

Μηχανική II

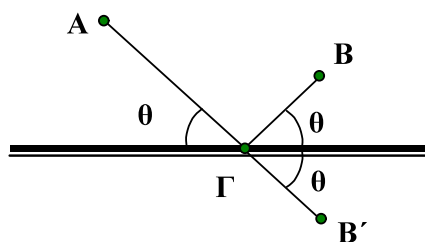
Αρχή Ελάχιστης Δράσης

Η νευτώνεια μηχανική είναι η πρώτη σύγχρονη φυσική θεωρία για τη κίνηση της ύλης. Ο Νεύτων για να εξηγήσει τους νόμους του Κέπλερ εισήγαγε επιπλέον τη πρώτη θεμελιώδη δύναμη της φύσης την βαρυτική δύναμη. Οι επιπτώσεις της κατασκευής του Νεύτωνα ήταν τεράστιες. Εξηγήθηκαν πολύπλοκα φυσικά φαινόμενα όπως οι παλίρροιες, και δόθηκε η δυνατότητα στους φυσικούς, τους επονομαζόμενους φυσικούς φιλοσόφους, να βλέπουν τον κόσμο να κινείται ως μια τεράστια μηχανή που υπακούει σε κάποιους απλούς αλλά θεμελιώδεις νόμους και να προβλέπουν την εξέλιξη του. Η ακρίβεια της νευτώνειας θεωρίας είναι καταπληκτική. Βασισμένοι στην νευτώνεια θεώρηση ο Adams και ο LeVerrier μπόρεσαν να προβλέψουν την ύπαρξη του Ποσειδώνα από παρατηρήσεις των διαταραχών της τροχιάς του Ουρανού.

Η νευτώνεια θεώρηση έχει προβλήματα. Γνωρίζουμε ότι η απόλυτη θεώρηση του χώρου και του χρόνου χρειάζεται σχετικιστική αναθεώρηση, όπως και η εφαρμογή της μηχανικής στον μικρόκοσμο απαιτεί την αναθεώρηση της κβαντομηχανικής.. Εμείς δεν θα ασχοληθούμε με την αναθεώρηση της μηχανικής του Νεύτωνα θα συνεχίσουμε να κινούμεθα στον νευτώνειο κόσμο αλλά θα προσπαθήσουμε να ανακαλύψουμε τη βαθύτερη δομή της Νευτώνειας θεωρίας.

Αν η Μηχανική I ήταν ουσιαστικά η μελέτη του φυσικού κόσμου όπως διαμορφώθηκε από τον Νεύτωνα μετά την έκδοση της Principia στις αρχές του 1687, η Μηχανική II θα είναι κατεξοχήν η μελέτη της συνεισφοράς του Λαγκράνζ (1736-1813) και του Χάμιλτον (ιδιαίτερος κατά τη τριετία 1834-1836).

Δεν θα ακολουθήσουμε εδώ την ιστορική εξέλιξη συστηματοποίησης των νευτώνειων νόμων αλλά μια διαφορετική διαδρομή, ένα παιχνίδι διαπιστώσεων, εμπνευσμένο από τη μεταφυσική θα μπορούσε να πει κάποιος, αναζήτηση μιας βαθύτερης αρχής που υπαγορεύει την εξέλιξη του κόσμου. Ήδη στην αρχαία Ελλάδα, από το 2ο π.Χ. αιώνα, ο Ήρωνας ο Αλεξανδρινός, διαπίστωσε ότι το φως ανακλώμενο σε ένα επίπεδο κάτοπτρο ακολουθεί τη συντομότερη διαδρομή και



διατύπωσε την άποψη ότι η φύση επιλέγει για το φως τη μικρότερη διαδρομή. Ακολουθώντας αντίστροφα την αρχή αυτή, μπορούμε να πούμε ότι αφού το συνολικό μήκος της διαδρομής του ανακλώμενου φωτός από το A στο B (βλ. σχήμα) είναι το μικρότερο δυνατό, θα πρέπει η διαδρομή ΑΓΒ να είναι η μικρότερη δυνατή, όπως επίσης και η

