

## ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΚΑΙ ΔΙΑΤΗΡΗΣΙΜΕΣ ΠΟΣΟΤΗΤΕΣ

### 1. Εισαγωγικές παρατηρήσεις

Η Λαγκρανζιανή θεώρηση αμέσως αποκαλύπτει τις ποσότητες που διατηρούνται κατά τη κίνηση ενός φυσικού συστήματος. Η απλούστερη περίπτωση είναι όταν μία γενικευμένη συντεταγμένη, έστω η  $q_n$ , δεν εμφανίζεται στη Λαγκρανζιανή.

Σε αυτή τη περίπτωση  $\frac{\partial L}{\partial q_n} = 0$  και από τις εξισώσεις Euler-Lagrange προκύπτει

ότι  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right) = 0$  και συνεπώς η γενικευμένη ορμή  $p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}$ , η συζυγής της

συντεταγμένης  $q_n$ , διατηρείται κατά τη κίνηση. Οι συντεταγμένες που δεν εμφανίζονται στη Λαγκρανζιανή συνάρτηση λέγονται κυκλικές, και από τη παραπάνω ανάλυση προκύπτει το συμπέρασμα ότι η γενικευμένη ορμή που είναι συζυγής σε μία κυκλική μεταβλητή είναι διατηρήσιμη ποσότητα.

Ως παράδειγμα θεωρείστε ένα σωματίδιο που κινείται στο επίπεδο υπό την επίδραση ενός κεντρικού πεδίου δυναμικού  $V(r)$ , όπου  $r$  η απόσταση από το κέντρο. Η Λαγκρανζιανή συνάρτηση του σωματιδίου σε πολικές συντεταγμένες  $(r, \theta)$  είναι:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(r).$$

Είναι εμφανές ότι η Λαγκρανζιανή συνάρτηση δεν έχει εξάρτηση από τη γωνία  $\theta$  και συνεπώς η συζυγής της γωνίας ορμή,  $p_\theta = mr^2 \dot{\theta}$ , διατηρείται κατά τη κίνηση. Η διατηρούμενη ορμή είναι η στροφορμή του σωματιδίου ως προς το κέντρο της δύναμης εκφρασμένη σε πολικές συντεταγμένες.

*Άσκηση: Διατηρείται η στροφορμή ως προς άλλο σημείο αναφοράς;*

*Άσκηση: Επαναλάβετε την παραπάνω ανάλυση για τη κίνηση του σωματιδίου σε τρεις διαστάσεις. Γράψτε την Λαγκρανζιανή σε σφαιρικές πολικές συντεταγμένες. Ποία η διατηρήσιμη ποσότητα;*

Η παρατήρηση ότι σε κάθε κυκλική μεταβλητή αντιστοιχεί και μία διατηρήσιμη ορμή μπορεί να διατυπωθεί και με ένα διαφορετικό τρόπο που θα αποδειχθεί ιδιαίτερα γόνιμος για γενίκευση. Το γεγονός ότι η Λαγκρανζιανή του σωματιδίου δεν εξαρτάται από τη γωνία σημαίνει ότι αν μετασχηματίσουμε τις γωνίες από  $\theta \rightarrow \theta + \varepsilon = \Theta(\varepsilon)$  όπου  $\varepsilon$  είναι μία συνεχής παράμετρος (αφήνοντας τις αποστάσεις τις ίδιες:  $r \rightarrow r = R$ ), η Λαγκρανζιανή μένει αναλλοίωτη, ανεξαρτήτως της τιμής της παραμέτρου  $\varepsilon$ . Ο μετασχηματισμός αυτός των συντεταγμένων είναι στροφή κατά γωνία  $\varepsilon$ . Δηλαδή η Λαγκρανζιανή υπολογισμένη στις νέες συντεταγμένες  $L(\varepsilon)$ :

$$L(\varepsilon) = L(R, \dot{R}, \Theta, \dot{\Theta}) = L(r, \dot{r}, \theta + \varepsilon, \dot{\theta})$$

