ΣΗΜΕΙΑ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ – ΓΡΑΜΜΙΚΟΠΟΙΗΣΗ

΄Εστω ένα φυσικό σύστημα που περιγράφεται σε γενικευμένες συντεταγμένες από την Λαγκρανζιανή συνάρτηση

$$L = \frac{1}{2} M_{ij}(q)\dot{q}_i \dot{q}_j - V(q).$$

Ο πίνακας Μ μπορεί να ληφθεί χωρίς καμμία έλλειψη γενικότητας ως συμμετρικός, διότι εάν δεν είναι συμμετρικός μπορεί να αντικατασταθεί από το συμμετρικό του κομμάτι.

Συμμετρικοί-Αντισυμμετρικοί πίνακες

Κάθε πίνακας Α μπορεί να γραφεί ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα. Συμμετρικός πίνακας λέγεται ο πίνακας που είναι ίσος με τον ανάστροφό του, δηλαδή ισχύει ότι $A = A^T$, και αντισυμμετρικός ο πίνακας που ο ανάστροφος του είναι ο αντίθετος πίνακας, δηλαδή $A = - A^T$. Τα διαγώνια στοιχεία αντισυμμετρικών πινάκων είναι μηδενικά.

Κάθε πίνακας, Α, μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμετρικού. Διότι προσθαφαιρώντας τον A^T έχουμε ότι $A = A^S + A^A$ όπου $A^S = \frac{A + A^T}{2}$ το συμμετρικό τμήμα του πίνακα και $A^A = \frac{A - A^T}{2}$ το αντισυμμετρικό.

Χρήσιμη γενική ιδιότητα είναι ότι το διπλό άθροισμα των στοιχείων ενός αντισυμμετρικού, A^A, και ενός συμμετρικού πίνακα, B^S, $A_{ij}^A B_{ij}^S$, είναι πάντοτε μηδέν.

Απόδειξη: Οργανώνοντας την άθροιση κατά ζεύγη, δηλαδή τα στοιχεία i,j και j,i τα αθροίζω πρώτα μαζι, πριν προσθέσω άλλα στοιχεία. Έχω έτσι

$$A_{ij}^A B_{ij}^S \equiv \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}^A B_{ij}^S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}^{n}\left(A_{ij}^A B_{ij}^S + A_{ji}^A B_{ji}^S\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}^{n}\left(A_{ij}^A B_{ij}^S - A_{ij}^A B_{ij}^S\right) = 0 .$$

Χρησιμοποιήσαμε το ότι $A_{ij}^A = -A_{ji}^A$, και ότι όλα τα διαγώνια στοιχεία του αντισυμμετρικού πίνακα μηδενίζονται, δηλαδή $A_{ii}^A = 0$ (χωρίς την αθροιστική σύμβαση), και τέλος ότι ο B^S είναι συμμετρικός: $B_{ij}^S = B_{ji}^S$.

Η απόδειξη αυτή, παρότι πολύ εύκολη, θα μπορούσε να γίνει χρησιμοποίωντας τις ιδιότητες του ίχνους πινάκων, και με την ευκαιρία αυτή ας θυμηθούμε μερικές βασικές ιδιότητες του ίχνους πινάκων. Επειδή ο B^S είναι συμμετρικός, το άθροισμα $A_{ij}^A B_{ij}^S = A_{ij}^A B_{ji}^S$ είναι το ίχνος trace (A^A B^S). Το ίχνος όμως του αναστρόφου πίνακα είναι το ίδιο με το ίχνος του πίνακα, άρα trace(A^A B^S)= trace ((A^A B^S)^T)= trace[(B^S)^T (A^A)^T)]= -trace(B^S A^A) = -trace (A^A B^S).
Συνεπώς trace(A^A B^S) = 0 [χρησιμοποιήσαμε το ότι trace(AB) = trace (BA)].

Στην περίπτωση της Λαγκρανζιανής οι n^2 τιμές $\dot{q}_i\dot{q}_j$ σχηματίζουν έναν συμμετρικό πίνακα. Εάν ο M δεν είναι συμμετρικός τότε η κινητική ενέργεια $\frac{1}{2}M_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j$ είναι ίση με $\frac{1}{2}M_{ij}^S(q)\dot{q}_i\dot{q}_j$, όπου $M^S = \frac{M+M^T}{2}$, δεδομένου ότι $\frac{1}{2}M_{ij}^A(q)\dot{q}_i\dot{q}_j = 0$ (συμμετρικός επί αντισυμμετρικό), όπου $M^A = \frac{M-M^T}{2}$.
Συνεπώς χωρίς έλλειψη της γενικότητας ο πίνακας της κινητικής ενέργειας μπορεί να ληφθεί ως συμμετρικός.

Για να προσδιορίσουμε τις εξισώσεις κίνησης, προσδιορίζουμε πρώτα τις γενικευμένες ορμές. Λόγω της συμμετρίας του πίνακα M, οι γενικευμένες ορμές είναι:

$p_a = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = M_{ai}(q)\dot{q}_i$ και η ολική χρονική παράγωγός της:

$\dot{p}_a = M_{ai}(q)\ddot{q}_i + \dfrac{\partial M_{ai}}{\partial q_j}\dot{q}_i\dot{q}_j$.

