

ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ

Για ένα φυσικό σύστημα που περιγράφεται από τις N συντεταγμένες q_i , όπου $i = 1, \dots, N$, συνεχής συμμετρία είναι ένας συνεχής μετασχηματισμός των συντεταγμένων που αφήνει αναλλοίωτη την Λαγκρανζιανή. Διευκρινίζουμε ότι η ανάλυση που ακολουθεί αναφέρεται μόνο σε συνεχείς συμμετρίες. Αν λ.χ. η Λαγκρανζιανή είναι αναλλοίωτη σε στροφές περί κάποιο άξονα κατά γωνία $\pi/2$, αυτή η συμμετρία είναι διακριτή και η ανάλυση που ακολουθεί δεν ισχύει.

Έστω ότι οι συντεταγμένες μετασχηματίζονται από, q_i σε $Q_i(q, \varepsilon)$, όπου ε μια συνεχής παράμετρος που χαρακτηρίζει τον μετασχηματισμό, $q_i \rightarrow Q_i(q, \varepsilon)$, με την ιδιότητα όταν $\varepsilon = 0$ να δίνει τον ταυτοτικό μετασχηματισμό : $Q_i(q, 0) = q_i$. Θεωρούμε, κατ' αρχάς, για ευκολία μετασχηματισμούς οι οποίοι είναι ανεξάρτητοι του χρόνου, οπότε η χρονική παράγωγος των μετασχηματισμένων συντεταγμένων είναι $\dot{Q}_i(q, \varepsilon) = \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \dot{q}_k$. Ο μετασχηματισμός $q_i \rightarrow Q_i(q, \varepsilon)$ λέγεται συνεχής συμμετρία της Λαγκρανζιανής αν $L(Q, \dot{Q}, t) = L(q, \dot{q}, t)$.

Επειδή η παράμετρος ε είναι συνεχής μπορούμε να θεωρήσουμε την οικογένεια των απειροστών μετασχηματισμών $Q_i(q, 0) + \varepsilon \left. \frac{\partial Q_i}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = q_i + \varepsilon K_i(q)$, οι οποίοι προσεγγίζουν τον $Q_i(q, \varepsilon)$ για μικρά ε . Οι απειροστοί μετασχηματισμοί επαναλαμβανόμενοι μπορούν να οικοδομήσουν το πεπερασμένο μετασχηματισμό. Ο μετασχηματισμός προσδιορίζεται δηλαδή πλήρως από τις συναρτήσεις $K(q)$, οι οποίες λέγονται και γεννήτορες το μετασχηματισμού. Θα έχουμε την ευκαιρία όταν συζητήσουμε διεξοδικά τις στροφές να δείξουμε τον τρόπο με τον οποίο οι γεννήτορες μίας στροφής παράγουν μία πεπερασμένη στροφή.

Εάν η Λαγκρανζιανή είναι συμμετρική ως προς αυτούς τους απειροστούς μετασχηματισμούς τότε

$$L(Q, \dot{Q}, t) = L(q + \varepsilon K, \dot{q} + \varepsilon \dot{K}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \varepsilon \left(K_i \frac{\partial L}{\partial q_i} + \dot{K}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + O(\varepsilon^2)$$

οπότε και πρέπει να ισχύει:

$$K_i \frac{\partial L}{\partial q_i} + \dot{K}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0.$$

Ας εξετάσουμε ένα απλό, αλλά σημαντικό, παράδειγμα, τη χωρική μετάθεση. Έστω N σωματίδια στο χώρο, η θέση των οποίων είναι $\vec{x}_i$. Χωρική μετάθεση κατά τη διεύθυνση $\vec{a}$ είναι ο μετασχηματισμός των συντεταγμένων $\vec{x}_i \rightarrow \vec{X}_i(\vec{x}, \varepsilon) = \vec{x}_i + \varepsilon \vec{a}$. Κάθε χωρική μετάθεση είναι συμμετρία της Λαγκρανζιανής των σωματιδίων που αλληλεπιδρούν με Νευτώνειο δυναμικό:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\dot{\vec{x}}_i|^2 - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N V(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|).$$

