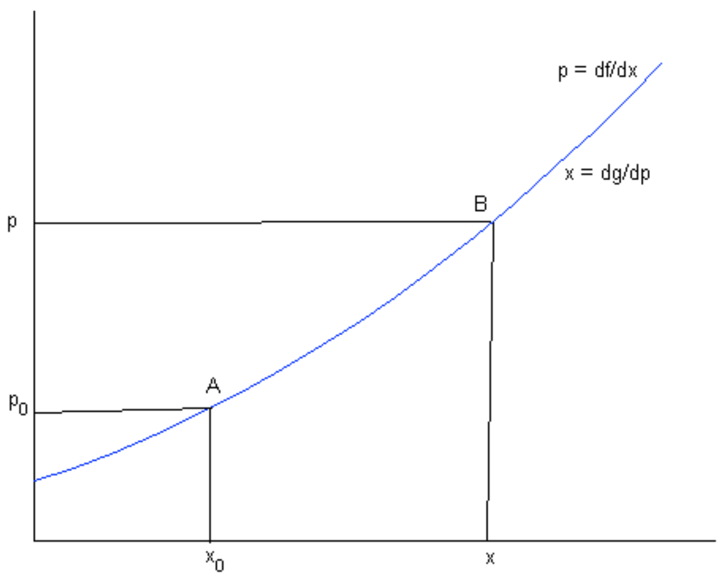
Τμήμα Π. Ιωάννου &
Θ. Αποστολάτου
7/5/2000

Μηχανική ΙΙ

Μετασχηματισμοί Legendre

Έστω μια πραγματική συνάρτηση $f(x)$. Ορίζουμε την παράγωγο συνάρτηση $p(x)$ της $f(x)$: $p(x) = \dfrac{df}{dx}$ (η γραφική της παράσταση δίνεται στο ακόλουθο σχήμα). Εάν



$$\frac{dp}{dx} = \frac{d^2 f}{dx^2} \neq 0\,[1],$$

υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ x και p, οπότε υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση της $p(x)$, η $x(p)$, την οποία και επιλέγουμε να γράψουμε για λόγους συμμετρίας ως $x(p) = \dfrac{dg}{dp}$, όπου $g(p)$ μια συνάρτηση του p, η παράγωγος της οποίας είναι το x. Παρατηρούμε στο διπλανό σχήμα ότι η αντίστροφη συνάρτηση $x(p) = \dfrac{dg}{dp}$ δίνεται από το ίδιο γράφημα AB εναλλάσσοντας βέβαια το ρόλο της μεταβλητής και της συνάρτησης. Η συνάρτηση $g(p)$ λέγεται **μετασχηματισμός Legendre της** $f(x)$.

Προφανώς ο μετασχηματισμός Legendre της $g(p)$ είναι πάλι η $f(x)$. Παρατηρήστε ότι για να υπάρχει ο μετασχηματισμός Legendre της $f(x)$ απαιτείται $\dfrac{d^2 f}{dx^2} \neq 0$, και αντίστοιχα για να υπάρχει ο μετασχηματισμός Legendre της $g(p)$ απαιτείται $\dfrac{d^2 g}{dp^2} \neq 0$. Επειδή όμως $\dfrac{d^2 f}{dx^2}\dfrac{d^2 g}{dp^2} = \dfrac{dp}{dx}\dfrac{dx}{dp} = 1$, η ύπαρξη μετασχηματισμού Legendre της $f(x)$ βεβαιώνει την ύπαρξη μετασχηματισμού Legendre της $g(p)$, όπως φαίνεται και από το σχήμα.

[1] Εννοείται ότι η παράγωγος αυτή δεν θα πρέπει να μηδενίζεται σε κανένα σημείο της περιοχής ενδιαφέροντος, ή με άλλα λόγια θα πρέπει να έχει σταθερό πρόσημο, είτε θετικό , είτε αρνητικό.