ΑΓΒ', όπου Β' το συμμετρικό σημείο του Β ως προς το κάτοπτρο. Προφανώς, όπως γνωρίζουμε από την Ευκλείδεια γεωμετρία, η ευθεία είναι η συντομότερη διαδρομή που συνδέει δύο σημεία (εδώ τα Α και Β'), επομένως το τμήμα ΑΓ ανήκει στην ίδια ευθεία με το ΓΒ' και στη συνέχεια εύκολα μπορεί να καταλήξει κανείς, με απλά γεωμετρικά επιχειρήματα ως προς τις γωνίες μεταξύ των διαδρομών του φωτός και του κατόπτρου, στο νόμο της ανάκλασης (ότι η γωνία πρόσπτωσης σε ένα κάτοπτρο είναι ίση με τη γωνία της ανάκλασης). Δεν φαίνεται όμως αυτή η αρχή να είναι τόσο γενική αφού στην περίπτωση της διάθλασης θα κατέληγε σε μηδενική διάθλαση.

Στα μέσα του 17ου αιώνα ο Fermat, αλλάζοντας λίγο τη διατύπωση της αρχής, λέγοντας δηλαδή ότι ο χρόνος κίνησης του φωτός και όχι το μήκος της διαδρομής είναι το ελάχιστο δυνατό, κατέληξε στο σωστό νόμο της διάθλασης, του Snell. Ο γάλλος μαθηματικός Maupertuis¹ διατύπωσε το 1744 μια αρχή ελαχίστου, σύμφωνα με την οποία οι κινήσεις των σωμάτων είναι τέτοιες ώστε η συνολική "δράση" να είναι ελάχιστη, γεγονός το οποίο θεώρησε ως απόδειξη της σοφίας του Θεού. Η δράση την οποία θεώρησε ο Maupertuis όμως δεν ήταν η σωστή και από τις αποδείξεις του έλειπε η σαφήνεια και η ακρίβεια. Μερικά χρόνια αργότερα ο L. Euler και ο Lagrange έδωσαν την ορθή μορφή στη δράση και τον επόμενο αιώνα ο Hamilton διατύπωσε με απόλυτη σαφήνεια την «αρχή ελάχιστης δράσης» -least action principle- (όπως συνηθίζεται εσφαλμένα, αλλά για ιστορικούς λόγους, να αναφέρεται) ή «αρχή στάσιμης δράσης» ή απλά «αρχή του Χάμιλτον».

Ας ξεκινήσουμε με δεδομένο την αρχή αυτή και ας προσπαθήσουμε να την κατανοήσουμε:

Ένα σωματίο που ξεκινά από το σημείο Α τη χρονική στιγμή t_A , και φθάνει στο σημείο Β τη χρονική στιγμή t_B , ακολουθεί στο ενδιάμεσο χρονικό διάστημα τη διαδρομή εκείνη για την οποία η δράση, δηλαδή η ποσότητα:

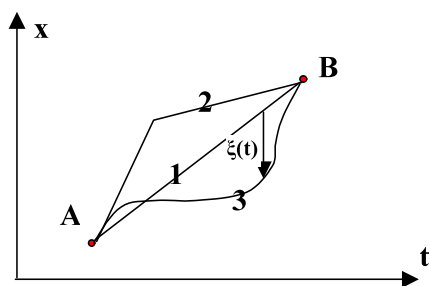
$$S = \int_{t_A}^{t_B} (E_{\text{κιν}} - E_{\text{δυν}}) dt,$$

καθίσταται στάσιμη.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα για να πιστέψουμε ότι η παραπάνω αρχή είναι σωστή.