είναι ίση με την αρχική Λαγκρανζιανή, δηλαδή :

$$L(\varepsilon) = L(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}),$$

και η Λαγκρανζιανή είναι αναλλοίωτη στις στροφές ή η Λαγκρανζιανή είναι συμμετρική ως προς τους συνεχείς μετασχηματισμούς των στροφών. Επειδή η  $\varepsilon$  είναι συνεχής παράμετρος μπορούμε να διαφορίσουμε τη Λαγκρανζιανή ως προς  $\varepsilon$  και να εκφράσουμε την αναλλοιότητα της Λαγκρανζιανής ισοδυνάμως ως:

$$\left. \frac{\partial L(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0,$$

όπου ο υπολογισμός της παραγώγου στο  $\varepsilon = 0$  γίνεται διότι όπως θα δούμε μόνο η παραπάνω συνθήκη είναι αναγκαία για την εύρεση των διατηρησίμων ποσοτήτων.

Στη προκειμένη περίπτωση της κίνησης σε κεντρικό πεδίο η παραπάνω συνθήκη συνεπάγεται ότι :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0,$$

που συνεπάγεται τη διατήρηση της στροφορμής:  $p_\theta = mr^2\dot{\theta}$ . Διαφαίνεται έτσι ότι η διατήρηση τη στροφορμής έχει τη ρίζα της στην αναλλοιότητα της Λαγκρανζιανής στις στροφές.

Ας θεωρήσουμε τώρα δύο σωματίδια που κινούνται στη ευθεία και αλληλεπιδρούν με δυναμικό Νεωτωνείου τύπου. Εάν η θέση του πρώτου σωματιδίου είναι  $x_1$  και του δευτέρου  $x_2$  τότε μία Λαγκρανζιανή που περιγράφει τη κίνησή των είναι:

$$L = \frac{1}{2}(m_1\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_2^2) - V(|x_1 - x_2|)$$

Μπορούμε να βρούμε κάποιο μετασχηματισμό των συντεταγμένων που να αφήνει αναλλοίωτη αυτή τη Λαγκρανζιανή; Προφανώς ο μετασχηματισμός  $x_1 \rightarrow X_1(\varepsilon) = x_1 + \varepsilon$ ,  $x_2 \rightarrow X_2(\varepsilon) = x_2 + \varepsilon$  αφήνει αναλλοίωτη τη Λαγκρανζιανή διότι η μεν κινητική ενέργεια παραμένει αναλλοίωτη διότι:

$$\dot{X}_i(\varepsilon) = \dot{x}_i, \quad i = 1, 2$$

η δε δυναμική ενέργεια παραμένει και αυτή αναλλοίωτη δεδομένου ότι η απόσταση των σωματιδίων δεν μεταβάλλεται με τον μετασχηματισμό. Επειδή ο συνεχής μετασχηματισμός είναι απλή μετάθεση κατά  $\varepsilon$ , διαπιστώνουμε ότι η Λαγκρανζιανή είναι αναλλοίωτη στις μεταθέσεις και ότι:

$$L(\varepsilon) = L(X_i, \dot{X}_i) = L(x_i + \varepsilon, \dot{x}_i) = L(x_i, \dot{x}_i)$$

και συνεπώς, όπως και προηγουμένως:

$$\left. \frac{\partial L(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0,$$

για μεταθέσεις των συντεταγμένων. Η συνθήκη αναλλοιότητας για τους συγκεκριμένους μετασχηματισμούς συνεπάγεται:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} + \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 .$$

Επειδή όμως η φυσική κίνηση ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 , \text{ για } i = 1, 2 ,$$

το αναλλοίωτο της Λαγκρανζιανής στις μεταθέσεις συνεπάγεται επίσης ότι:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) = \frac{d}{dt} (m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2) = 0 ,$$

και οδηγεί στη διατήρηση της συνολικής ορμής των σωματιδίων:

$$p = m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2 .$$

Το συμπέρασμα αυτό προκύπτει, όπως είδαμε από την αναλλοιότητα του δυναμικού στις χωρικές μεταθέσεις. Ισοδυνάμως το δυναμικό αυτό συνεπάγεται αλληλεπίδραση μεταξύ των σωματιδίων που ικανοποιεί τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα που, όπως γνωρίζουμε, οδηγεί από τους νόμους του Νεύτωνα στη διατήρηση της ολικής ορμής..

