

Μηχανική II

Μη αδρανειακές δυνάμεις

Όπως έχουμε δει ένας παρατηρητής σε ένα περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς αισθάνεται δυνάμεις τις οποίες δεν αντιλαμβάνεται ένας αδρανειακός παρατηρητής. Εδώ θα εξετάσουμε φαινόμενα τα οποία σχετίζονται με τις μη αδρανειακές αυτές δυνάμεις ώστε να μάθουμε να εκτιμούμε το σχετικό μέγεθος αυτών καθώς και τα αποτελέσματά τους. Κατ' αρχάς ας ξαναγράψουμε τη σχέση μεταξύ των επιταχύνσεων που μετρά ένας αδρανειακός και ένας περιστρεφόμενος παρατηρητής.

$$\vec{a}_{\text{αδρ}} = \vec{a}_{\text{περ}} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_{\text{περ}} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + \dot{\Omega}(\hat{n}_{\Omega} \times \vec{r}) + (\vec{\omega} \times \vec{\Omega}) \times \vec{r} \quad (1)$$

Οι τελευταίοι δύο όροι που εμφανίζονται στην παραπάνω σχέση και τους οποίους δεν είχαμε δει στην προηγούμενη ανάλυση των περιστρεφόμενων συστημάτων αναφοράς, αναφέρεται σε περιστρεφόμενα συστήματα τα οποία δεν περιστρέφονται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα. Έτσι, προκειμένου να υπολογιστεί η επιτάχυνση, η δεύτερη χρονική παραγώγιση δρώντας στο διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας $\vec{\Omega}$ οδηγεί σε

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \frac{d}{dt}(\Omega \hat{n}_{\Omega}) = \dot{\Omega} \hat{n}_{\Omega} + \Omega \frac{d\hat{n}_{\Omega}}{dt} = \dot{\Omega} \hat{n}_{\Omega} + \Omega(\vec{\omega} \times \hat{n}_{\Omega}) = \dot{\Omega} \hat{n}_{\Omega} + \vec{\omega} \times \vec{\Omega},$$

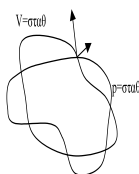
απ' όπου και προκύπτουν άμεσα οι δύο τελευταίοι όροι της (1). $\dot{\Omega}$ είναι ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της γωνιακής ταχύτητας και $\vec{\omega}$ είναι η στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του διανύσματος της $\vec{\Omega}$. Οι όροι των νέων μη αδρανειακών επιταχύνσεων με τη σειρά που εμφανίζονται στη σχέση (1) είναι (α) η επιτάχυνση Coriolis $-2\vec{\Omega} \times \vec{v}_{\text{περ}}$, (β) η φυγόκεντρος επιτάχυνση $-\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$, (γ) η αζιμουθιακή επιτάχυνση $-\dot{\Omega}(\hat{n}_{\Omega} \times \vec{r})$ και (δ) η μεταπτωτική επιτάχυνση $-(\vec{\omega} \times \vec{\Omega}) \times \vec{r}$. Τα αρνητικά πρόσημα σε όλες τις παραπάνω επιταχύνσεις έχουν εισαχθεί προκειμένου να μας υπενθυμίσουν ότι αυτές είναι οι επιταχύνσεις που καταγράφει ο περιστρεφόμενος παρατηρητής (μεταφέρετε όλες αυτές τις συνιστώσες της επιτάχυνσης στο αριστερό μέλος της σχέσης (1)) ως επιπρόσθετες της επιτάχυνσης που καταγράφει ο αδρανειακός παρατηρητής και την οποία αποδίδει στις δυνάμεις που επενεργούν στο υπό μελέτη σωματίδιο. Παρακάτω θα εξετάσουμε αυτές τις επιταχύνσεις μία-μία προσπαθώντας να επιλέξουμε κινήσεις οι οποίες να εστιάζουν το ενδιαφέρον σε μία εξ αυτών.

(i) Η φυγόκεντρος επιτάχυνση είναι μία επιτάχυνση με την οποία είμαστε άκρως εξοικειωμένοι στην καθημερινή μας ζωή. Συχνότατα βρισκόμαστε μέσα σε οχήματα που στρίβουν (περιστρεφόμενα συστήματα αναφοράς) και αισθανόμαστε δυνάμεις να μας ωθούν προς το εξωτερικό μέρος της καμπύλης τροχιάς που διαγράφει το κινητό. Το ότι η φορά αυτής της δύναμης είναι ανεξάρτητη από τη φορά διαγραφής της καμπυλόγραμμης κίνησης μας το εξασφαλίζει η παρουσία του όρου της γωνιακής ταχύτητας εις διπλούν. Η διεύθυνση αυτής της δύναμης είναι πάντα κάθετη στον άξονα περιστροφής του σώματος όπως άμεσα υποδεικνύει η μαθηματική της έκφραση ως εξωτερικό γινόμενο. Η φυγόκεντρος δύναμη είναι επίσης υπεύθυνη για το σφαιροειδές σχήμα της Γης· λόγω περιστροφής αυτής, τα μέρη που είναι μακρύτερα από τον άξονα περιστροφής (ισημερινός) ωθούνται από τις φυγόκεντρες

