

Μηχανική II

Ροή στο χώρο των φάσεων, θεώρημα Liouville

Στη Χαμιλτονιανή θεώρηση η κατάσταση του συστήματος προσδιορίζεται κάθε στιγμή από ένα και μόνο σημείο στο χώρο των φάσεων (q, p) , ο οποίος, για ένα σύστημα που έχει n βαθμούς ελευθερίας έχει διάσταση $2n$. Η χρονική εξέλιξη του συστήματος, η διαδρομή δηλαδή που ακολουθεί στο χώρο των φάσεων, προσδιορίζεται μέσω των εξισώσεων Χάμιλτον:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

διότι οι τιμές των $(\dot{q}, \dot{p})$ προσδιορίζουν ανά πάσα στιγμή όλες τις κλίσεις $\frac{dp_i}{dq_i}$ της τροχιάς στο χώρο των φάσεων. Σε κάθε σημείο στο χώρο των φάσεων $x = (q, p)$ αντιστοιχεί ένα διάνυσμα ταχύτητας μεταβολής των μεταβλητών αυτών $\dot{x} = (\dot{q}, \dot{p})$. Τα διανύσματα αυτά ορίζουν ένα διανυσματικό πεδίο στο χώρο των φάσεων. Το σύστημα διαγράφει την τροχιά εκείνη η οποία έχει σε κάθε σημείο της ως εφαπτομένη το διάνυσμα της ταχύτητας που αντιστοιχεί στο σημείο αυτό (βλ. σχήμα 1, τά βέλη είναι στη κατεύθυνση $\dot{x} = (\dot{q}, \dot{p})$ σε κάθε σημείο της τροχιάς $x = (q, p)$). Εάν π.χ. το σύστημα τη χρονική στιγμή t έχει συντεταγμένες (q_i, p_i) το σύστημα τη χρονική στιγμή $t + dt$ θα έχει συντεταγμένες (σε πρώτη προσέγγιση ως προς dt):

$$\left(q_i(t) + dt \left. \frac{\partial H}{\partial p_i} \right|_{(q(t), p(t))}, p_i(t) - dt \left. \frac{\partial H}{\partial q_i} \right|_{(q(t), p(t))} \right),$$

και με τον τρόπο αυτό αν είναι γνωστή η κατάσταση του συστήματος μία χρονική στιγμή θα είναι γνωστή και η κατάσταση του συστήματος κάθε άλλη χρονική στιγμή στο μέλλον αλλά και στο παρελθόν. Αυτή δε η τροχιά του συστήματος είναι μοναδική¹. Η χρονική εξέλιξη του συστήματος παρίσταται συνεπώς από μία τροχιά στο χώρο των φάσεων.

Εάν η Χαμιλτονιανή δεν εξαρτάται άμεσα από το χρόνο, δηλαδή, είναι συνάρτηση απλώς των (q, p) , σε κάθε σημείο του χώρου των φάσεων αντιστοιχεί μία μόνο τιμή της κλίσης της τροχιάς και συνεπώς η τροχιά της εξέλιξης του συστήματος δεν μπορεί να τμήσει τον εαυτό της, άλλως η τροχιά δεν θα ήταν μοναδική. Εάν όμως η Χαμιλτονιανή

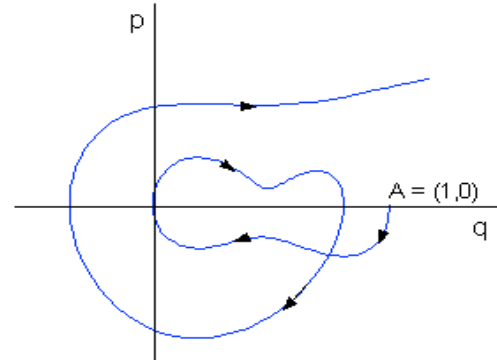
¹ Η μοναδικότητα και η ύπαρξη της τροχιάς για όλους του χρόνους ικανοποιείται συνήθως σε όλα τα φυσικά συστήματα. Η μοναδικότητα της τροχιάς εξασφαλίζεται αν η Χαμιλτονιανή είναι συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση. Αν η Χαμιλτονιανή είναι ανεξάρτητη του χρόνου η ύπαρξη της τροχιάς για όλους τους χρόνους επίσης είναι βέβαιη. Αν η Χαμιλτονιανή εξαρτάται από το χρόνο η ύπαρξη της τροχιάς για όλους τους χρόνους μπορεί να εξασφαλιστεί μόνο αν η χρονική μεταβολή δεν είναι πολύ ταχεία.

