκκρεμών. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο (12) είναι:

$$\det \begin{pmatrix} \omega_g^2 + \omega_k^2 - \Omega^2 & -\omega_k^2 \\ -\omega_g^2 & \omega_g^2 + \omega_k^2 - \Omega^2 \end{pmatrix} = (\Omega^2 - \omega_g^2)(\Omega^2 - \omega_g^2 - 2\omega_k^2) = 0, \quad (13)$$

και συνεπώς οι κανονικές συχνότητες είναι η $\Omega_1 = \omega_g$, και η μεγαλύτερη συχνότητα: $\Omega_2 = \sqrt{\omega_g^2 + 2\omega_k^2}$, στην οποία εμφανίζεται η επιρροή της σύζευξης των εκκρεμών. Η (4) δέχεται

λύσεις της μορφής $z_1(t) = a_1 e^{\pm i\Omega_1 t}$, $z_2(t) = a_2 e^{\pm i\Omega_2 t}$, και τα $a_{1,2}$ προκύπτουν από την επίλυση της (11). Το πρώτο ιδιοάνυσμα, $a_1 = [a_{11}, a_{12}]^T$, προκύπτει θέτοντας $\Omega = \Omega_1$ στην (11):

$$\omega_g^2(a_{11} - a_{12}) = 0 \quad , \quad (14)$$

οπότε $a_{11} = a_{12}$ και το κανονικοποιημένο ιδιοδιάνυσμα είναι το (6). Θέτοντας $\Omega = \Omega_2$ στην (11) προκύπτει ότι τα στοιχεία του $a_2 = [a_{21}, a_{22}]^T$ πρέπει να ικανοποιούν την εξίσωση:

$$-\omega_k^2(a_{21} + a_{22}) = 0 \quad , \quad (15)$$

οπότε $a_{21} = -a_{22}$ και το δεύτερο ιδιοάνυσμα είναι το (7).

Από τις τέσσερις λύσεις της (4), $z_1(t) = a_1 e^{\pm i\Omega_1 t}$, $z_2(t) = a_2 e^{\pm i\Omega_2 t}$ μπορούμε να κατασκευάσουμε τέσσερις πραγματικές λύσεις παίρνοντας το πραγματικό και φανταστικό μέρος των z_1, z_2 , που είναι διαδοχικά:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \Re(z_1) = a_1 \cos(\Omega_1 t) \quad , \quad x_2(t) = \Im(z_1) = a_1 \sin(\Omega_1 t) \quad , \\ x_3(t) &= \Re(z_2) = a_2 \cos(\Omega_2 t) \quad , \quad x_4(t) = \Im(z_2) = a_2 \sin(\Omega_2 t) \quad . \end{aligned} \quad (16)$$

Αυτές οι λύσεις σχηματίζουν μία πλήρη βάση αρχικών συνθηκών στην οποία μπορεί να αναλυθεί κάθε αρχική συνθήκη οπότε η γενική λύση θα δίνεται από την (10). Ισοδυνάμως η γενική λύση μπορεί να γραφεί και ως :

$$\Theta(t) = \Re \left(A e^{-i\Omega_1 t} a_1 + B e^{-i\Omega_2 t} a_2 \right) \quad , \quad (17)$$

όπου $A = \alpha + \beta/\Omega_1$, $B = \gamma + \delta/\Omega_2$ μιγαδικοί αριθμοί που προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες. Βλέπουμε ότι όταν γράφεται η λύση σε αυτή τη μορφή διατηρούμε τη μιγαδική λύση με το αρνητικό πρόσημο. Θα μπορούσαμε να την γράψουμε και με το θετικό. Ακολουθείται όμως η σύμβαση να χρησιμοποιείται ο αρνητικός εκθέτης ώστε η εξέλιξη στο μιγαδικό επίπεδο των κανονικών ταλαντώσεων, π.χ. της $A e^{-i\Omega_1 t}$, να γίνεται με τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

Οι κανονικές συχνότητες που προέκυψαν είναι φυσική ιδιότητα του φυσικού προβλήματος και δεν εξαρτώνται από τις συντεταγμένες που επιλέξαμε. Βεβαίως με μία γενική αλλαγή συντεταγμένων οι γραμμικές δυναμικές εξισώσεις (4) μπορούν να μετατραπούν σε μη γραμμικές και ενώ οι λύσεις θα συμπεριλαμβανούν τις μετασχηματισμένες στις νέες συντεταγμένες κανονικές ταλαντώσεις οι λύσεις δεν μπορούν να βρεθούν στις νέες συντεταγμένες κάνοντας χρήση της τεχνικής που ακολουθήσαμε για τη γραμμική μορφή των εξισώσεων κίνησης (μάλιστα δε υπάρχει γενικός τρόπος λύσης των εξισώσεων κίνησης όταν οι εξισώσεις είναι μη γραμμικές). Η γραμμικότητα των εξισώσεων κίνησης διατηρείται μόνον όταν κάνουμε αλλαγές συντεταγμένων που είναι γραμμικός μετασχηματισμός των αρχικών συντεταγμένων, δηλαδή οι νέες συντεταγμένες Ξ να σχετίζονται με τις αρχικές Θ μέσω του γραμμικού μετασχηματισμού: $\Xi = \mathbf{T}\Theta$, όπου $\mathbf{T}$ ένας πίνακας 2×2 δεδομένου ότι ο θεσεογραφικός χώρος είναι διδιάστατος. Πράγματι στις νέες συντεταγμένες ο πίνακας $\mathbf{K}$ μετασχηματίζεται στον $\mathbf{TKT}^{-1}$ διότι πολλαπλασιάζοντας την (4) με τον πίνακα $\mathbf{T}$ σχηματίζουμε την εξίσωση κίνησης στις συντεταγμένες Ξ :

$$\ddot{\Xi} + (\mathbf{TKT}^{-1})\Xi = 0 \quad , \quad (18)$$

η οποία δίνει τις ίδιες κανονικές συχνότητες.