δυνάμεις περισσότερο απ' ότι στα άλλα γεωγραφικά πλάτη. Έτσι όταν η Γη ήταν ακόμη σε διάπυρη υγρή μορφή κατέλαβε αυτό το πεπλατυσμένο σχήμα που όλοι γνωρίζουμε το οποίο και διατήρησε μετά την ψύξη της. Αυτός ήταν βασικά και ο ισχυρισμός του Νεύτωνα ο οποίος μάλιστα δοκίμασε να υπολογίσει το μέγεθος της πλάτυνσης. Ο ισχυρισμός του επιβεβαιώθηκε πολλά χρόνια αργότερα (1738) από γεωδαιτικές μετρήσεις του Maupertuis και του Clairaut στη Λαπωνία.

Μήπως η φυγόκεντρος επιτάχυνση μπορεί να προκύψει από κάποιο υποθετικό δυναμικό; Μήπως δηλαδή υπάρχει συνάρτηση $V(\vec{r})$ για την οποία να ισχύει ότι $\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = -\vec{\nabla} V$. Αν γράψει κανείς τη φυγόκεντρο επιτάχυνση χρησιμοποιώντας την κάθετη απόσταση από τον άξονα περιστροφής $\vec{r}_\perp$ (θεωρώντας τη με φορά προς τα έξω), $\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = (\vec{\Omega})^2 \vec{r}_\perp$, το φυγοκεντρικό δυναμικό που παράγει την επιτάχυνση αυτή αποδεικνύεται εύκολα ότι είναι το $V_{\text{φυγ}} = -\frac{1}{2} (\vec{\Omega})^2 (\vec{r}_\perp)^2$. Μπορεί

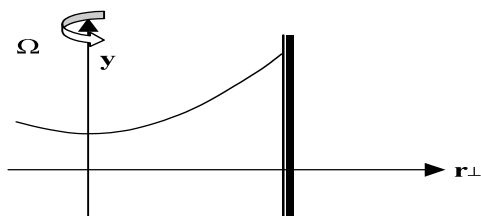
λοιπόν κανείς να αναζητήσει το γεωειδές σχήμα από την απαίτηση, η επιφάνεια της Γης να είναι μια ισοδυναμική επιφάνεια, λαμβάνοντας υπόψη και το φυγοκεντρικό δυναμικό στην έκφραση για το δυναμικό. Γενικά σε ένα ρευστό το οποίο βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας, η ισορροπία των δυνάμεων παίρνει τη μορφή $\vec{\nabla} p = \rho \vec{\nabla} V$, όπου p και ρ η υδροστατική πίεση από την στρωμάτωση του ρευστού και η πυκνότητα αυτού αντίστοιχα. Έτσι, οι ισοδυναμικές επιφάνειες (επιφάνειες σταθερού V) είναι και ισοβαρικές επιφάνειες (επιφάνειες σταθερής πίεσης), άλλως οι κάθετες



σε αυτές τις επιφάνειες δεν θα συνέπιπταν οπότε και δεν θα ίσχυε η παραπάνω εξίσωση υδροστατικής ισορροπίας (γενικά το διάνυσμα $\vec{\nabla} \phi$ είναι κάθετο στην επιφάνεια σταθερού ϕ). Επομένως η πίεση είναι συνάρτηση του δυναμικού και προφανώς το αυτό θα πρέπει να ισχύει και για την πυκνότητα στη γενική περίπτωση που το ρευστό είναι συμπιεστό αφού:

$$dp = (\vec{\nabla} p) d\vec{r} = \rho (\vec{\nabla} V) d\vec{r} = \rho dV \Rightarrow \rho = \frac{dp}{dV}$$

Ας χρησιμοποιήσουμε τα παραπάνω αποτελέσματα για να υπολογίσουμε το σχήμα της ελεύθερης επιφάνειας του νερού σε ένα κουβά ο οποίος περιστρέφεται γύρω από τον άξονα συμμετρίας του με σταθερή γωνιακή ταχύτητα Ω . Το δυναμικό σε κάθε



