

1 ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΡΕΥΣΤΟΥ

Θεωρούμε ένα ρευστό που καταλαμβάνει μία περιοχή του χώρου και σε κάθε σημείο του ρευστού η πυκνότητα είναι $\rho(\vec{x}, t)$. Λαμβάνουμε έναν όγκο του ρευστού V του οποίου η εξωτερική επιφάνεια είναι A . Σε κάθε στοιχειώδες όγκο του ρευστού ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις $\rho\vec{F}$, οπότε η συνολική εξωτερική δύναμη που ασκείται στον όγκο είναι

$$\int_V \rho\vec{F} dV .$$

Σε ένα ρευστό όμως ασκείται στην επιφάνεια κάθε όγκου και μία δύναμη από το γύρω ρευστό (μία δύναμη αντίδρασης που απαιτείται για τη συνοχή του συνεχούς μέσου) που έχει διεύθυνση $-\vec{n}$, όπου $\vec{n}$ το μοναδιαίο διάνυσμα στην έξωθεν από τον όγκο διεύθυνση της καθέτου στην επιφάνεια και μέτρου $p dS$, οπότε η συνολική δύναμη που ασκείται από την πίεση στο ρευστό είναι

$$-\int p\vec{n} dS = -\int_V \nabla p dV .$$

Στη κατάσταση ισορροπίας πρέπει το άθροισμα των δυνάμεων να μηδενίζεται οπότε θα πρέπει να ισχύει για κάθε όγκο του ρευστού η σχέση:

$$\int_V (\rho\vec{F} - \nabla p) dV = 0 ,$$

και επειδή αυτή η σχέση ικανοποιείται για κάθε όγκο θα ικανοποιείται και σε κάθε σημείο του ρευστού, οπότε στη κατάσταση ισορροπίας θα είναι:

$$\rho\vec{F} = \nabla p . \quad (1)$$

Στη κατάσταση ισορροπίας πρέπει και η συνολική ροπή ως προς κάποιο σημείο να μηδενίζεται. Η συνολική ροπή που ασκείται σε ένα όγκο ρευστού είναι:

$$\int_V \rho\vec{x} \times \vec{F} dV - \int_A p\vec{x} \times \vec{n} dS ,$$

όπου $\vec{x}$ το διάνυσμα θέσης κάποιου σημείου στο ρευστό. Η i -οστή συντεταγμένη του επιφανειακού ολοκληρώματος γράφεται

$$\int_A p \epsilon_{ijk} x_j n_k dS = \int_V \frac{\partial(\epsilon_{ijk} p x_j)}{\partial x_k} dV = \int_V \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial p}{\partial x_k} dV$$

όπου κάναμε χρήση του θεωρήματος του Gauss:

$$\int_A F_{ij\dots k} n_k dS = \int_V \frac{\partial F_{ij\dots}}{\partial x_k} dV .$$

Συνεπώς η συνολική ροπή μηδενίζεται:

$$\int_V \vec{x} \times (\rho\vec{F} - \nabla p) dV = 0 ,$$

όταν ικανοποιείται η συνθήκη ισορροπίας (1).

Η συνθήκη ισορροπίας (1) είναι πολύ ενδιαφέρουσα διότι περιορίζει και τα πεδία δυνάμεων αλλά και τη κατανομή της πυκνότητας που επιτρέπουν την ύπαρξη καταστάσεων ισορροπίας. Η παραπάνω σχέση υποδηλώνει ότι μόνο για κατανομές πυκνότητας και πεδία δυνάμεων για τα οποία η $\rho\vec{F}$ είναι ίση με τη βαθμίδα κάποιου βαθμωτού πεδίου είναι δυνατή μία κατάσταση ισορροπίας σε ένα ρευστό. Αμέσως μπορούμε να εξάγουμε ένα σημαντικό συμπέρασμα: σε ένα ομογενές ρευστό το οποίο έχει

σταθερή πυκνότητα δεν μπορεί να υπάρξει ισορροπία εκτός αν οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται σε αυτό είναι συντηρητικές και προέρχονται από κάποιο δυναμικό.