Θα προσδιορίσουμε τώρα τον μετασχηματισμό Legendre της $f(x)$. Παρατηρούμε από το σχήμα ότι το εμβαδόν του χωρίου (x_0xBA) ισούται με $\int_{x_0}^{x}\frac{df}{dx}dx = f(x)-f(x_0)$. Ομοίως το εμβαδόν του χωρίου (p_0pBA) ισούται με $\int_{p_0}^{p}\frac{dg}{dp}dp = g(p)-g(p_0)$. Το δε άθροισμα των δύο αυτών εμβαδών είναι $px-p_0x_0$. Συνεπώς $f(x)-f(x_0)+g(p)-g(p_0)=px-p_0x_0$, ή $f(x)+g(p)-px = f(x_0)+g(p_0)-p_0x_0$, δηλαδή η ποσότητα $f(x)+g(p)-px$ είναι μια σταθερά C. Η σχέση αυτή προσδιορίζει τον μετασχηματισμό Legendre της $f(x)$. Επειδή δε η αντίστροφη συνάρτηση $x(p)=\frac{dg}{dp}$ προσδιορίζεται μετά από παραγώγιση της $g(p)$ μπορούμε να προσθέσουμε στην $g(p)$ μια κατάλληλη σταθερά ούτως ώστε η σταθερά C να γίνει μηδενική. Συνεπώς ο μετασχηματισμός Legendre της $f(x)$ είναι η $g(p)$ η οποία προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$g(p) = px - f(x),$$

όπου το x θεωρείται συνάρτηση του p.

Ομοίως ο μετασχηματισμός Legendre της $g(p)$, είναι η συνάρτηση $f(x)$ η οποία προσδιορίζεται από τη σχέση

$$f(x) = px - g(p),$$

όπου τώρα το x θεωρείται συνάρτηση του p.

Ας επιβεβαιώσουμε ότι πράγματι η συνάρτηση $g(p)=px-f(x)$ είναι ο μετασχηματισμός Legendre της $f(x)$: Πρέπει να δείξουμε ότι $x(p)=\frac{dg}{dp}$. Στην παραγώγιση της $g(p)$ θεωρούμε το x ως εξαρτημένη μεταβλητή από το p, οπότε: $\frac{dg}{dp} = x + p\frac{dx}{dp} - \frac{df}{dx}\frac{dx}{dp}$, επειδή όμως $p=\frac{df}{dx}$, θα είναι πράγματι: $\frac{dg}{dp}=x$.

Παράδειγμα: Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Legendre της $f(x)=\frac{x^{\alpha}}{\alpha}$ με $\alpha>1$.

Το p συναρτήσει του x είναι: $p = x^{\alpha-1}$, άρα $x = p^{\frac{1}{\alpha-1}}$. Ο μετασχηματισμός Legendre της $f(x)$ είναι η $g(p) = xp - \frac{x^{\alpha}}{\alpha} = \frac{p^{\beta}}{\beta}$, όπου $\beta = \frac{\alpha}{\alpha-1}$ δηλαδή οι εκθέτες α και β ικανοποιούν τη σχέση $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$.

Η ίδια διαδικασία μπορεί να ακολουθηθεί αν έχουμε πολλές μεταβλητές. Έστω η συνάρτηση $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ και $p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$. Ορίζουμε το μετασχηματισμό Legendre της

f ως προς κάποιο x_α τη συνάρτηση $g(x_1,\cdots,p_\alpha,\ldots,x_n)$ η οποία έχει την ιδιότητα $x_\alpha = \dfrac{\partial g}{\partial p_a}$. Ακολουθώντας τα προηγούμενα βήματα βρίσκουμε ότι η $g = x_\alpha p_\alpha - f$ (*χωρίς την αθροιστική σύμβαση*).

Ομοίως ορίζουμε ως μετασχηματισμό Legendre της f ως προς όλα τα x_i τη συνάρτηση $g(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ η οποία έχει την ιδιότητα για κάθε i: $x_i = \dfrac{\partial g}{\partial p_i}$. Είναι εύκολο να διαπιστώσετε ότι η g δίνεται από την $g = x_i p_i - f$ (*με την αθροιστική σύμβαση τώρα*).