σημείο θα είναι $V = gy - \frac{1}{2} \Omega^2 r_\perp^2$. Η

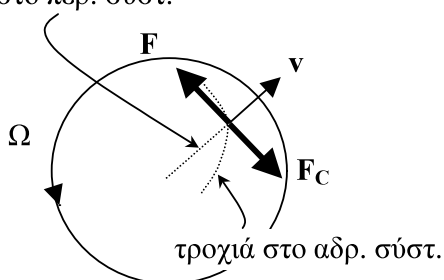
ελεύθερη επιφάνεια του νερού η οποία θα χαρακτηρίζεται από σταθερή πίεση, την ατμοσφαιρική, θα έχει και σταθερό δυναμικό, επομένως το σχήμα της θα έχει τη

μορφή $y = \frac{V}{g} + \frac{\Omega^2}{2g} r_\perp^2$, δηλαδή θα είναι

παραβολοειδές εκ περιστροφής (τι απλός τρόπος να κατασκευάσει κανείς παραβολοειδείς επιφάνειες!). Η τιμή του V μπορεί να υπολογιστεί στη συνέχεια από την απαίτηση ο όγκος του νερού να παραμείνει αμετάβλητος. Με παρόμοιους συλλογισμούς μπορείτε να υπολογίσετε και το σχήμα της Γης.

(ii) Η επιτάχυνση Coriolis¹ δεν μας είναι τόσο οικεία, εξαιτίας του ότι απαιτείται κίνηση στο περιστρεφόμενο σύστημα προκειμένου αυτή να γίνει αντιληπτή. Συνήθως οι κινήσεις μας σε ένα όχημα είτε είναι πολύ περιορισμένες, είτε οι επιδράσεις της επιτάχυνσης Coriolis μπερδεύονται με αυτές της φυγόκεντρου. Για να παρακολουθήσουμε τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της επιτάχυνσης αυτής ας θεωρήσουμε την ακόλουθη κίνηση: σε ένα ομαλά περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς ένα κινητό κινείται ακτινικά με σταθερή ταχύτητα v . Αν το κινητό απομακρύνεται από τον άξονα περιστροφής μετατοπίζεται συνεχώς προς ολοένα μεγαλύτερες ακτίνες και επομένως προς ολοένα αυξανόμενες ταχύτητες περιφοράς. Προκειμένου να επιτευχθεί αυτό θα πρέπει το κινητό να επιταχύνεται κάθετα στην ακτίνα κίνησής του. Ο αδρανειακός παρατηρητής θα παρατηρεί το κινητό να εκτελεί μια καμπυλόγραμμη κίνηση με κατεύθυνση αυτήν της περιστροφής, επιταχυνόμενο αντίστοιχα προς αυτή την κατεύθυνση υπό την επίδραση της δύναμης $\vec{F}$. Ο

περιστρεφόμενος παρατηρητής θα αποδίδει στο κινητό μια σταθερή ταχύτητα την οποία δικαιολογεί από την εξουδετέρωση της δύναμης $\vec{F}$ από μια ίση και αντίθετη δύναμη $\vec{F}_C$. Πρόκειται για τη δύναμη που βλέπει ο περιστρεφόμενος παρατηρητής να δέχεται το κινητό εξαιτίας και μόνο της περιστροφής του συστήματος αναφοράς.



Προφανώς αναστροφή της φοράς της ταχύτητας σημαίνει και αναστροφή της κατεύθυνσης της δύναμης Coriolis και το ίδιο ισχύει και όταν αναστραφεί η γωνιακή ταχύτητα –σε αντίθεση με τη φυγόκεντρο δύναμη. Όσον αφορά το μέγεθος αυτής της δύναμης είναι εύκολο να υπολογιστεί από τη μεταβολή της στροφορμής του κινητού όπως αυτή μετριέται από το αδρανειακό σύστημα:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} (m\Omega r^2) = 2m\Omega r \frac{dr}{dt} = (2m\Omega v)r$$

Η ροπή που προκαλεί τη μεταβολή της στροφορμής προέρχεται από τη δύναμη την οποία εξουδετερώνει η δύναμη Coriolis. Το μέγεθος λοιπόν της επιτάχυνσης Coriolis είναι $2\Omega v$, όπως ακριβώς προβλέπει η γενική έκφραση για την επιτάχυνση Coriolis.