Για τις χωρικές μεταθέσεις $\vec{K}_i = \vec{a}$ αφού όλα τα σωματίδια μετατίθενται το ίδιο και $\dot{\vec{K}}_i = 0$ (εδώ έχουμε $3N$ συντεταγμένες και τα $\vec{K}_i$ λαμβάνονται για κάθε σωματίδιο, οπότε και είναι διανύσματα). Συνεπώς η συμμετρία στις χωρικές μεταθέσεις συνεπάγεται ότι η Λαγκρανζιανή πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$\vec{a} \cdot \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{x}_i} = 0$$

για κάθε $\vec{a}$, οπότε ισοδυνάμως απαιτείται από την Λαγκρανζιανή $\sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{x}_i} = 0$, δηλαδή η Λαγκρανζιανή πρέπει να εξαρτάται από τη θέση των σωματιδίων μόνο μέσω της σχετικής απόστασης των σωματιδίων $|\vec{x}_i - \vec{x}_j|$.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ NOETHER

Επιστρέφοντας στη γενική περίπτωση ας θεωρήσουμε την ποσότητα: $\sum_i K_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$. Η χρονική παράγωγος αυτής της ποσότητας είναι:

$$\frac{d}{dt} \sum_i K_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \dot{K}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_i K_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Εάν η $q(t)$ είναι φυσική τροχιά, τότε ικανοποιείται η εξίσωση Euler-Lagrange και η απαίτηση της συμμετρίας της Λαγκρανζιανής συνεπάγεται ότι:

$$\frac{d}{dt} \sum_i K_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \dot{K}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_i K_i \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

δηλαδή η ποσότητα

$$\sum_i K_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \equiv \sum_i p_i K_i$$

διατηρείται κατά τη κίνηση. Δηλαδή διατηρείται η ‘συνισταμένη’ των γενικευμένων ορμών, $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, στη ‘διεύθυνση’ των γεννητόρων της συμμετρίας.

Απεδείχθη λοιπόν ότι κάθε συνεχής συμμετρία της Λαγκρανζιανής που προσδιορίζεται από τους γεννήτορες K_i συνεπάγεται τη διατήρηση της ποσότητας: $\sum_i p_i K_i$. Αυτή είναι η πρώτη μορφή του θεωρήματος της Noether (1919).

Για τις χωρικές μεταθέσεις της Λαγκρανζιανής ενός απομονωμένου συστήματος σωματιδίων που αλληλεπιδρούν με Νευτώνειες δυνάμεις, το θεώρημα της Noether συνεπάγεται τη διατήρηση της

$$\vec{a} \cdot \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_i}$$

για κάθε $\vec{a}$, άρα συνεπάγεται τη διατήρηση της

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_i} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \dot{\vec{x}}_i \equiv M \dot{\vec{X}}$$

δηλαδή της συνολικής ορμής των σωματιδίων που αντιστοιχεί στην ορμή του κέντρου μάζας των σωματιδίων, $\vec{P} = M \dot{\vec{X}}$, όπου $\vec{X} = \frac{\sum_i m_i \vec{x}_i}{M}$, και $M = \sum_i m_i$ η συνολική μάζα. Η ομογένεια του χώρου συνεπάγεται συνεπώς τη διατήρηση της ορμής του κέντρου μάζας των σωματιδίων. Προφανώς εάν η Λαγκρανζιανή είναι συμμετρική στις χωρικές μεταθέσεις μόνο κατά τη διεύθυνση $\vec{a}$ τότε η συνιστώσα της ολικής ορμής μόνο σε αυτή τη διεύθυνση διατηρείται.

