

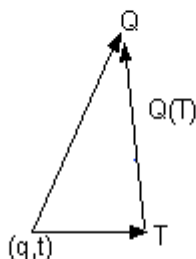
ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ NOETHER

Μέχρι τώρα έχουμε θεωρήσει μόνο μετασχηματισμούς στις χωρικές συντεταγμένες. Θεωρούμε τώρα μία οικογένεια απειροστών χωροχρονικών μετασχηματισμών $(q,t) \rightarrow (Q,T)$ που προσδιορίζονται από τους γεννήτορες K_i και τ :

$$Q_i(q,t) = q_i + \varepsilon K_i(q,t), \quad T(q,t) = t + \varepsilon \tau(q,t). \quad (M)$$

Οι μετασχηματισμοί αυτοί θα λέγονται συμμετρία αν αφήνουν τη δράση αναλλοίωτη. Δηλαδή η δράση υπολογισμένη στη διαδρομή $q(t)$ με t στο διάστημα $[t_1, t_2]$ να ισούται με τη δράση της μετασχηματισμένης σύμφωνα με

το (M) της διαδρομής $Q(T)$ με T στο διάστημα $[T_1, T_2]$, με $T_1 = t_1 + \varepsilon \tau(q(t_1), t_1)$ και $T_2 = t_2 + \varepsilon \tau(q(t_2), t_2)$. Προσέξτε ότι ενώ ο μετασχηματισμός (M) ορίζει την απεικόνιση κάθε σημείου των αρχικών θέσεων και χρόνου $(q,t) \rightarrow (Q,T)$, για να υπολογισθεί η απεικόνιση της τροχιάς $q(t)$, $Q(T)$ πρέπει να υπολογισθεί η σύνθεση των μετασχηματισμών,



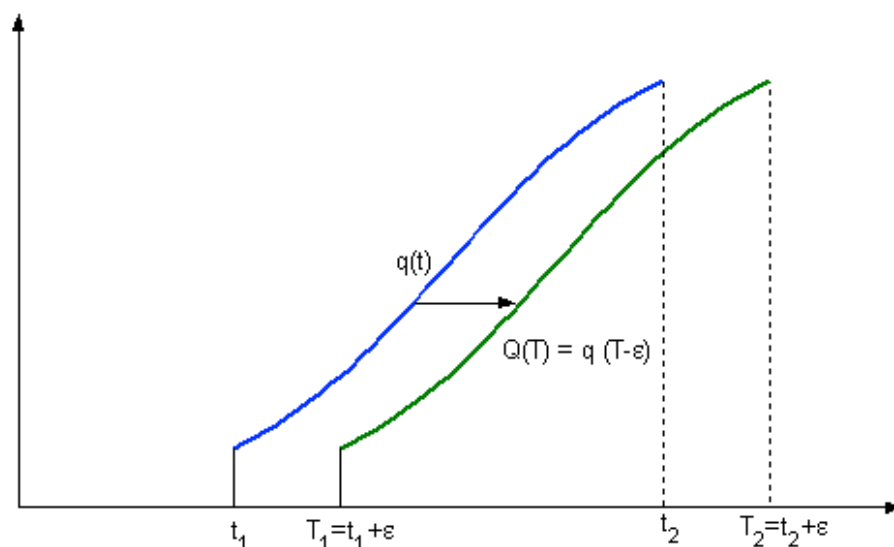
όπως φαίνεται από το σχήμα.

Δηλαδή η M είναι χωροχρονική συμμετρία όταν:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, dq/dt, t) dt = \int_{T_1}^{T_2} L(Q, dQ/dT, T) dT.$$

Θα αποδείξουμε ότι σε κάθε χωροχρονικό μετασχηματισμό που αφήνει τη δράση αναλλοίωτη (συμμετρία της δράσης) αντιστοιχεί και μία διατηρήσιμη ποσότητα. Αυτή είναι μία γενικότερη μορφή του θεωρήματος της Noether.

Πριν προχωρήσουμε στον γενικό προσδιορισμό της διατηρήσιμης ποσότητας που αντιστοιχεί σε μία γενική χωροχρονική συμμετρία ας περιορισθούμε στην περίπτωση Λαγκραντζιανών της μορφής $L(q, \dot{q})$ με ένα βαθμό ελευθερίας. Θεωρούμε τον απλό μετασχηματισμό $Q(T) = q(t)$, $T = t + \varepsilon$ που αντιστοιχεί σε μία χρονική μετάθεση της αρχής του χρόνου κατά ε . Σε αυτό το φυσικό σύστημα δεν υπάρχει εκπεφρασμένη και άμεση εξάρτηση από το χρόνο και είναι αναμενόμενο η δράση να παραμένει αναλλοίωτη και η χρονική μετάθεση