εξαρτάται ευθέως από το χρόνο σε κάθε σημείο του χώρου των φάσεων η κλίση αλλάζει με τον χρόνο και ως αποτέλεσμα η τροχιά μπορεί να τμήσει τον εαυτό της. Στην περίπτωση αυτή η μοναδικότητα της λύσης δεν αποκλείει την τομή των τροχιών.

Παράδειγμα: Θεωρήστε τη Χαμιλτονιανή

$$H = \frac{p^2}{2} + (1 - 1.2 \sin t) \frac{q^2}{2}$$

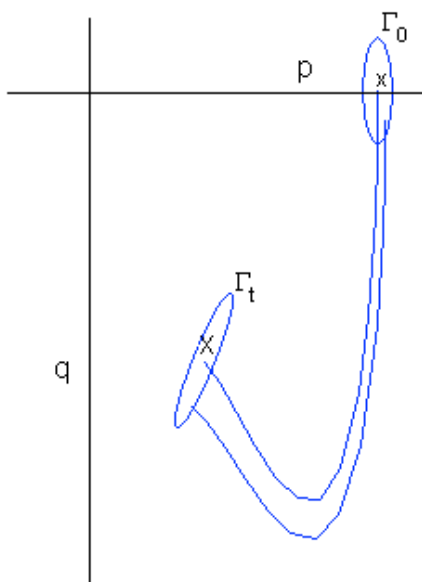
που περιγράφει τη κίνηση ενός αρμονικού ταλαντωτή με χρονικά μεταβαλλόμενη σταθερά ελατηρίου. Η τροχιά του συστήματος που τον χρόνο $t = 0$ είναι το σημείο $q = 1, p = 0$ έχει σχεδιασθεί στο σχήμα.



Όταν, όπως συνήθως συμβαίνει, η Χαμιλτονιανή δεν εξαρτάται από το χρόνο οι τροχιές δεν τέμνονται. Επίσης στην περίπτωση αυτή η Χαμιλτονιανή διατηρείται κατά τη κίνηση (είναι ολοκλήρωμα της κίνησης) και οι τροχιές κείνται στην επιφάνεια $H = C$, όπου η σταθερά $C = H(p_0, q_0)$ προσδιορίζεται από την αρχική θέση (στο χώρο των φάσεων) του συστήματος. Κάνοντας χρήση των εξισώσεων του Χάμιλτον έχουμε ότι η μεταβολή της Χαμιλτονιανής κατά μήκος της τροχιάς του συστήματος μηδενίζεται διότι

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \equiv \left(\vec{\nabla}_{q,p} H \right) (\dot{q}, \dot{p}) = \dot{p}_i \dot{q}_i - \dot{q}_i \dot{p}_i = 0$$

δηλαδή η εφαπτομένη της τροχιάς είναι κάθετη στην κάθετη της επιφάνειας της Χαμιλτονιανής, οπότε η τροχιά παραμένει στην επιφάνεια $H = C$.



Θεωρούμε τώρα ένα χωρίο αρχικών συνθηκών του συστήματος. Δηλαδή θεωρούμε ότι το σύστημα έχει αρχικές θέσεις και ορμές $x = (p, q)$ που βρίσκονται μέσα στο χωρίο Γ_0 του σχήματος 2. Μετά από χρόνο t το χωρίο θα έχει εξελιχθεί σε ένα άλλο χωρίο, το Γ_t . Η θεώρηση της δυναμικής στο χώρο των φάσεων οδηγεί στο καταπληκτικό αποτέλεσμα ότι ο όγκος κάθε χωρίου στο χώρο των φάσεων παραμένει αμετάβλητος κατά τη κίνηση. Αυτό είναι το περιεχόμενο του *θεωρήματος του Liouville*.