(1) Έστω ένα ελεύθερο σωματίο σε μία διάσταση. Η δράση για το σωματίο αυτό είναι:

$$S = \int_{t_A}^{t_B} \frac{1}{2} m u^2 dt.$$



Ποια διαδρομή στο χώρο και το χρόνο είναι αυτή που ελαχιστοποιεί την παραπάνω ποσότητα; Δοκιμάστε τις τρεις διαδρομές που φαίνονται στο ακόλουθο χωροχρονικό διάγραμμα. Για τη διαδρομή (1) η δράση είναι

$$S_1 = \frac{1}{2} m \frac{(x_B - x_A)^2}{t_B - t_A}.$$

Για τη διαδρομή (2) η δράση είναι

$$S_2 = \frac{1}{2} m \left[\frac{(x_B - x_*)^2}{t_B - t_*} + \frac{(x_* - x_A)^2}{t_* - t_A} \right],$$

όπου x_* και t_* είναι

¹ Pierre-Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759) Πρόκειται για τον άνθρωπο που εισήγαγε τη νευτώνεια θεωρία για τη βαρύτητα στη Γαλλία. Σε μια επιστημονική αποστολή στη Λαπωνία, επιβεβαίωσε την εικασία του Νεύτωνα ότι η Γη είναι πεπλατυσμένη στον Ισημερινό.

t_* οι χωροχρονικές συντεταγμένες του σημείου θλάσης της τεθλασμένης διαδρομής. Τέλος για τη διαδρομή (3) δεν μπορούμε να απλοποιήσουμε την έκφραση για τη δράση αφού δεν γνωρίζουμε ποια ακριβώς είναι η συναρτησιακή σχέση της διαδρομής αυτής. Ας εφαρμόσουμε στη συνέχεια την αρχή ελάχιστης δράσης προκειμένου να καθορίσουμε τη «σωστή» διαδρομή, αυτή δηλαδή που πράγματι θα επιλέξει για να κινηθεί το σωματίο.

Για τη διαδρομή (1) δεν μπορούμε να πούμε τίποτε περισσότερο· η διαδρομή αυτή είναι καθορισμένη και επομένως η δράση που αντιστοιχεί σε αυτή είναι και αυτή καθορισμένη. Η διαδρομή (2) είναι στην πραγματικότητα μια ολόκληρη οικογένεια διαδρομών, ανάλογα με τη θέση του ενδιαμέσου σημείου (x_*, t_*) . Αναζητώντας λοιπόν την ιδιαίτερη διαδρομή, μέσα σε αυτή την απειρία διαδρομών, που καθιστά τη δράση ελάχιστη (παρουσιάζει μέγιστο η δράση; [Υπόδειξη: τι συμβαίνει όταν $x_* \rightarrow \infty$]) θα πρέπει να παραγωγίσουμε τη δράση ως προς τις παραμέτρους της καμπύλης. Είναι εύκολο να δείτε ότι σε αυτή την περίπτωση προκύπτει ότι το ελάχιστο της δράσης συμβαίνει όταν οι ταχύτητες των δύο τμημάτων της διαδρομής συμπίπτουν, οπότε τότε η δράση είναι ίση με την S_1 . Τελειώσαμε; Βρήκαμε τη διαδρομή που καθιστά τη δράση ελάχιστη; Όχι βέβαια. Βρήκαμε μόνο τη διαδρομή εκείνη, μέσα από μια πολύ στενή οικογένεια διαδρομών, που καθιστά τη δράση ελάχιστη. Θα πρέπει κανείς όμως να εξετάσει κάθε είδους διαδρομή, όσο αλλοπρόσαλλη και αν φαίνεται αυτή. Μα πώς θα παραμετροποιήσουμε κάθε δυνατή διαδρομή ώστε να ζητήσουμε το ακρότατο της δράσης ως προς κάθε παράμετρο; Αυτό θα αποτελέσει τη συνέχεια της μελέτης μας· πρόκειται για ένα ιδιαίτερο κλάδο της ανάλυσης, τον *λογισμό των μεταβολών*, θεμελιωτές του οποίου θα μπορούσε να πει κανείς ότι ήταν οι αδελφοί Jakob και Johann Bernoulli, (ο πρώτος κατάφερε να υπολογίσει τη μορφή της καμπύλης που σχηματίζει μια αλυσίδα κρεμασμένη από τα δυο της άκρα, ζητώντας την καμπύλη εκείνη που έχει πιο χαμηλά το κέντρο βάρους της). Προς το παρόν ας συνεχίσουμε την προσπάθειά μας στο δεδομένο πρόβλημα.