Άσκηση : Αποδείξτε κανοντας χρήση των ιδιοτήτων των οριζουσών ότι οι κανονικές συχνότητες είναι ανεξάρτητες από τις συντεταγμένες.

Άσκηση : Μετασχηματίστε την Λαγκρανζιανή συνάρτηση στις νέες συντεταγμένες και δείξτε ότι οι εξισώσεις Euler-Lagrange δίνουν τις εξισώσεις κίνησης (18).

Εάν ο μετασχηματισμός $\mathbf{T}$ επιλεγεί ώστε ο πίνακας $\mathbf{K}_d = \mathbf{T}\mathbf{K}\mathbf{T}^{-1}$ γίνει διαγώνιος τότε θα έχουμε δύο ανεξάρτητες ταλαντώσεις στις συχνότητες που είναι οι τετραγωνικές ρίζες των διαγωνίων στοιχείων του $\mathbf{K}_d$, δηλαδή οι κανονικές συχνότητες εμφανίζονται αμέσως στο διαγωνοποιημένο πίνακα στις κατάλληλες συντεταγμένες. Σε αυτές δε τις συντεταγμένες τα κανονικά ιδιοανύσματα είναι προφανώς τα:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

Άρα ο μετασχηματισμός $\mathbf{T}$ που διαγωνοποιεί τον $\mathbf{K}$ είναι αυτός που μετασχηματίζει το b_1 με τον $\mathbf{T}^{-1}$ στο a_1 και το b_2 στο a_2 . Δηλαδή ο κατάλληλος μετασχηματισμός είναι $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{A}$ ή $\mathbf{T} = \mathbf{A}^{-1}$, όπου ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι ο πίνακας που έχει ως κολώνες τα κανονικά ιδιοανύσματα:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

και ο μετασχηματισμός στις νέες συντεταγμένες στις οποίες διαγωνοποιείται ο $\mathbf{K}$ είναι ο

$$\Theta = \mathbf{A} \Xi. \quad (21)$$

Οι συντεταγμένες αυτές λέγονται κανονικές συντεταγμένες.

Ας ελέγξουμε τα συμπεράσματά μας. Κάνουμε δύο παρατηρήσεις. Έπειδή τα a_1 και a_2 είναι ιδιοανύσματα του $\mathbf{K}$ θα ισχύουν οι σχέσεις: $\mathbf{K}a_1 = \Omega_1^2 a_1$ και $\mathbf{K}a_2 = \Omega_2^2 a_2$. Οι δύο αυτές σχέσεις μπορούν να συμπληχθούν ως εξής:

$$\mathbf{K}\mathbf{A} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \Omega_1^2 & 0 \\ 0 & \Omega_2^2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{K}_d, \quad (22)$$

όπου ο πίνακας $\mathbf{A}$ έχει ως κολώνες τα κανονικά ιδιοανύσματα a_1 και a_2 (Προσέξτε τη σειρά των πινάκων, πρώτα έρχεται ο $\mathbf{A}$ και έπειτα ο $\mathbf{K}_d$). Επίσης, επειδή τα κανονικά ιδιοανύσματα σχηματίζουν μία ορθοκανονική βάση δηλαδή είναι $a_i^T a_j = \delta_{ij}$ με $i, j = 1, 2$ θα είναι και $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}$ διότι

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Συνεπώς ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι ορθογώνιος: $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$. Πολλαπλασιάζοντας την (22) με τον $\mathbf{A}^T$ έχουμε ότι:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{K}_d = \mathbf{K}_d. \quad (24)$$

Αντικαθιστώντας τέλος τον μετασχηματισμό (21) στην (2) η Λαγκρανζιανή στις νέες συντεταγμένες γίνεται:

$$L = \frac{1}{2} \dot{\Xi}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \dot{\Xi} - \frac{1}{2} \Xi^T \mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A} \Xi = \frac{1}{2} \dot{\Xi}^T \dot{\Xi} - \frac{1}{2} \Xi^T \mathbf{K}_d \Xi. \quad (25)$$

Δηλαδή στις κανονικές συντεταγμένες

$$\Xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1}\Theta = \mathbf{A}^T\Theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \theta_1 + \theta_2 \\ \theta_1 - \theta_2 \end{pmatrix} \quad (26)$$

η Λαγκρανζιανή των συζευγμένων εκκρεμών γράφεται ως το άθροισμα ασυζεύκτων ταλαντωτών:

$$L = \left(\frac{1}{2}\dot{\xi}_1^2 - \frac{\Omega_1^2}{2}\xi_1^2 \right) + \left(\frac{1}{2}\dot{\xi}_2^2 - \frac{\Omega_2^2}{2}\xi_2^2 \right) . \quad (27)$$

Το συμπέρασμα αυτό είναι ιδιαιτέρως σημαντικό και έχει γενική ισχύ. Δείχνει την θεμελιώδη σημασία του αρμονικού ταλαντωτή. Διότι, όπως είδαμε αν οι διαταραχές από το σημείο ισορροπίας είναι αρκούντως μικρές οι εξισώσεις κίνησης των διαταραχών είναι γραμμικές με σταθερούς συντελεστές, και η δυναμική συμπεριφορά στις κανονικές συντεταγμένες των διαταραχών είναι το άθροισμα αρμονικών ταλαντωτών.