Θα αποδείξουμε πρώτα μία γενικότερη πρόταση. Έστω ότι η κατάσταση του συστήματος $\vec{x}$ (όπου το $\vec{x}$ έχει n συνισταμένες) εξελίσσεται σύμφωνα με το δυναμικό νόμο:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, t)$$

όπου και το $\vec{f}$ έχει n συνισταμένες. Τότε εάν αρχικά θεωρήσουμε αρχικές συνθήκες $\vec{x}$ εντός του χωρίου Γ_0 , μετά από χρόνο t , κάθε σημείο $\vec{x}$ του χωρίου θα απεικονισθεί σε ένα νέο σημείο $\vec{X} = \vec{x}(t)$ στο χώρο των φάσεων και το χωρίο Γ_0 θα απεικονισθεί στο χωρίο Γ_t . Ο αρχικός όγκος του χωρίου Γ_0 είναι $V(0) = \int_{\Gamma_0} d^n x$, ενώ όγκος του χωρίου τη χρονική στιγμή t είναι $V(t) = \int_{\Gamma_t} d^n X$. Θα υπολογίσουμε το ρυθμό μεταβολής του όγκου κατά τη κίνηση $\frac{dV}{dt}$. Παρατηρώ ότι στον υπολογισμό του $V(t)$ αν αλλάξω μεταβλητή από $\vec{X}$ σε $\vec{x}$ θα έχω:

$$V(t) = \int_{\Gamma_t} d^n X = \int_{\Gamma_0} J(t) d^n x$$

όπου $J(t)$ η Ιακωβιανή ορίζουσα της απεικόνισης $\vec{x} \rightarrow \vec{X} \equiv \vec{x}(t)$, η οποία είναι ίση με την απόλυτη τιμή της ορίζουσας:

$$J(t) = \left| \frac{\partial(X_1, \dots, X_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \right| = \det \left(\frac{\partial x_i(t)}{\partial x_j(0)} \right)$$

Αρκεί λοιπόν να υπολογίσουμε τη χρονική παράγωγο της Ιακωβιανής. Αν η Ιακωβιανή είναι χρονικά ανεξάρτητη τότε ο όγκος δεν μεταβάλλεται και παραμένει σταθερός². Θεωρούμε την εξέλιξη του συστήματος για $\delta t \ll 1$. Τότε:

$$X_i \equiv x_i(\delta t) = x_i(0) + \delta t \left. \frac{dx_i}{dt} \right|_{x(0), t=0} + O(\delta t^2) = x_i + \delta t f_i(\vec{x}, 0) + O(\delta t^2)$$

και συνεπώς

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} + \delta t \frac{\partial f_i(\vec{x}, 0)}{\partial x_j} + O(\delta t^2),$$

άρα

$$\begin{aligned} J(\delta t) &= \left| \det \left(\delta_{ij} + \delta t \frac{\partial f_i(\vec{x}, 0)}{\partial x_j} + O(\delta t^2) \right) \right| \\ &= 1 + \delta t \vec{\nabla} \cdot \vec{f} + O(\delta t^2) \end{aligned} \quad (2)$$

Η ισότητα αυτή καθίσταται προφανής από το ανάπτυγμα της Ιακωβιανής ορίζουσας. Η ορίζουσα έχει διαγώνιους όρους της μορφής $1 + \delta t \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + O(\delta t^2)$ (χωρίς αθροιστική σύμβαση) και όλοι οι μη διαγώνιοι όροι είναι τάξης $O(\delta t)$. Για να υπολογισθεί η ορίζουσα σε προσέγγιση τάξης $O(\delta t)$ αρκεί να ληφθεί υπόψη μόνο το γινόμενο των διαγώνιων όρων, διότι οι όροι της ορίζουσας που περιλαμβάνουν μη διαγώνιους όρους παράγουν όρους της ορίζουσας οι οποίοι είναι αναγκαστικά δευτέρας τάξης ως προς δt . Στο δε γινόμενο των διαγωνίων όρων σε προσέγγιση τάξης $O(\delta t)$ αρκεί να ληφθεί

² Και αυτό διότι τότε $J(t) = J(0)$ και $J(0) = 1$.