Όπως η ομογένεια του χώρου συνεπάγεται τη διατήρηση της συνολικής ορμής των σωματιδίων η ισοτροπία του χώρου συνεπάγεται τη διατήρηση της συνολικής στροφορμής των σωματιδίων. Αν η Λαγκρανζιανή είναι συμμετρική ως προς τις στροφές γύρω από κάποιο άξονα $\vec{n}$ τότε διατηρείται η στροφορμή ως προς τον άξονα αυτόν. Θεωρώ τον απειροστή στροφή κατά γωνία ε : $\vec{x} \rightarrow \vec{x} + \varepsilon \vec{n} \times \vec{x}$. Τότε $\vec{K} = \vec{n} \times \vec{x}$ και η συμμετρία της Λαγκρανζιανής συνεπάγεται από το θεώρημα Noether τη διατήρηση της

$$\sum_i (\vec{n} \times \vec{x}_i) \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_i} = -\vec{n} \cdot \sum_i \vec{x}_i \times \vec{p}_i = -\vec{n} \cdot \vec{L}$$

άρα της διατήρησης της συνιστώσας της στροφορμής $\vec{L} = \sum_i \vec{x}_i \times \vec{p}_i$ στη διεύθυνση $\vec{n}$. Όταν η Λαγκρανζιανή είναι σφαιρικά συμμετρική, δηλαδή είναι συμμετρική σε στροφές γύρω από οποιοδήποτε άξονα τότε διατηρείται η ολική στροφορμή $\vec{L}$.

Το θεώρημα της Noether μας επιτρέπει αμέσως αφού διαπιστώσουμε τις συνεχείς συμμετρίες της Λαγκρανζιανής του φυσικού συστήματος να προσδιορίσουμε διατηρούμενες ποσότητες.

Άσκηση: Σωματίδιο κινείται στο πεδίο που προκαλείται από ομογενή κατανομή μάζας που είναι α) ένας απείρου μήκους κυλινδρικός όγκος, β) ένας ορθός κώνος, γ) μία άπειρη επίπεδη επιφάνεια, δ) μία ευθεία γραμμή, ε) μία ημιευθεία, στ) ένα ορθό πρίσμα απείρου μήκους, ζ) μία κυλινδρική έλικα απείρου μήκους. Στην κάθε περίπτωση προσδιορίστε ποιες συνιστώσες της ορμής και της στροφορμής διατηρούνται.

ΓΑΛΙΛΑΪΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

Τα φυσικά φαινόμενα που μελετούμε διακρίνονται από αναλλοιώτητα στους γενικούς Γαλιλαϊκούς μετασχηματισμούς. Δεχόμαστε ότι η αρχή του χρόνου είναι αυθαίρετη, δηλαδή ότι ο φυσικός κόσμος είναι χρονικά ομογενής, ότι η αρχή των αξόνων που χρησιμοποιείται για το προσδιορισμό της θέσης των σωματιδίων είναι αυθαίρετος, δηλαδή ότι ο φυσικός κόσμος είναι χωρικά ομογενής, ότι ο προσανατολισμός των αξόνων είναι αυθαίρετος, δηλαδή ότι ο φυσικός κόσμος είναι ισότροπος, και τέλος ότι δεν υπάρχει κάποια προεξάρχουσα κατάσταση ηρεμίας, δηλαδή ο φυσικός κόσμος (της κλασσικής φυσικής) ικανοποιεί την αρχή της Γαλιλαϊκής σχετικότητας. Οι παραπάνω αναλλοιώτες εμφανίζονται ως συμμετρίες της Λαγκρανζιανής συνάρτησης

Η ομογένεια του χρόνου απαιτεί το αναλλοίωτο της Λαγκρανζιανής στις χρονικές μεταθέσεις, δηλαδή σε μετασχηματισμούς της μορφής $T = t + \varepsilon$. Η ομογένεια του χώρου απαιτεί το αναλλοίωτο της Λαγκρανζιανής στις χωρικές μεταθέσεις, $\vec{X} = \vec{x} + \varepsilon \vec{a}$, για κάθε διάνυσμα $\vec{a}$, και η ισοτροπία του χώρου το αναλλοίωτο της Λαγκρανζιανής στις στροφές δηλαδή στους μετασχηματισμούς της μορφής: $\vec{X} = \vec{x} + \varepsilon \vec{n} \times \vec{x}$ για κάθε διάνυσμα $\vec{n}$. Τέλος η Γαλιλαϊκή σχετικότητα απαιτεί το «ανάλλοιωτο» της Λαγκρανζιανής στους καθαρούς μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου (boosts): $\vec{X} = \vec{x} + \varepsilon \vec{v} t$. Θέσαμε το ανάλλοιωτο στη τελευταία περίπτωση σε εισαγωγικά διότι όπως ήδη είδαμε τα boosts δεν αφήνουν ακριβώς τη Λαγκρανζιανή αναλλοίωτη αλλά οδηγούν σε ισοδύναμη Λαγκρανζιανή στην οποία έχει προστεθεί ένας μετασχηματισμός βαθμονόμησης.