Ας δεχθούμε όμως ότι μπορεί να υπάρξει ισορροπία και επιπλέον, όπως συνήθως συμβαίνει το ρευστό δεν είναι ομογενές και η εξωτερική δύναμη που ασκείται στο ρευστό είναι συντηρητική, και προκύπτει από κάποιο δυναμικό Φ , ως:

$$\vec{F} = -\nabla\Phi .$$

Τότε η κατάσταση ισορροπίας απαιτεί τα πεδία να ικανοποιούν τη σχέση:

$$-\rho\nabla\Phi = \nabla p . \quad (2)$$

Λαμβάνοντας το στροβιλισμό της (2) προκύπτει ότι θα πρέπει να ισχύει:

$$\nabla\rho \times \nabla\Phi = 0 . \quad (3)$$

Η σχέση αυτή υποδηλώνει ότι οι επιφάνειες σταθερής πυκνότητας είναι και ισοδυναμικές δηλαδή η πυκνότητα στη κατάσταση ισορροπίας είναι σταθερή επί των ισοδυναμικών επιφανειών και ισχύει ότι $\rho(\Phi)$. Αλλά τότε η συνθήκη ισορροπίας συνεπάγεται ότι και οι επιφάνειες σταθερής πίεσης (ισοβαρείς) πρέπει να είναι και επιφάνειες σταθερής πυκνότητας καθώς και ισοδυναμικές. Δηλαδή στη κατάσταση ισορροπίας είναι $\rho(\Phi)$ και $p(\Phi)$ και οι μεταβολές των πεδίων ικανοποιούν τη γενικευμένη υδροστατική σχέση:

$$-\rho d\Phi = dp .$$

που δίνει τη γενικευμένη υδροστατική ισορροπία:

$$\frac{dp}{d\Phi} = -\rho(\Phi) . \quad (4)$$

Η απαίτηση η πυκνότητα να είναι σταθερή επί ισοδυναμικών επιφανειών είναι συχνά ιδιαίτερα περιοριστική. Εάν θερμανθεί από κάποιο εξωτερικό αίτιο ένα ρευστό η πυκνότητα θα μεταβληθεί στη περιοχή αυτή και η κατάσταση ισορροπίας δεν είναι πλέον δυνατή και το ρευστό τίθεται σε κίνηση. Υπό αυτή την έννοια δεν είναι περίεργο ότι η γηϊνή ατμόσφαιρα καθώς και το εσωτερικό των πλανητών και άστρων βρίσκεται σε συνεχή κίνηση.

Η υδροστατική ισορροπία (4) δεν αρκεί για να προσδιορίσουμε τη χωρική κατανομή των πεδίων πίεσης και πυκνότητας σε ένα ρευστό σε ισορροπία. Η πυκνότητα συνήθως εξαρτάται από τη πυκνότητα και από άλλους παράγοντες όπως π.χ. τη θερμοκρασία. Για να προσδιορισθούν πλήρως τα πεδία πρέπει να δοθεί η καταστατική σχέση που ικανοποιεί το ρευστό.

Η απλούστερη περίπτωση είναι αυτή ενός ρευστού ομογενούς πυκνότητας. Στη περίπτωση ολοκλήρωση της (4) δίνει αμέσως το πεδίο πίεσης:

$$p = p_0 - \rho\Phi .$$

Στη περίπτωση δυναμικού ομογενούς πεδίου βαρύτητας, $\Phi = gz$, όπου το z είναι το ύψος από κάποιο επίπεδο αναφοράς, καταλήγουμε σε γραμμική αύξηση της πίεσης του ρευστού με το βάθος, όπως συμβαίνει στους ωκεανούς που έχουν σε καλή προσέγγιση σταθερή πυκνότητα.