υπόψη μόνο ο σταθερός όρος 1 και το άθροισμα των $\delta t \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$. Με τον τρόπο αυτό καταλήγουμε στη (2). Παρεμπιπτόντως αποδείξαμε τη χρήσιμη ταυτότητα για $\varepsilon \ll 1$,

$$\det(\mathbf{I} + \varepsilon \mathbf{A}) = 1 + \varepsilon \text{Tr}(\mathbf{A}) + O(\varepsilon^2)$$

όπου $\mathbf{I}$ ο μοναδιαίος πίνακας και $\mathbf{A}$ οποιοσδήποτε πίνακας.

Επειδή τώρα $J(0) = 1$ (επειδή ο μετασχηματισμός $\vec{x} \longrightarrow \vec{x}$ είναι ο μοναδιαίος πίνακας), από τη (2) υπολογίζουμε την παράγωγο της Ιακωβιανής ορίζοντας:

$$\frac{dJ}{dt} = \vec{\nabla} \cdot \vec{f}$$

και στην παράγωγο δεν σημειώσαμε τη χρονική στιγμή διότι η ίδια απόδειξη θα ίσχυε για την εξέλιξη του συστήματος από $t \rightarrow t + \delta t$. Συνεπώς $J(t) = 1 + \int_0^t \vec{\nabla} \cdot \vec{f}(\vec{x}(s), s) ds$ και

$$\frac{dV}{dt} = \int_{\Gamma_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{f}(\vec{X}, t) d^n x$$

όπου $\vec{X}$ οι συντεταγμένες των $\vec{x}$ τη χρονική στιγμή t .

Αν για κάθε χρόνο t , $\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = 0$, τότε ο όγκος κάθε χωρίου παραμένει αμετάβλητος κατά την εξέλιξη του συστήματος.

Τα Χαμιλτονιανά συστήματα ικανοποιούν την ασυμπίεστη ιδιότητα του διανυσματικού πεδίου $\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = 0$. Διότι αν θέσουμε $\vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{q} \\ \vec{p} \end{pmatrix}$ και $\vec{f}(\vec{x}, t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} \\ -\frac{\partial H}{\partial \vec{q}} \end{pmatrix}$, οι

κανονικές εξισώσεις του Χάμιλτον γράφονται με αυτή τη συντομογραφία στη μορφή $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, t)$, και

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \right) + \frac{\partial}{\partial p_i} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0.$$

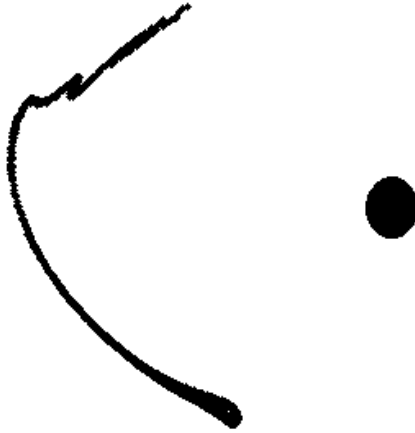
Συνεπώς η ροή στο χώρο των φάσεων είναι ασυμπίεστη και επομένως διατηρεί τον όγκο.

Παρατηρούμε ότι το ασυμπίεστο της ροής στο χώρο των φάσεων είναι απόρροια της ιδιαίτερης μορφής (της συμπλεκτικής μορφής) των κανονικών εξισώσεων του Χάμιλτον. Εάν θεωρούσαμε τη δυναμική στο χώρο των $(q, \dot{q})$ όπου πάλι από κάθε σημείο ξεκινά μία μοναδική τροχιά του συστήματος το θεώρημα Liouville δεν θα ίσχυε γενικά για κάθε Λαγκρανζιανή.

Το θεώρημα Liouville έχει θεμελιώδη σημασία στη κλασσική στατιστική μηχανική, όπου αποδίδεται ίδια πιθανότητα κατάληψης από το σύστημα ίσων όγκων στο χώρο των φάσεων. Το θεώρημα Liouville βεβαιώνει ότι αυτή η πρόταση παραμένει σε ισχύ ανά πάσα χρονική στιγμή.