να είναι συμμετρία. Θα το αποδείξουμε αυτό προσεκτικά.. Η αρχική τροχιά $q(t)$ και η μετασχηματισμένη τροχιά $Q(T)$ παρουσιάζονται στο σχήμα. Πρέπει να δείξουμε ότι η δράση δεν μεταβάλλεται όταν επιτελείται ένας τέτοιος μετασχηματισμός. Γράφουμε τη μετασχηματισμένη δράση ως συνάρτηση της αρχικής τροχιάς:

$$S(\varepsilon) = \int_{T_1}^{T_2} L(Q, dQ/dT) dT = \int_{T_1}^{T_2} L(q(T - \varepsilon), dq(T - \varepsilon)/dT) dT, (1)$$

και αλλάζουμε την μεταβλητή ολοκλήρωσης από $T \rightarrow t$. Επειδή για τον μετασχηματισμό της χρονικής μετάθεσης είναι $dT = dt$, και $q(T - \varepsilon) = q(t)$ η δράση $S(\varepsilon)$ γράφεται ως προς τη μεταβλητή t :

$$S(\varepsilon) = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), dq/dt) dt,$$

αποδεικνύοντας την προφανή αναλλοiotτητα της δράσης στις χρονικές μεταθέσεις.

Για να προσδιορίσουμε τη διατηρήσιμη ποσότητα υπολογίζουμε από την (1) την πρώτη τάξης μεταβολή της δράσης ως προς το ε . Η μεταβολή της δράσης προέρχεται από την εξάρτηση των ορίων ολοκλήρωσης από το ε και την εξάρτηση της ολοκληρωτέας ποσότητας L από το ε . Συνεπώς:

$$\frac{\partial S(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial T_2}{\partial \varepsilon} L(q(T_2 - \varepsilon), dq(T_2 - \varepsilon)/dT) - \frac{\partial T_1}{\partial \varepsilon} L(q(T_1 - \varepsilon), dq(T_1 - \varepsilon)/dT) + \int_{T_1}^{T_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q} \frac{\partial q(T - \varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}(T - \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right] dT$$

$$\text{Επειδή } \frac{\partial q(T - \varepsilon)}{\partial \varepsilon} = -\frac{\partial q(T - \varepsilon)}{\partial T} \text{ και } \frac{\partial \dot{q}(T - \varepsilon)}{\partial \varepsilon} = -\frac{\partial \dot{q}(T - \varepsilon)}{\partial T} = -\frac{\partial^2 q(T - \varepsilon)}{\partial T^2}, \text{ καθώς}$$

επίσης $dT = dt$ και $\frac{\partial T}{\partial \varepsilon} = 1$, η μεταβολή της δράσης είναι:

$$\frac{\partial S(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = L(q(t_2), dq(t_2)/dt) - L(q(t_1), dq(t_1)/dt) - \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q} \frac{\partial q(T - \varepsilon)}{\partial T} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial^2 q(T - \varepsilon)}{\partial T^2} \right] dT$$

$$\text{Αν η μεταβολή της δράσης υπολογισθεί για } \varepsilon = 0 \text{ τότε θα είναι } \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)$$

οπότε επειδή

$$\left. \frac{\partial S(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = L(q(t_2), dq(t_2)/dt) - L(q(t_1), dq(t_1)/dt) - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right) dt = \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right) \Big|_{t_1}^{t_2} = 0$$

η ποσότητα $E(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L$ είναι χρονικά ανεξάρτητη (άρα διατηρήσιμη)

δεδομένου ότι για οποιασδήποτε χρονικές στιγμές t_1, t_2 δείξαμε ότι:

$$E(t_2) = E(t_1). \text{ Εάν η Λαγκραντζιανή ήταν η } L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q), \text{ τότε η}$$

διατηρήσιμη ποσότητα που παράγεται από την αναλλοiotτητα της

Λαγκραντζιανής στις χρονικές μεταθέσεις είναι η γνώριμη ενέργεια :

$$E = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + V(q) .$$

Επανερχόμαστε στη γενική περίπτωση. Για να προσδιορίσουμε τη δράση μιας φυσικής τροχιάς $q(t)$ στις μετασχηματισμένες συντεταγμένες, υπολογίζουμε την δράση στις συντεταγμένες Q, T . Επειδή για κάθε βαθμό ελευθερίας $Q_i(q, t) = q_i(t) + \varepsilon K_i(q, t)$ και $T(q, t) = t + \varepsilon \tau(q, t)$, κρατώντας όρους πρώτης τάξης στο ε , έχουμε:

$$\dot{Q}_i = \frac{dQ_i}{dt} \bigg|_T \frac{dt}{dT} \bigg|_T \approx (\dot{q}_i(t) + \varepsilon \dot{K}_i) (1 - \varepsilon \dot{\tau}) \approx \dot{q}_i(t) + \varepsilon (\dot{K}_i - \dot{\tau} \dot{q}_i) .$$