Φαίνεται ότι οι διατηρήσιμες ποσότητες προκύπτουν από την αναλλοιότητα της Λαγκρανζιανής σε συνεχείς μετασχηματισμούς.. Αυτή παρατήρηση έχει την ισχύ θεωρήματος του θεωρήματος της Noether (1915). Η Emmy Noether (1882-1935) ήταν μία μεγάλη γυναίκα μαθηματικός –θεωρητικός φυσικός η οποία πρώτη είδε και απέδειξε την σχέση μεταξύ συμμετριών και διατηρησίμων ποσοτήτων που ήταν το θέμα της υφηγησίας της στο Gottingen. Ίσως σας ξενίζει ότι ένα τόσο σημαντικό θεώρημα φέρει το όνομα μίας γυναίκας, διότι στη φυσική και μαθηματικά αυτό δεν είναι σύνηθες. Μην ξεχνάται όμως ότι αντιθέτως με τη σημερινή εποχή λίγες ήταν οι γυναίκες οι οποίες σπουδάζαν και ακόμη λιγότερες αυτές που έκαναν προχωρημένες σπουδές. Μάλιστα, υπήρχε και προκατάληψη στη κατάλυση υψηλών ακαδημαϊκών θέσεων από το γυναικείο φύλο. Στην περίπτωση της Noether αυτή η προκατάληψη εμφανίσθηκε με την άρνηση των πρυτανικών αρχών του Πανεπιστημίου να κάνει δεκτή την υφηγησία της όταν πρωτοκατατέθηκε το 1915. Η υφηγησία τελικά απονεμήθηκε τέσσερα χρόνια αργότερα το 1919! <sup>1</sup>

Όταν η Λαγκρανζιανή παραμένει αναλλοίωτη σε κάποιο συνεχή μετασχηματισμό τότε ο μετασχηματισμός αυτός θα λέγεται (συνεχής) συμμετρία της Λαγκρανζιανής. Στα παραπάνω παραδείγματα διαφαίνεται η ανάγκη θεώρησης μετασχηματισμών που εξαρτώνται συνεχώς και διαφορισίμως από την παράμετρο  $\varepsilon$ : οι διατηρήσιμες ποσότητες προέκυψαν διαφορίζοντας ως προς αυτή τη παράμετρο. Αυτό δεν θα ήταν δυνατό αν η συμμετρία ήταν διακριτή. Ως παράδειγμα διακριτής συμμετρίας για το πρόβλημα των δύο αλληλεπιδρόντων

---

<sup>1</sup> Για λεπτομέρειες αναφερθείτε στο άρθρο *The Life and Times Of Emmy Noether* της N. Byers. Το άρθρο αυτό είναι διαθέσιμο στην ιστοσελίδα του μαθήματος.

σωματιδίων θεωρείστε τον καθρεπτισμό των συντεταγμένων:  $x_i \rightarrow X_i = -x_i$ , αυτός ο μετασχηματισμός που δεν εξαρτάται από συνεχή παράμετρο, είναι διακριτή συμμετρία της Λαγκρανζιανής η οποία όμως δεν παράγει στη κλασσική μηχανική διατηρήσιμη ποσότητα (στη κβαντική μηχανική όμως παράγει). Μία άλλη διακριτή συμμετρία για το ίδιο πρόβλημα με σωματίδια ίδιας μάζας είναι η εναλλαγή των σωματιδίων  $x_1 \rightarrow x_2, x_2 \rightarrow x_1$ . Και αυτή η συμμετρία δεν οδηγεί στη διατήρηση κάποιας ποσότητας στη κλασσική μηχανική.

Επίσης διαφάνηκε από τη παραπάνω ανάλυση ότι αρκεί για την κατασκευή της διατηρήσιμης ποσότητας να είναι γνωστή μόνο η απειροστή (η σε πρώτη τάξη) εξάρτηση του μετασχηματισμού από τη παράμετρο  $\varepsilon$ . Η απειροστή μορφή του μετασχηματισμού, όπως θα δούμε, αρκεί για να προσδιορίσουμε τον μετασχηματισμό πλήρως: διότι βήμα-βήμα μπορούμε να κατασκευάσουμε την δράση του μετασχηματισμού για κάθε πεπερασμένο  $\varepsilon$ .