Παρότι όμως ο όγκος παραμένει αμετάβλητος, η εξέλιξη στο χώρο των φάσεων μπορεί να είναι ιδιαίτερα περίπλοκη, μπορεί, μάλιστα, να είναι τέτοια, έτσι ώστε η απόσταση αρχικά γειτονικών σημείων να αυξάνει εκθετικά με το χρόνο κρατώντας

συγχρόνως το συνολικό όγκο ενός χωρίου σταθερό. Στην περίπτωση αυτή μια μικρή αβεβαιότητα του συστήματος οδηγεί αργότερα σε τεράστια αβεβαιότητα οπότε το σύστημα παρουσιάζει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες. Όταν συμβαίνει αυτό η δυναμική του συστήματος λέγεται χαοτική. Στη περίπτωση αυτή το εξελιγμένο χωρίο παίρνει μία ιδιαίτερα πολύπλοκη μορφή διότι πρέπει συγχρόνως να διατηρεί τον όγκο του και ταυτόχρονα η απόσταση μεταξύ γειτονικών σημείων πρέπει, τουλάχιστον αρχικά, να αποκλίνει εκθετικά (βλέπε σχήμα 2)



Το σχήμα αυτό παράχθηκε από την αναπαράσταση της απεικόνισης:
 $q(t+1) = q(t) \cos \alpha - (q(t) - p(t))^2 \sin \alpha$, $p(t+1) = q(t) \sin \alpha + (q(t) - p(t))^2 \cos \alpha$,
 με $\cos \alpha = 0.22$. Η απεικόνιση αυτή είναι η διακριτή μορφή μιας χαμιλτονιανής ροής η οποία διατηρεί τον όγκο.

Μπορεί να φαίνεται παράξενο ότι υπάρχουν μη χαμιλτονιανές δυναμικές σε φυσικά συστήματα που έχουν ανάλωση στα οποία ο όγκος κάθε χωρίου τείνει στο μηδέν (τι απαιτείται από το διανυσματικό πεδίο f τότε;) τα οποία όμως παρουσιάζουν και αυτά ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες. Τα χωρία στις περιπτώσεις αυτές τείνουν στους καλούμενους παράξενους ελκυστές, περιοχές μηδενικού όγκου αλλά όχι μηδενικών διαστάσεων (π.χ. ένα στερεό σώμα που έχει καταρρεύσει σε ένα επίπεδο σχήμα).

Η απόδειξη που έχουμε δώσει παραπάνω για τη διατήρηση του όγκου μπορεί πανομοιότυπα να εφαρμοσθεί για να αποδειχθεί η διατήρηση της προβολής του χωρίου (της σκιάς του) σε ένα επίπεδο που ορίζεται από κάποιο q και από τη συζυγή του p . Δηλαδή για κάθε i και κάθε t η Ιακωβιανή ορίζουσα του μετασχηματισμού από τις αρχικές θέσεις και ορμές στις θέσεις και ορμές αργότερα : $J(t) = \frac{\partial(q_i(t), p_i(t))}{\partial(q_i(0), p_i(0))} = 1$.

Οπότε κατά την κίνηση διατηρείται το $\iint dp_i dq_i$ (χωρίς αθροιστική σύμβαση). Και επειδή $\iint dp_i dq_i = \oint_{C(t)} p_i dq_i$, όπου $C(t)$ το σύνορο του χωρίου στο επίπεδο (q_i, p_i) αποδεικνύουμε ότι το $\oint_{C(t)} p_i dq_i$ (χωρίς αθροιστική σύμβαση) παραμένει αναλλοίωτο

κατά τη κίνηση. Αυτό σημαίνει ότι οι σχέσεις αβεβαιότητας του Heisenberg, σε κλασσικό επίπεδο, παραμένουν αναλλοίωτες με την πάροδο του χρόνου.

Επειδή το $\int \int dp_i dq_i$ παραμένει αναλλοίωτο για κάθε i , θα παραμένει αναλλοίωτο και το άθροισμα $\int \int dp_i dq_i$ (με αθροιστική σύμβαση). Ομοίως αποδεικνύεται ότι παραμένουν αναλλοίωτα και τα εκάστοτε:

$$\int \int \int dp_k dq_k dp_i dq_i, \dots$$

όπου η ολοκλήρωση γίνεται στους χώρους των τεσσάρων, έξι,... κλπ. διαστάσεων στο χώρο των φάσεων. Τα αναλλοίωτα αυτά λέγονται *αναλλοίωτα του Poincare*. Το θεώρημα Liouville είναι το τελευταίο αναλλοίωτο του Poincare για ολοκλήρωση στο χώρο των $2n$ διαστάσεων.