Η Χαμιλτονιανή συνάρτηση

Η Λαγκρανζιανή συνάρτηση ενός φυσικού συστήματος είναι συνάρτηση των γενικευμένων συντεταγμένων q_i, και των γενικευμένων ταχυτήτων $\dot{q}_i$ και, εν γένει, του χρόνου, δηλαδή είναι μια συνάρτηση $L(q_1,\cdots,q_n,\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_n,t)$. Οι κανονικές ορμές ορίζονται από τη σχέση $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$. Οι κανονικές ορμές είναι συνεπώς συναρτήσεις των q_i, $\dot{q}_i$ και του χρόνου και ορίζονται χωρίς να γίνεται καμία αναφορά στη φυσική κίνηση του συστήματος –προκύπτουν ως μαθηματικά κατασκευάσματα απευθείας από τη Λαγκρανζιανή. Η Χαμιλτονιανή συνάρτηση ορίζεται ως ο μετασχηματισμός Legendre της L ως προς όλες τις γενικευμένες ταχύτητες δηλαδή είναι η συνάρτηση $H(q_1,\cdots,q_n,p_1,\cdots,p_n,t)$ που ικανοποιεί τη σχέση: $\dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}$. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, η Χαμιλτονιανή συνάρτηση δίδεται από τη σχέση

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L,$$

όπου οι γενικευμένες ταχύτητες θεωρούνται στην παραπάνω έκφραση συναρτήσεις των q_i, p_i και του χρόνου. Ας ελέγξουμε αν πράγματι η Χαμιλτονιανή συνάρτηση ικανοποιεί τη σχέση: $\dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}$ για κάθε i. Πράγματι:

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i + \sum_j p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i},$$

και επειδή $p_j = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ θα έχουμε ότι $\dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}$ για κάθε i.

Είναι χρήσιμο στο σημείο αυτό να υπολογίσουμε τη μερική παράγωγο της Χαμιλτονιανής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές q και t οι οποίες έμειναν ανενεργές κατά τον μετασχηματισμό Legendre. Έχουμε:

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = \sum_j p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i},$$

όπου κατά τη μερική παραγώγιση $\frac{\partial H}{\partial q_i}$ και $\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i}$ παραμένουν σταθερά όλα τα p και όλα τα q που είναι διαφορετικά από το q_i, ενώ κατά την παραγώγιση $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ παραμένουν σταθερά όλα τα $\dot{q}$ και όλα τα q που είναι διαφορετικά από το q_i, και κατά την παραγώγιση $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ παραμένουν σταθερά όλα τα q και όλα τα $\dot{q}$ που είναι διαφορετικά από το $\dot{q}_i$. (Ο τελευταίος όρος μέσα στο άθροισμα προκύπτει αφού η L είναι συνάρτηση όλων των q, αλλά και των $\dot{q}$ τα οποία όμως τώρα θεωρούνται συναρτήσεις των q, p και t.) Επειδή $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ καταλήγουμε στη σχέση:

$$\left.\frac{\partial H}{\partial q_i}\right|_p = -\left.\frac{\partial L}{\partial q_i}\right|_{\dot{q}}.$$

Ομοίως υπολογίζουμε ότι $\frac{\partial H}{\partial t} = \sum_j p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial t}$ και συνεπώς:

$$\left.\frac{\partial H}{\partial t}\right|_{q,p} = -\left.\frac{\partial L}{\partial t}\right|_{q,\dot{q}}.$$

Για να μπορεί να επιτευχθεί ο μετασχηματισμός Legendre της Λαγκρανζιανής συνάρτησης απαιτείται ο Εσσιανός (Hessian) πίνακας $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}$ να είναι θετικός (να έχει θετικές ιδιοτιμές). Αυτή η συνθήκη συνήθως πάντοτε ικανοποιείται, διότι η Λαγρανζιανή συνάρτηση είναι τετραγωνική μορφή των γενικευμένων ταχυτήτων και ο Εσσιανός πίνακας ισούται με τον πίνακα των συντελεστών της κινητικής ενέργειας που είναι συνήθως θετικός (στην απλή περίπτωση n μαζών σε ένα καρτεσιανό σύστημα ο Εσσιανός πίνακας είναι ο διαγώνιος πίνακας με στοιχεία τις μάζες των σωμάτων).

Ο μετασχηματισμός Legendre της Χαμιλτονιανής συνάρτησης H ως προς όλες τις ορμές p_i είναι η Λαγκρανζιανή συνάρτηση $L(q_1,\cdots,q_n,\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_n,t)$, όπου οι γενικευμένες ταχύτητες ορίζονται ως $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$. Η Λαγρανζιανή συνάρτηση είναι τότε $L = \sum_i p_i \dot{q}_i - H$, όπου τώρα οι ορμές θεωρούνται συνάρτηση των q_i, $\dot{q}_i$ και του χρόνου. Με παρόμοιο τρόπο είναι εύκολο να διαπιστώσετε ότι τότε θα είναι $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$.