Από το θεώρημα της Noether αναμένουμε να αντιστοιχεί σε κάθε συμμετρία και μία διατηρήσιμη ποσότητα. Επειδή η χρονική μετάθεση παράγεται από ένα μόνο γεννήτορα αναμένουμε να παράγεται μία διατηρήσιμη ποσότητα από αυτή τη συμμετρία. Η διατηρήσιμη αυτή ποσότητα είναι η ενέργεια. Είναι σαφές ότι για να τη κατασκευάσουμε θα πρέπει να γενικεύσουμε την ανάλυση που ήδη κάναμε και να δούμε τις διατηρήσιμες ποσότητες που παράγονται από χωροχρονικούς μετασχηματισμούς. Θα το κάνουμε αυτό στο επόμενο κεφάλαιο. Οι χωρικές μεταθέσεις προσδιορίζονται από τρεις γεννήτορες, τις μεταθέσεις σε τρεις χωρικές διευθύνσεις και συνεπάγονται την διατήρηση τριών καταλλήλων ορμών. Ομοίως η ισοτροπία του χώρου διασφαλίζεται από στροφές σε τρεις άξονες και οδηγεί όπως είδαμε στη διατήρηση τριών καταλλήλων στροφορμών. Ομοίως αναμένουμε ότι τα boosts που προσδιορίζονται από τρεις γεννήτορες να οδηγούν στη διατήρηση τριών άλλων ποσοτήτων. Συνεπώς φυσικά συστήματα που είναι συμμετρικά στους Γαλιλαϊκούς μετασχηματισμούς θα πρέπει να έχουν 10 διατηρήσιμες ποσότητες, όσες και οι γεννήτορες του γενικού Γαλιλαϊκού μετασχηματισμού.

Ας λάβουμε ένα απομονωμένο σύστημα N σωματιών που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους με δυναμικά της μορφής $V_{ij} = V(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|)$. Η Λαγκρανζιανή του συστήματος είναι :

$$L = \sum_i \frac{1}{2} m_i |\dot{\vec{x}}_i|^2 - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_{ij}(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|).$$

Το μισό στη δυναμική ενέργεια συμπερίληφθηκε έτσι ώστε να λαμβάνεται μία μονο φορά το δυναμικό αλληλεπίδρασης μεταξύ δύο σωματιδίων. Είναι εμφανές ότι η Λαγκρανζιανή είναι αναλλοίωτη στους Γαλιλαϊκούς μετασχηματισμούς. Η ομογένεια του χώρου οδηγεί όπως είδαμε στη διατήρηση της ολικής ορμής (τρεις ποσότητες) του συστήματος: $\vec{P} = \sum_i m_i \dot{\vec{x}}_i$ ή της ταχύτητας του κέντρου μάζας του

συστήματος $\vec{V}_{KM} = \frac{\sum_i m_i \dot{\vec{x}}_i}{M}$, όπου $M = \sum_i m_i$ η συνολική μάζα του συστήματος. Η

ισοτροπία του χώρου οδηγεί στη διατήρηση της ολικής στροφορμής (τρεις ποσότητες) του συστήματος: $\vec{L} = \sum_i m_i \vec{x}_i \times \dot{\vec{x}}_i$ και κατουσίαν συνεπάγεται τη

διατήρηση της ολικής σχετικής στροφορμής των σωματιδίων (Δείξτε ότι εάν

$\bar{X}_{KM} = \frac{\sum_i m_i x_i}{M}$ είναι η θέση του κέντρου μάζας ότι διατηρείται η ολική σχετική

στροφορμή των σωματιδίων : $\bar{L} = \sum_i m_i \bar{\xi}_i \times \dot{\bar{\xi}}_i$, όπου $\bar{x}_i = \bar{X}_{KM} + \bar{\xi}_i$.)