Γράφουμε την τυχαία διαδρομή (3) ως εξής: $x(t) = x_A + \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A}(t - t_A) + \xi(t)$. Στο

πρώτο μέρος της έκφρασης αναγνωρίζει κανείς την ομαλή κίνηση της διαδρομής (1). Το $\xi(t)$ είναι μια συνάρτηση που καθορίζει την οποιαδήποτε διαδρομή (βλ. σχήμα). Η

δράση τώρα παίρνει τη μορφή $S_3 = \frac{1}{2}m \int_{t_A}^{t_B} (\bar{u} + \xi)^2 dt$, όπου $\bar{u} = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A}$, είναι η μέση

ταχύτητα της τυχαίας διαδρομής. Παρατηρήστε όμως ότι

$$\int_{t_A}^{t_B} \xi dt = \int_A^B d\xi = \xi(B) - \xi(A) = 0, \text{ αφού η τυχαία διαδρομή ξεκινά και καταλήγει στα}$$

σημεία A και B αντίστοιχα, όπως και η ευθύγραμμη διαδρομή (1). Έτσι

$$S_3 = \frac{1}{2}m\bar{u}^2 \int_{t_A}^{t_B} dt + \frac{1}{2}m \int_{t_A}^{t_B} \xi^2 dt. \text{ Το δεύτερο ολοκλήρωμα όντας θετικά ορισμένο,}$$

παίρνει την ελάχιστη τιμή του, μηδέν, όταν $\xi = 0$, όταν δηλαδή $\xi = \text{σταθερό} = \xi(A) = 0$, ενώ το πρώτο ολοκλήρωμα είναι ίσο με την S_1 . Τώρα πλέον είμαστε σίγουροι ότι η ομαλή κίνηση είναι εκείνη που προσδίδει στη δράση την ελάχιστη τιμή της. Αυτή λοιπόν επιλέγει το ελεύθερο σωματίο. Η αρχή ελάχιστης δράσης μας οδήγησε στο γνωστό, ορθό αποτέλεσμα. Η μέθοδος που ακολουθήσαμε στην απόδειξή μας είναι σε

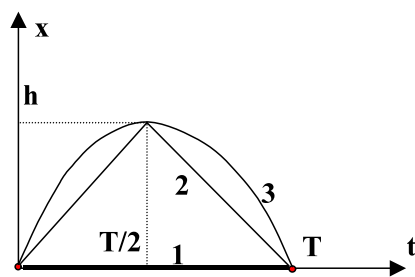
αδρές γραμμές η μέθοδος που θα ακολουθήσουμε σε γενικότερα προβλήματα παρακάτω. Είναι εύκολο να γενικεύσετε το παραπάνω αποτέλεσμα στην περίπτωση κίνησης σώματος στον 3διάστατο κόσμο. [Υπόδειξη: αντί του u^2 θα έχετε $(\vec{u})^2$ το οποίο μπορείτε να γράψετε ως $(\bar{u}_x + \xi_x, \bar{u}_y + \xi_y, \bar{u}_z + \xi_z)^2$.]

(2) Προκειμένου να μελετήσουμε την πλήρη μορφή της έκφρασης για τη δράση, ας θεωρήσουμε το απλούστερο πρόβλημα κίνησης σώματος σε πεδίο: μια μπάλα που την πετάμε κατακόρυφα προς τα επάνω μέσα στο βαρυτικό πεδίο της Γης και επιστρέφει στα χέρια μας T δευτερόλεπτα αργότερα. Θα υπολογίσουμε τη δράση για τις τρεις διαδρομές που φαίνονται στο σχήμα. (α) Διαδρομή (1): $x(t) = 0$, $S_1 = 0$. (β)

Διαδρομή (2): $x(t) = \frac{2h}{T}t$, για $0 \leq t \leq T/2$, και $x(t) = h - \frac{2h}{T}(t - T/2)$, για