Στη φύση πρωταρχική θέση έχει η Λαγκρανζιανή συνάρτηση η οποία μπορεί να προσδιορισθεί πολλές φορές με ανάλυση των συμμετριών του φυσικού συστήματος όπως είδαμε σε προηγούμενα κεφάλαια, ή και κατευθείαν από την ανάλυση του φυσικού συστήματος. Η Χαμιλτονιανή συνάρτηση, όταν το σύστημα είναι χρονικά ανεξάρτητο είναι η έκφραση της ενέργειας του συστήματος (θυμηθείτε το ολοκλήρωμα Jacobi) η οποία δεν προκύπτει αμέσως και υπολογίζεται ως μετασχηματισμός Legendre της

Λαγκρανζιανής. Αν και η Λαγρανζιανή συνάρτηση έχει την πρωταρχική θέση, η Χαμιλτονιανή όμως όπως θα δούμε μας επιτρέπει να περιγράψουμε τη δυναμική με τον καλύτερο δυνατό τρόπο.

Οι εξισώσεις του Χάμιλτον

Επειδή η Χαμιλτονιανή συνάρτηση είναι ο μετασχηματισμός Legendre της Λαγκρανζιανής θα ισχύουν οι σχέσεις

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad (1)$$

και

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \qquad (2)$$

Οι σχέσεις αυτές δεν έχουν κανένα δυναμικό περιεχόμενο, και δεν εκφράζουν κάποιο φυσικό νόμο. Είναι απλώς αντίστροφες σχέσεις ορισμού. Η (2) εκφράζει τις ταχύτητες συναρτήσει των ορμών (και των θέσεων και του χρόνου) , όπως η (1) εκφράζει τις ορμές συναρτήσει των ταχυτήτων (και των θέσεων και του χρόνου).

Η δυναμική εμπεριέχεται στις εξισώσεις Euler-Lagrange: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ ή

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}.$$

Επειδή όμως από τον ορισμό του μετασχηματισμού Legendre $\left.\frac{\partial H}{\partial q_i}\right|_p = -\left.\frac{\partial L}{\partial q_i}\right|_{\dot{q}}$ (βλέπε παραπάνω) οι δυναμικές εξισώσεις μπορεί να γραφούν ισοδυνάμως και ως

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (3)$$

Οι $2n$ εξισώσεις (2) και (3):

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \ , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

λέγονται εξισώσεις του Χάμιλτον ή **κανονικές εξισώσεις του Χάμιλτον**[2]. Οι πρώτου βαθμού εξισώσεις αυτές ως προς τα (q, p) είναι ισοδύναμες με τις n εξισώσεις δευτέρου βαθμού Euler-Lagrange ως προς το q. Οι κανονικές εξισώσεις είναι ουσιαστικά οι εξισώσεις Euler-Lagrange σε μια διαφορετική μαθηματική μορφή. Παρ'

[2] Οι εξισώσεις αυτές παρουσιάζονται για πρώτη φορά σε εργασία του Lagrange το 1809 που πραγματευόταν την θεωρία διαταραχών μηχανικών συστημάτων. Ο Lagrange όμως δεν αναγνώρισε τη σημασία τους. Ο Cauchy, σε ένα αδημοσίευτο μνημόνιο του 1831, φαίνεται ότι ήταν ο πρώτος που αναγνώρισε τη σημασία των εξισώσεων αυτών. Ο ιρλανδός φυσικός Hamilton βασίζει όλη την έρευνά του στη μηχανική και οπτική στις εξισώσεις αυτές που τις παρουσιάζει σε δημοσίευσή του το 1835.

όλα αυτά οι κανονικές εξισώσεις είναι ανώτερες των εξισώσεων Euler-Lagrange, πρώτον διότι οι χρονικοί παράγωγοι εμφανίζονται απομονωμένα στο αριστερό σκέλος των κανονικών εξισώσεων, και δεύτερον διότι όπως θα δούμε στη συνέχεια η επιλογή των μεταβλητών (q, p) οδηγεί σε απλή περιγραφή της εξέλιξης του συστήματος.