1.1 Ισορροπία μίας ισοθερμικής ατμόσφαιρας τελείου αερίου στο ομογενές πεδίο βαρύτητας

Έστω ότι το δυναμικό είναι $\Phi = gz$, όπου το z είναι το ύψος από κάποιο επίπεδο αναφοράς, ας υποθέσουμε την επιφάνεια της θάλασσας. Στη κατάσταση ισορροπίας η πίεση και η πυκνότητα είναι σταθερές επί των ισοϋψών (των ισοδυναμικών επιφανειών) και ολοκλήρωση της (4), θα είναι δηλαδή $p(z)$ και $\rho(z)$ καθώς επίσης η καθ' ύψος κατανομή της πίεσης θα ικανοποιεί την υδροστατική σχέση:

$$p(z) = g \int_z^\infty \rho(z) dz ,$$

δηλαδή η πίεση θα ισούται με το βάρος του ρευστού που βρίσκεται σε μεγαλύτερα ύψη από το z . Για να προσδιορισθεί η ακριβής κατανομή της πίεσης κάνουμε χρήση της καταστατικής εξίσωσης τελείου αερίου

$$p = \frac{kT}{\mu m_p} \rho$$

όπου μ το μέσο μοριακό βάρος του αερίου, m_p η μάζα του πρωτονίου, k η σταθερά του Boltzmann, και T η θερμοκρασία. Η ποσότητα

$$\frac{kT}{\mu m_p}$$

έχει μονάδες επιτάχυνσης επί ενός ύψους οπότε τη γράφουμε ως gH . Για μία ισοθερμική ατμόσφαιρα το ύψος H είναι σταθερό και συνθήκη ισορροπίας

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{p}{H},$$

δίνει αμέσως εκθετική μείωση της πίεσης (αλλά και της πυκνότητας) με το ύψος:

$$p(z) = p_0 e^{-z/H},$$

και το ύψος H είναι το ύψος στο οποίο η πίεση έχει μειωθεί κατά e^{-1} από την τιμή της στην επιφάνεια p_0

Στη Γήϊνη ατμόσφαιρα το μέσο μοριακό βάρος του αέρα κοντά στην επιφάνεια είναι $\mu = 29$ οπότε $R = k/\mu m_p \approx 287 \text{ J K}^{-1} \text{ K}^{-1}$, και το ύψος $H = 8 \text{ km}$ για θερμοκρασία $T = 273 \text{ K}$.

1.2 Ίσορροπία ενός αστεριού

Το αστέρι κρατιέται σε συνοχή από τη δύναμη της αυτοβαρύτητάς του, δηλαδή της δύναμης της βαρύτητας που έλκει τα διάφορα μέρη του. Η πίεση που αναπτύσσεται αποτρέπει τη κατάρρευση του. Θα θεωρήσουμε ότι το αστέρι δεν περιστρέφεται. Εάν ρ είναι η πυκνότητα σε κάποιο σημείο του αστεριού το βαρυτικό δυναμικό ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho. \quad (5)$$

Στη κατάσταση ισορροπίας η (2) απαιτεί $\nabla \Phi = -\nabla p/\rho$ οπότε η (5) οδηγεί στη συνθήκη ισορροπίας:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla p}{\rho} \right) = -4\pi G \rho. \quad (6)$$

Για να προχωρήσουμε θα ερευνήσουμε τις καταστάσεις ισορροπίας σφαιρικά συμμετρικών άστρων για τα οποία όλα τα πεδία είναι συνάρτηση της ακτίνας r από κάποιο κέντρο και οι ισοβαρείς, οι ισόπυκνες και οι ισοδυναμικές επιφάνειες είναι σφαιρικά κελήφη, όπως το εσωτερικό των κρεμμυδιών. Σε αυτή τη περίπτωση η (6) παίρνει τη μορφή:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dp}{dr} \right) = -4\pi G r^2 \rho. \quad (7)$$