Η δύναμη Coriolis παίζει ουσιαστικό ρόλο στην κίνηση αερίων και υδάτινων μαζών στον πλανήτη μας. Εξαιτίας της δύναμης αυτής, η οποία όπως έχουμε δει είναι κάθετη στην κίνηση, η μετακίνηση αερίων ρευμάτων από υψηλά προς χαμηλά βαρομετρικά συστήματα, και αντίστροφα, ακολουθεί στροβιλοειδή κίνηση με αποτέλεσμα αυτά να συντηρούνται για αρκετά μεγάλο χρονικό διάστημα (4-7 ημέρες) –ουσιαστικά μέχρι να διαλύσει τους δημιουργούμενους κυκλώνες και αντικυκλώνες η τριβή με το έδαφος. Η ύπαρξη τέτοιων συνεκτικών δομών που αποτελούνται από χαμηλά και υψηλά βαρομετρικά συστήματα συνιστούν αυτό που αποκαλείται καιρός. Αν η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της Γης ήταν πολύ μικρότερη, οι οποιεσδήποτε διακυμάνσεις της ατμοσφαιρικής πίεσης θα εξαφανίζονταν πολύ ταχύτερα, σε διάστημα ωρών - προκύπτει ότι αυτή η ταχύτητα εξομάλυνσης της πίεσης είναι σχεδόν ίση με την ταχύτητα του ήχου- και ο καιρός θα ήταν εξαιρετικά πιο σταθερός. Λόγω της δύναμης Coriolis μπορεί να υπάρχει διαφορά θερμοκρασίας μεταξύ

¹ Ο Gustav-Gaspard Coriolis (1792-1843), Γάλλος φυσικομαθηματικός και μηχανικός, που μελέτησε τις μη αδρανειακές δυνάμεις σε ένα περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς, ήταν ο πρώτος που εισήγαγε τους όρους «έργο» και «κινητική ενέργεια».

ισημερινού και πόλου. Διότι αν η Γη δεν περιστρεφόταν η διαφορά θερμοκρασίας που επιβάλλεται από την απορρόφηση ηλιακής ακτινοβολίας (η οποία θα ήταν περί τους 100K) θα εξαλειφόταν ταχύτατα με διαταραχές που διαδίδονται σχεδόν με τη ταχύτητα του ήχου, όπως ακριβώς διαδίδονται οι διαταραχές της επιφανείας του νερού μέσα σε μία μπανιέρα. Οι ατμοσφαιρική κυκλοφορία που δημιουργείται συντηρεί τελικά στη Γή διαφορά θερμοκρασίας μεταξύ πόλου και ισημερινού περί τους 40K. Καταλαβαίνετε λοιπόν ότι στην Αφροδίτη και τον Ήλιο που περιστρέφονται πολύ αργά γύρω από τον άξονά τους ότι η διαφορά θερμοκρασίας Πόλου και ισημερινού είναι μηδαμινή.

Η δύναμη Coriolis ήταν αυτή που προσπάθησε να εκμεταλλευτεί ο Νεύτων για να επιδείξει την περιστροφή της Γης. Συγκεκριμένα υπολόγισε την εκτροπή από την κατακόρυφο ενός σωματιδίου που πέφτει ελεύθερα σε ένα βαθύ πηγάδι. Δυστυχώς όμως μια υπολογιστική παγίδα που κρύβει η λύση αυτού του προβλήματος (βλ. ομάδα προβλημάτων Ζ') τον οδήγησε σε λανθασμένο αποτέλεσμα το οποίο έτσι κι αλλιώς υπερέβαινε τα πειραματικά σφάλματα μέτρησης την εποχή εκείνη (το πείραμα επιχειρήθηκε από τον σύγχρονο του Νεύτωνα Βρετανό φυσικό Hook). Σήμερα η παρεκτροπή στην κίνηση των βλημάτων εξαιτίας της δύναμης Coriolis λαμβάνεται πολύ σοβαρά υπόψη στη σύγχρονη βλητική, όπου οι πίνακες των διορθώσεων στα στοιχεία βολής βασίζονται στο εκάστοτε γεωγραφικό πλάτος απ' όπου εκτελείται η βολή. Προφανώς στο νότιο ημισφαίριο η δράση της δύναμης Coriolis αντιστρέφεται από αυτή στο βόρειο ημισφαίριο. Τέλος αξίζει να σημειωθεί ότι αν ένα σώμα κινείται καμπυλόγραμμο στην επιφάνεια της Γης, π.χ. ένας ποταμός, η φυγόκεντρος δύναμη εξαιτίας της καμπυλόγραμμης κίνησης και η δύναμη Coriolis εξαιτίας της περιστροφής της Γης ασκούνται και οι δύο κάθετα στην κίνηση αυτού. Έτσι η φορά της συνισταμένης αυτών καθορίζει ποια πλευρά της κοίτης ενός ποταμού διαβρώνεται περισσότερο.

Γενικά η δύναμη Coriolis είναι μικρότερη σε μέτρο από τη φυγόκεντρο δύναμη στην επιφάνεια της Γης, εξαιτίας της περιστροφής αυτής, κατά ένα παράγοντα της τάξης του $\frac{2v}{\Omega R} = \frac{v}{233 \text{ m/s}}$. Ενώ όμως η φυγόκεντρος δύναμη μαζί με το βάρος καθορίζουν την κατάσταση ισορροπίας της ατμόσφαιρας, η δύναμη Coriolis δημιουργεί μια δυναμική στις κινήσεις αυτής.