Είναι σημαντικό να παρατηρήσετε ότι η διατήρηση αυτών των ποσοτήτων απορρέει από τη συμμετρία της Λαγκρανζιανής στους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου και το μόνο που απαιτείται είναι η αλληλεπίδραση μεταξύ των σωματιδίων να εξαρτάται από τη σχετική θέση των σωματιδίων (και τη σχετική ταχύτητα των σωματιδίων).

Απομένει να υπολογίσουμε τις διατηρήσιμες ποσότητες που παράγονται από τα boosts. Ας θεωρήσουμε το απομονωμένο σύστημα των αλληλεπιδρόντων σωματιδίων. Ο μετασχηματισμός $\bar{X} = \bar{x} + \varepsilon \bar{v} t$ οδηγεί στη μετασχηματισμένη Λαγκρανζιανή $L(\varepsilon)$ η οποία συνδέεται με την αρχική Λαγκρανζιανή $L(0)$ μέσω της σχέσεως:

$$L(\varepsilon) = L(0) + \varepsilon \sum_i m_i \bar{v} \cdot \dot{\bar{x}}_i + \frac{1}{2} \varepsilon^2 M \bar{v} \cdot \bar{v},$$

από την οποία υπολογίζουμε την απειροστή μεταβολή της Λαγκρανζιανής:

$$\left. \frac{\partial L(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \bar{v} \cdot \sum_i m_i \dot{\bar{x}}_i = \frac{dG}{dt} \quad \text{όπου} \quad G = \bar{v} \cdot \sum_i m_i \bar{x}_i = M \bar{v} \cdot \bar{X}_{KM}.$$

Στη προηγούμενη παράγραφο υπολογίσαμε κατ'ουσίαν την απειροστή μεταβολή της Λαγκρανζιανής όταν οι συντεταγμένες μετασχηματίζονται ως: $\bar{X} = \bar{x} + \varepsilon \bar{K}(\bar{x}, t)$.

Βρήκαμε κάνοντας χρήση των εξισώσεων Euler-Lagrange που ικανοποιούνται για την αμετασχημάτιστη τροχιά ($\varepsilon = 0$) ότι:

$$\left. \frac{\partial L(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{x}}_i} \cdot \bar{K}_i \right),$$

και από την υπόθεση ότι η Λαγκρανζιανή έμενε αναλλοίωτη στον μετασχηματισμό αποδείξαμε ότι οι συνισταμένες των γενικευμένων ορμών στη διεύθυνση των γεννητόρων διατηρείτο δηλαδή καταλήξαμε στη διατήρηση της ποσότητας

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{x}}_i} \cdot \bar{K}_i.$$

Στη περίπτωση των boosts η απειροστή μεταβολή είναι ίση με ένα μετασχηματισμό βαθμονόμησης:

$$\left. \frac{\partial L(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \frac{dG(\bar{x}, t)}{dt}.$$

Είναι φυσικό να συμπεριλάβουμε στις συμμετρίες και τους μετασχηματισμούς αυτούς που οδηγούν σε τέτοιες ισοδύναμες Λαγκρανζιανές. Πράγματι και υπό αυτή τη γενικότερη έννοια οι συμμετρίες οδηγούν σε διατήρηση της ποσότητας

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{x}}_i} \cdot \bar{K}_i - G,$$

διότι εξ υποθέσεως:

$$\left. \frac{\partial L(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{x}}_i} \cdot \bar{K}_i \right) = \frac{dG}{dt}.$$