$T/2 \leq t \leq T$. Αντίστοιχη δράση $S_2 = \frac{2h^2 m}{T} - \frac{mghT}{2}$. (γ) Διαδρομή (3):

$x(t) = \frac{4t(T-t)h}{T^2}$. Αντίστοιχη δράση $S_3 = \frac{8mh^2}{3T} - \frac{2mghT}{3}$. Προσέξτε ότι η 3η



οικογένεια διαδρομών που θεωρήσαμε περιέχει τη σωστή εξίσωση κίνησης (2ου βαθμού ως προς το χρόνο). Παρά ταύτα οι τρεις οικογένειες διαδρομών που μελετήσαμε δεν εξαντλούν προφανώς όλες τις δυνατές διαδρομές που συνδέουν το αρχικό με το τελικό σημείο. Σκοπός μας όμως εδώ δεν είναι να βρούμε τη μοναδική εκείνη διαδρομή που καθιστά τη δράση στάσιμη, (δεν έχουμε μάθει ακόμη την κατάλληλη τεχνική

για να το πράξουμε αυτό) αλλά μάλλον να βεβαιωθούμε ότι από τις διαδρομές αυτές που επιλέξαμε (μέσα στις οποίες περιέχεται η σωστή), η σωστή θα μας δώσει την ελάχιστη τιμή της δράσης. Μοναδική παράμετρος και της διαδρομής (2) και της (3) είναι η h . Παραγωγίζοντας ως προς αυτήν, η δράση καθίσταται ελάχιστη όταν $h = gT^2/8$ και στις δύο περιπτώσεις! Αυτή όμως είναι η πραγματική μέγιστη ανύψωση του σώματος. Σύμπτωση; Όχι απολύτως. Η διαδρομή τύπου (2) αν και λανθασμένη στην προσπάθειά της να μειώσει τη δράση όσο το δυνατό περισσότερο πέρασε από το σωστό ύψος. Για παράδειγμα, χρησιμοποιώντας ως εξίσωση κίνησης μια σχέση τετάρτου βαθμού παίρνουμε ως καλύτερη τιμή για το h την πολύ καλή προσέγγιση της πραγματικής τιμής $7gT^2/64$. Ας δούμε και τις αντίστοιχες τιμές της

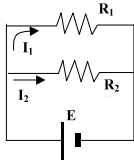
δράσης: $S_2^{(\min)} = -\frac{1}{32}mg^2T^3$ και $S_3^{(\min)} = -\frac{1}{24}mg^2T^3 < S_2^{(\min)}$. Νικητής λοιπόν σε

αυτή την προσπάθεια ελαχιστοποίησης αναδείχθηκε (ύστερα από αντικατάσταση της τιμής του h που βρήκαμε παραπάνω) η διαδρομή $x(t) = \frac{gt(T-t)}{2} = \frac{gT}{2}t - \frac{1}{2}gt^2$, η

γνωστή εξίσωση κίνησης δηλαδή.

(3) Προτού εγκαταλείψουμε το παιγνίδι αυτό των υπολογισμών ας εξετάσουμε μια παρόμοια² αρχή ελαχίστου σε ένα διαφορετικό χώρο της φυσικής, ώστε να φανεί το εύρος εφαρμογής τέτοιων αρχών στη φυσική: Σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα η κατανομή των ρευμάτων στους διάφορους κλάδους είναι η πλέον οικονομική από πλευράς κατανάλωσης θερμότητας. Μια τέτοια αρχή μπορεί κάλλιστα να αντικαταστήσει το 2ο

² Της οποίας όμως οι βάσεις είναι εντελώς διαφορετικές από την αρχή ελαχίστης δράσης.