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange παίρνουν λοιπόν τη μορφή:

$$M_{ai}(q)\ddot{q}_i + \frac{\partial M_{ai}(q)}{\partial q_j}\dot{q}_i\dot{q}_j - \frac{1}{2}\frac{\partial M_{ij}(q)}{\partial q_a}\dot{q}_i\dot{q}_j + \frac{\partial V}{\partial q_a} = 0\,. \qquad (1)$$

Εάν υπάρχουν σημεία $q_e(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ που καθιστούν την δυναμική ενέργεια στάσιμη, $\left.\dfrac{\partial V}{\partial q}\right|_{q=q_e} = 0$, τότε τα σημεία αυτά λέγονται σημεία ισορροπίας του φυσικού συστήματος και αυτό διότι αν βρεθούμε στο σημείο q_e με μηδενική ταχύτητα $\dot{q}\big|_{q=q_e} = 0$, τότε ανά πάσα στιγμή $q(t) = q_e$. Πράγματι η $q(t) = q_e$ αποτελεί λύση της (1). Επίσης αν αρχικά $q(0) = q_e$, $\dot{q}(0) = 0$ τότε για κάθε χρονική στιγμή $q(t) = q_e$, αν υποθέσουμε ότι η (1) έχει μια μόνο λύση. Προσέξτε ότι για τον προσδιορισμό ενός σημείου ισορροπίας δεν αρκεί να θεωρήσετε ότι το σύστημα βρίσκεται στη θέση q_e, πρέπει επίσης να βεβαιώσετε ότι έχει και μηδενική ταχύτητα στο σημείο αυτό. Π.χ. στο εκκρεμές το κατώτερο σημείο είναι σημείο ισορροπίας μόνον όταν η μπάλα του εκκρεμούς βρεθεί εκεί με μηδενική ταχύτητα. Η ανάγκη καθορισμού και της ταχύτητας έγκειται στο γεγονός ότι οι εξισώσεις Euler-Lagrange είναι δευτέρας τάξεως και οι λύσεις απαιτούν για τον προσδιορισμό τους δύο αρχικές συνθήκες

Άσκηση: Δείξτε χρησιμοποιώντας ένα ανάπτυγμα Taylor πως η θέση ισορροπίας και η μηδενική ταχύτητα μία χρονική στιγμή αρκούν για να δείξει κανείς ότι το σύστημα θα παραμείνει στη θέση ισορροπίας για πάντα.

Για συστήματα λίγων βαθμών ελευθερίας, η κατάσταση ισορροπίας, είτε είναι φυσικά προφανής, λ.χ. τα σημεία ισορροπίας του εκκρεμούς, είτε είναι γενικά εύκολο να προσδιορισθούν τα στάσιμα σημεία της δυναμικής ενέργειας. Αν όμως ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας μεγαλώσει, όπως συμβαίνει στα συνεχή μέσα, τότε ο προσδιορισμός των σημείων ισορροπίας είναι ιδιαιτέρως δύσκολος, και ενώ μπορούμε να ξέρουμε ότι το φυσικό σύστημα βρίσκεται πλησίον ενός σημείου ισορροπίας, δεν γνωρίζουμε εάν πλησίον αυτού υπάρχουν άλλα σημεία ισορροπίας στα οποία μπορούμε να μεταβούμε εάν το σύστημα δαταραχθεί αρκετά. Π.χ. εάν το σημερινό κλίμα είναι σε κάποιο σημείο ισορροπίας κανείς δεν γνωρίζει αν υπάρχουν άλλα σημεία ισορροπίας πλησίον αυτού, στα οποία θα μπορούσαμε να μεταβούμε, αν το σύστημα διαταραχθεί επαρκώς.

Όσο δύσκολο είναι να προσδιορίσουμε τα σημεία ισορροπίας ενός συστήματος, τόσο εύκολο, ακόμη και για τα πιο πολύπλοκα σύστηματα, είναι να μελετήσουμε τη συμπεριφορά του συστήματος περί το σημείο ισορροπίας. Και αυτό διότι αν οι κινήσεις περί το σημείο ισορροπίας έχουν μικρό πλάτος τότε στις εξίσώσεις (1) που τις περιγράφουν μπορούμε να αμελήσουμε τους όρους ανώτερης τάξεως και να έχουμε ικανή περιγραφή του συστήματος μόνο με τη γραμμική προσέγγιση της (1) περί το σημείο ισορροπίας. Η διαδικασία προσέγγισης των εξισώσεων κίνησης λέγεται *γραμμικοποίηση* των εξισώσεων κίνησης.