Για τη περίπτωση των boosts ο γεννήτορας $\vec{K} = \vec{v}t$ και το $G = M\vec{v} \cdot \vec{X}_{KM}$ οπότε το γενικευμένο θεώρημα της Noether μας οδηγεί, δεδομένου ότι το διάνυσμα $\vec{v}$ είναι αυθαίρετο, στη διατήρηση του διανύσματος:

$$\vec{G} = t \sum_i m_i \vec{\dot{x}}_i - M\vec{X}_{KM} = t\vec{P} - M\vec{X}_{KM},$$

το οποίο αντιστοιχεί στο γεγονός ότι το κέντρο μάζας του συστήματος κινείται ισοταχώς και το $\vec{G} = M\vec{X}_{KM}(0)$ σχετίζεται με την αρχική θέση του κέντρου μάζας των σωματιδίων.

Απομένει να εξάγουμε τη διατήρηση της ενέργειας από την αναλλοiotητα της Λαγκρανζιανής στις χρονικές μεταθέσεις. Για να οδηγηθούμε όμως σε αυτή τη διατήρηση πρέπει να γενικεύσουμε το θεώρημα της Noether συμπεριλαμβάνοντας χωροχρονικούς μετασχηματισμούς και ορίζοντας ένα μετασχηματισμό συμμετρία όταν αφήνει αναλλοiotη όχι αναγκαστικά τη Λαγκρανζιανή, αλλά τη κυριάρχη και πρωταρχική φυσική ποσότητα: τη δράση.

ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ NOETHER

Μέχρι τώρα έχουμε θεωρήσει μόνο μετασχηματισμούς στις χωρικές συντεταγμένες. Θεωρούμε τώρα μία οικογένεια απειροστών χωροχρονικών μετασχηματισμών $(q, t) \rightarrow (Q, T)$ που προσδιορίζονται από τους γεννήτορες K_i και τ :

$$Q_i(q, t) = q_i + \varepsilon K_i(q, t), \quad T(q, t) = t + \varepsilon \tau(q, t). \quad (M)$$

Οι μετασχηματισμοί αυτοί θα λέγονται συμμετρία αν αφήνουν τη δράση αναλλοiotη. Δηλαδή η δράση υπολογισμένη στη διαδρομή $q(t)$ με t στο διάστημα $[t_1, t_2]$ να ισούται με τη δράση της μετασχηματισμένης σύμφωνα με το (M) διαδρομής $Q(T)$ με T στο διάστημα $[T_1, T_2]$, με $T_1 = t_1 + \varepsilon \tau(q(t_1), t_1)$ και $T_2 = t_2 + \varepsilon \tau(q(t_2), t_2)$. Δηλαδή η M είναι χωροχρονική συμμετρία όταν:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = \int_{T_1}^{T_2} L(Q, \dot{Q}, T) dT.$$

Θα αποδείξουμε ότι σε κάθε χωροχρονικό μετασχηματισμό που αφήνει τη δράση αναλλοiotη (συμμετρία της δράσης) αντιστοιχεί και μία διατηρήσιμη ποσότητα.

Αυτή είναι μία γενικότερη μορφή του θεώρηματος της Noether.

Άσκηση: Αποδείξτε ότι ο μετασχηματισμός $Q = q$, $T = t + \varepsilon$ είναι συμμετρία ενός φυσικού συστήματος με Λαγκρανζιανή $L(q, \dot{q})$.

Για να προσδιορίσουμε τη δράση μιας φυσικής τροχιάς $q(t)$ στις μετασχηματισμένες συντεταγμένες, υπολογίζουμε την δράση στις συντεταγμένες Q, T . Επειδή $Q(q, t) = q(t) + \varepsilon K(q, t)$ και $T(q, t) = t + \varepsilon \tau(q, t)$, κρατώντας όρους πρώτης τάξης στο ε , έχουμε:

$$\dot{Q} = \frac{dQ}{dt} \bigg|_T \frac{dt}{dT} \bigg|_T \approx (\dot{q}(t) + \varepsilon \dot{K}) (1 - \varepsilon \dot{\tau}) \approx \dot{q}(t) + \varepsilon (\dot{K} - \dot{q} \dot{\tau}).$$