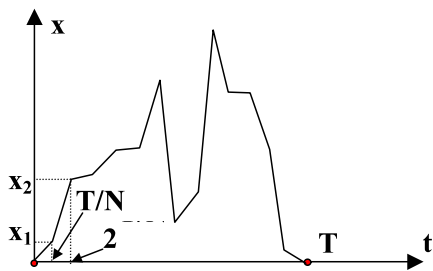


νόμο του Kirchhoff (την αρχή διατήρησης της ενέργειας δηλαδή). Για παράδειγμα θα θεωρήσουμε το απλούστατο κύκλωμα δύο ωμικών αντιστάσεων συνδεδεμένων παράλληλα με μια ιδανική μπαταρία (βλ. σχήμα). Ο συνολικός ρυθμός κατανάλωσης θερμότητας στις δύο αντιστάσεις είναι

$$\frac{dQ}{dt} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 = I_1^2 R_1 + (I - I_1)^2 R_2,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την αρχή διατήρησης φορτίου στον κόμβο που διαχωρίζονται τα δύο ρεύματα. Ζητώντας στη συνέχεια ο ρυθμός αυτός να είναι ο ελάχιστος δυνατός μεταβάλλοντας την τιμή του ρεύματος I_1 , βρίσκουμε $I_1 R_1 - (I - I_1) R_2 = 0$, δηλαδή οι τάσεις στα άκρα των δύο αντιστάσεων πρέπει να συμπίπτουν!

Η αρχή ελάχιστης δράσης φαίνεται να «δουλεύει». Ποια η σχέση της όμως με τους νόμους του Νεύτωνα; Και πώς είναι δυνατό το σωματίο να γνωρίζει εκ των προτέρων ποια είναι η διαδρομή εκείνη που του παρέχει την ακρότατη δράση; Μήπως ακολουθεί κάθε διαδρομή, υπολογίζει τη δράση και επιστρέφει πίσω στο χρόνο για να δοκιμάσει κάποια άλλη;! Προσπαθώντας προς το παρόν να διαλευκάνουμε το ζήτημα θα επανεξετάσουμε το παράδειγμα (2) με τη μπάλα που ανεβοκατεβαίνει στο



βαρυτικό πεδίο της Γης. Προκειμένου μάλιστα να είμαστε απολύτως σωστοί δεν θα δοκιμάσουμε πλέον ορισμένες οικογένειες διαδρομών, αλλά μια τυχαία διαδρομή, την οποία όμως θα τμήσουμε σε πάρα πολλά χρονικά διαστήματα αντικαθιστώντας την με μια τεθλασμένη γραμμή (βλ. σχήμα). Είναι εύκολο να δείτε ότι η δράση που αντιστοιχεί σε αυτή την καμπύλη δίνεται από το ακόλουθο άθροισμα:

$$S = \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{2} m \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{T/N} - mg \frac{x_i + x_{i-1}}{2} (T/N) \right].$$

Για να είναι το άθροισμα αυτό ακρότατο ως προς όλες τις δυνατές διαδρομές, που στη θεώρησή μας παραμετροποιούνται μέσω των ενδιάμεσων θέσεων $(x_1, x_2, \dots, x_{N-1})$ θα πρέπει $\partial S / \partial x_k = 0$ για όλες τις τιμές του k , από 1 έως $N-1$. Εκτελώντας τις πράξεις καταλήγουμε στο ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$\frac{x_k - x_{k-1}}{T/N} - \frac{x_{k+1} - x_k}{T/N} - g(T/N) = 0$$

Ανακατανέμοντας τους όρους και παίρνοντας το όριο $N \rightarrow \infty$, η παραπάνω σχέση διαβάζεται:

$$\frac{\frac{x_{k+1} - x_k}{T/N} - \frac{x_k - x_{k-1}}{T/N}}{T/N} = -g \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \ddot{x}(t) = -g.$$

Δηλαδή, η στασιμοποίηση της δράσης ως προς κάθε δυνατή διαδρομή είναι ισοδύναμη, τουλάχιστον για το πρόβλημα που εξετάζουμε, με το 2ο νόμο του Νεύτωνα.

Άσκηση: Δείξτε με την ίδιο τρόπο ότι η κίνηση $x(t)$ που ελαχιστοποιεί τη δράση

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x) \right) dt$$

είναι η φυσική κίνηση που ικανοποιεί τη Νευτώνεια εξίσωση

$$m\ddot{x} = -dV/dx \quad .$$