Αλλάζουμε τα όρια ολοκλήρωσης του δευτέρου ολοκληρώματος από $T \rightarrow t$ για να αποφύγουμε την εξάρτηση των ορίων από το ε και έχουμε σε πρώτη τάξη στο ε :

$$\begin{aligned} S(\varepsilon) &= \int_{T_1}^{T_2} L(Q, \dot{Q}, T) dT = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t) + \varepsilon K, \dot{q}(t) + \varepsilon (\dot{K} - \dot{\tau} \dot{q}), t + \varepsilon \tau) dt (1 + \varepsilon \dot{\tau}) \\ &= S(0) + \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} G dt + O(\varepsilon^2) , \end{aligned}$$

όπου

$$G(t, \varepsilon) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} K_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (\dot{K}_i - \dot{\tau} \dot{q}_i) + \frac{\partial L}{\partial t} \tau + L \dot{\tau} .$$

Οπότε:

$$\frac{\partial S(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \bigg|_{\varepsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} G(t, 0) dt .$$

Κάνοντας χρήση των εξισώσεων Euler-Lagrange που ισχύουν για την αρχική τροχιά και προσθαφαιρώντας τον όρο $\sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i \tau + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \tau$ η ολοκληρωτέα συνάρτηση γίνεται

$$G(t, 0) = \frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} K_i + L \tau - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \tau = \frac{dN}{dt} ,$$

όπου:

$$N = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} K_i + L \tau - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \tau .$$

.

Η απαίτηση της συμμετρίας συνεπάγεται ότι $\int_{t_1}^{t_2} G dt = 0$ και άρα $N(t_2) = N(t_1)$.

Συνεπώς επειδή οι χρόνοι είναι αυθαίρετοι καταλήγουμε ότι η ποσότητα:

$$N = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} K_i + L \tau - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \tau \quad (\text{A})$$

διατηρείται κατά τη κίνηση.

Το θεώρημα της Noether σε αυτήν τη γενική μορφή μπορεί αμέσως να χρησιμοποιηθεί για να αποδειχθεί ότι όταν η δράση είναι αναλλοίωτη στις χρονικές μεταθέσεις δηλαδή στους μετασχηματισμούς της μορφής:

$$Q_i(q, t) = q_i, \quad T(q, t) = t + \varepsilon$$

δηλαδή σε μετασχηματισμούς που δεν μετασχηματίζουν τις χωρικές συντεταγμένες της τροχιάς και απλώς τις μεταθέτουν χρονικά, οπότε ο χωρικός γεννήτορας είναι μηδενικός, $K_i = 0$, και ο χρονικός γεννήτορας είναι σταθερός: $\tau = 1$. Αντικαθιστώντας στην (Α) προκύπτει ότι διατηρείται η ενέργεια του συστήματος:

$$E = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L.$$

Δηλαδή η ομογένεια του φυσικού συστήματος στο χρόνο συνεπάγεται τη διατήρηση της «ενέργειας» του συστήματος. η οποία ορίζεται από τη παραπάνω έκφραση.

Η γενικευμένη ενέργεια που διατηρείται ως απόρροια της χρονικής ομογένειας δεν είναι πάντοτε το άθροισμα κινητικής και δυναμικής ενέργειας. Εάν όμως η Λαγκρανζιανή έχει τη συνήθη μορφή διαφοράς μεταξύ κινητικής, T , και δυναμικής ενέργειας, V , η κινητική ενέργεια είναι μία τετραγωνική συνάρτηση των γενικευμένων ταχυτήτων, δηλαδή είναι της μορφής:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i M_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j,$$

και η δυναμική ενέργεια δεν εξαρτάται από τη ταχύτητα, τότε η γενικευμένη ενέργεια ταυτίζεται, όπως είναι εύκολο να διαπιστώσετε, με το άθροισμα της κινητικής και δυναμικής ενέργειας.

Επειδή είναι σχεδόν αδιανόητο οι θεμελιώδεις νόμοι της φύσης να μην έχουν αιώνια ισχύ, αναμένουμε η Λαγκρανζιανή που περιγράφει τους θεμελιώδεις νόμους της φύσης να είναι ομογενής στο χρόνο και συνεπώς να ισχύει για όλα τα φυσικά φαινόμενα η αρχή της διατήρησης της ενέργειας.