Αν αλλάξω τα όρια ολοκλήρωσης του δευτέρου ολοκληρώματος από $T \rightarrow t$ τότε έχω ότι:

$$S = \int_{T_1}^{T_2} L(Q, \dot{Q}, T) dT = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t) + \varepsilon K, \dot{q}(t) + \varepsilon(\dot{K} - \dot{t}\dot{q}), t + \varepsilon\tau) dt (1 + \varepsilon\dot{\tau})$$

$$\approx S + \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} G dt,$$

όπου $G(t) = \frac{\partial L}{\partial q_i} K_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (\dot{K}_i - \dot{t}\dot{q}_i) + \frac{\partial L}{\partial t} \tau + L\dot{\tau}$. Κάνοντας χρήση των εξισώσεων

Euler-Lagrange και προσθαφαιρώντας τον όρο $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i \tau + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} \tau$ η ολοκληρωτέα συνάρτηση γίνεται

$$G(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} K_i + L\tau - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \tau \right) = \frac{dN}{dt},$$

όπου:

$$N = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} K_i + L\tau - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \tau$$

Η απαίτηση της συμμετρίας συνεπάγεται ότι $\varepsilon \int_{t_1}^{t_2} G dt = 0$ και άρα $N(t_2) = N(t_1)$.

Συνεπώς επειδή οι χρόνοι είναι αυθαίρετοι καταλήγουμε ότι η ποσότητα:

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} K_i + L\tau - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \tau \quad (A)$$

διατηρείται κατά τη κίνηση.

Το θεώρημα της Noether σαν αυτήν τη γενική μορφή μπορεί αμέσως να χρησιμοποιηθεί για να αποδειχθεί ότι όταν η Λαγκρανζιανή είναι αναλλοίωτη στις χρονικές μεταθέσεις τότε διατηρείται η ενέργεια του συστήματος, η οποία ορίζεται ως

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L.$$

Δηλαδή η ομογένεια του φυσικού συστήματος στο χρόνο συνεπάγεται τη διατήρηση της ενέργειας του συστήματος.

Και αυτό διότι αν η Λαγκρανζιανή είναι αναλλοίωτη σε καθαρά χρονικές μεταθέσεις, δηλαδή σε μετασχηματισμούς της μορφής

$$Q_i(q, t) = q_i, \quad T(q, t) = t + \varepsilon,$$

τότε και η δράση θα είναι αναλλοίωτη και συνεπώς η διατηρητέα ποσότητα (A) με $K_i = 0$ και $\tau = 1$ δεν είναι άλλη από τη γενικευμένη ενέργεια E .

Η γενικευμένη ενέργεια δεν είναι πάντοτε το άθροισμα κινητικής και δυναμικής ενέργειας. Εάν όμως η Λαγκρανζιανή έχει τη συνήθη μορφή διαφοράς μεταξύ κινητικής, T , και δυναμικής ενέργειας, V , η κινητική ενέργεια είναι μία τετραγωνική συνάρτηση των γενικευμένων ταχυτήτων, δηλαδή είναι της μορφής:

· Το σύμβολο της άθροισης παραλήφθηκε στην απόδειξη για οικονομία χώρου. Εννοούνταν όμως εφόσον ο δείκτης i επαναλαμβανόταν.

$$T = \frac{1}{2} \sum_i A_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j,$$

και η δυναμική ενέργεια δεν εξαρτάται από τη ταχύτητα, τότε η γενικευμένη ενέργεια ταυτίζεται, όπως είναι εύκολο να διαπιστώσετε, με το άθροισμα της κινητικής και δυναμικής ενέργειας.

Επειδή είναι σχεδόν αδιανόητο οι θεμελιώδεις νόμοι της φύσης να μην έχουν αιώνια ισχύ, αναμένουμε η Λαγκρανζιανή που περιγράφει τους θεμελιώδεις νόμους της φύσης να είναι ομογενής στο χρόνο και συνεπώς να ισχύει για όλα τα φυσικά φαινόμενα η αρχή της διατήρησης της ενέργειας.