Επί του προκειμένου για να γραμμικοποίησουμε την (1) θεωρούμε ότι όχι μόνο η σχετική απομάκρυνση από το σημείο ισορροπίας $q-q_e$ είναι μικρή, αλλά και ότι η ταχύτητα είναι μικρή (μπορεί το σύστημα να είναι πλησίον του σημείου ισορροπίας αλλά αν η ταχύτητα του δεν είναι μικρή δεν θα παραμείνει για πολύ πλησίον του σημείου ισορροπίας). Έτσι στην γραμμικοποίηση της εξίσωσης κίνησης (1) αμελούμε τον δεύτερο και τρίτο όρο, διότι είναι δευτέρας τάξεως. Για να γραμμικοποιήσουμε τον πρώτο όρο αναπτύσσουμε τον πίνακα M σε σειρά Taylor περί το σημείο ισορροπίας

$$M(q) = M(q_e) + (q_i - q_{e\,i}) \left.\frac{\partial M}{\partial q_i}\right|_{q=q_e} + \cdots$$

οπότε η γραμμικοποίηση του πρώτου όρου δίνει $M(q_e)\ddot{q}$. Ο τελευταίος όρος γραμμικοποιείται πάλι αναπτύσσοντας σε σειρά Taylor:

$$\frac{\partial V}{\partial q_a} = \left.\frac{\partial V}{\partial q_a}\right|_{q=q_e} + (q_i - q_{e\,i}) \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_a}\right|_{q=q_e} + \cdots$$

και επειδή ο σταθερός όρος $\left.\frac{\partial V}{\partial q_a}\right|_{q=q_e} = 0$ μηδενίζεται (εδώ υπεισέρχεται η υπόθεση ότι το q_e είναι σημείο ισορροπίας), η γενικευμένη δύναμη προσεγγίζεται γραμμικά από

$$\frac{\partial V}{\partial q_a} \approx (q_i - q_{e\,i}) \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_a}\right|_{q=q_e}$$

Οπότε η γραμμικοποίηση της (1) περί το σημείο ισορροπίας q_e είναι:

$$M_{ai}(q_e)\ddot{q}_i + (q_i - q_{e\,i}) \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_a}\right|_{q=q_e} = 0$$

Ως προς τις σχετικές θέσεις $X_i = q_i - q_{ei}$ μικρές κινήσεις περί το σημείο ισορροπίας ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$M_{ai}\ddot{X}_i + K_{ai}X_i = 0\,, \tag{2}$$

όπου γράψαμε τον πίνακα των δευτέρων παραγώγων του δυναμικού στο σημείο ισορροπίας με K. Προσέξτε ότι και οι δύο πίνακες M , K στην (2) είναι σταθεροί πίνακες και αναφέρονται στο σημείο ισορροπίας, δηλαδή όλες οι πληροφορίες για το σημείο ισορροπίας εμπεριέχονται στους πίνακες M και K και μόνον εκεί.
Οι γραμμικές εξισώσεις (2) μπορούν να γραφούν και υπό μορφή πινάκων ως

$$M\ddot{X} + KX = 0$$

όπου με X συμβολίζεται το διάνυσμα στήλη $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$.

Αντί να γραμμικοποίησουμε τις εξισώσεις Euler-Lagrange περί το σημείο ισορροπίας θα μπορούσαμε να γράψουμε κατευθείαν τη Λαγκρανζιανή η οποία διέπει τη γραμμική κίνηση. Η Λαγκρανζιανή από την οποία παράγονται οι γραμμικοποιημένες εξισώσεις είναι:

$$L_\gamma = \frac{1}{2} M_{ij}(q_e)\dot{q}_i\dot{q}_j - \frac{1}{2} K_{ij}(q_e) q_i q_j$$

όπου στον μεν όρο της κινητικής ενέργειας ο πίνακας M λαμβάνει τη σταθερή τιμή του στο σημείο ισορροπίας, η δε δυναμική ενέργεια αναπτύσσεται σε σειρά Taylor περί το σημείο ισορροπίας:

$$V(q) = V(q_e) + \left.\frac{\partial V}{\partial q_i}\right|_{q=q_e} (q_i - q_{ei}) + \frac{1}{2} K_{ij}(q_e)(q_i - q_{ei})(q_j - q_{ej})$$

όπου,

$$K_{ij}(q_e) = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{q=q_e}$$

και προσεγγίζεται στη Λαγκρανζιανή μόνο με τον όρο δεύτερης τάξης, δεδομένου ότι στο σημείο ισορροπίας ο πρώτης τάξης όρος μηδενίζεται, ο δε σταθερός όρος μπορεί να παραληφθεί από την Λαγκρανζιανή, διότι είναι μετασχηματισμός βαθμονόμησης της Λαγκρανζιανής και δεν επηρρεάζει τις εξισώσεις κίνησης.

Άσκηση : Δείξτε ότι η L_γ παράγει τις γραμμικοποιημένες εξισώσεις κίνησης.

Είναι γενικά ευκολότερο να παράχθούν οι γραμμικοποιημένες εξισώσεις κίνησης από τη Λαγκρανζιανή L_γ και πρέπει να προτιμάται αυτός ο τρόπος παραγωγής της γραμμικοποίησης του συστήματος.