Αν ολοκληρώσουμε την (7) από το αρχή, $r = 0$, μέχρι την ακτίνα r , κάνοντας χρήση της συνοριακής συνθήκης $dp/dr = 0$ στο $r = 0$, δηλαδή ότι δεν ασκείται δύναμη από τη πίεση στο κέντρο του άστρου, διότι στη κατάσταση ισορροπίας στο κέντρο η δύναμη από την πίεση θα έπρεπε να εξισορροπείται από τη βαρυτική δύναμη, η οποία όμως είναι μηδενική στο κέντρο, καταλήγουμε στη σχέση υδροστατικής ισορροπίας σε ένα σφαιρικό άστρο:

$$\frac{dp}{dr} = -\rho g(r)$$

όπου η επιτάχυνση της βαρύτητας στην ακτίνα r είναι

$$g(r) = \frac{Gm(r)}{r^2}$$

και

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr'$$

είναι η μάζα που περικλείεται στη ακτίνα r .

Η παραπάνω σχέση μας επιτρέπει να εκτιμήσουμε τη τάξη μεγέθους της πίεσης στο κέντρο ενός άστρου μάζας M και πεπερασμένης ακτίνας R . Αν θέσουμε ότι η πυκνότητα είναι τάξης $\rho \sim M/R^3$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g \sim GM/R^2$ στο κέντρο του άστρου η κεντρική πίεση πρέπει να είναι τάξης:

$$p \sim \frac{GM^2}{R^4}.$$

Για να προσδιορίσουμε όμως επακριβώς τη κατανομή της πίεσης και της πυκνότητας πρέπει να εισάγουμε κάποια καταστατική εξίσωση. Για το εσωτερικό ουρανίων σωμάτων η πολυτροπική εξίσωση

$$p = K\rho^{1+1/n}, \quad (8)$$

με πολυτροπικό δείκτη $n \geq 0$, οδηγεί σε ικανοποιητική περιγραφή της καταστατικής εξίσωσης στο εσωτερικό των άστρων και πλανητών (αλλά και άλλων ουρανίων σωμάτων π.χ. γαλαξιών, δίσκων προσαύξησης, κ.λ.π.). Το εσωτερικό των εξωτερικών πλανητών (Δίας, Κρόνος, Ουρανός, Ποσειδώνας) που αποτελούνται κυρίως από ρευστό υδρογόνου και ήλιου περιγράφεται με τη παραπάνω σχέση με πολυτροπικό δείκτη $n = 1$, ενώ λευκοί νάνοι μικρής σχετικής μάζας περιγράφονται με $n = 3/2$ και ερυθροί γίγαντες με $n = 3$. Η περίπτωση $n = 0$ περιγράφει την περίπτωση ομογενών σωμάτων με σταθερή πυκνότητα όπως συμβαίνει σε μικρούς πλανήτες όπως ο Ερμής. Με την πολυτροπική καταστατική σχέση η κατανομή της πίεσης ή πυκνότητας στη κατάσταση ισορροπίας (7) ικανοποιεί την εξίσωση Lane-Emden για την οποία αναπτύχθηκε όμορφη θεωρία (βλ. Chandrasekhar: Stellar Structure).

Δύο ειδικές περιπτώσεις για τις οποίες προκύπτει λύση σε κλειστή μορφή αξίζει να αναφερθούν. Στην περίπτωση που $n = 0$ και η πυκνότητα είναι σταθερή, $\rho = \rho_0$, η κατανομή της πίεσης είναι

$$p = \frac{2}{3}\pi G\rho_0^2(R^2 - r^2),$$

όπου $r = R$ είναι η ακτίνα της εξωτερικής επιφάνειας του πλανήτη. Η η συνολική μάζα του πλανήτη είναι $M = 4\pi\rho_0 R^3/3$ οπότε η κεντρική πίεση είναι

$$p(0) = \frac{3}{8\pi} \frac{GM^2}{R^4}.$$

Η τιμή αυτή είναι σύμφωνη με την πρώτη εκτίμηση στην οποία είχαμε καταλήξει.

Στη περίπτωση που $n = 5$ η κατανομή της πίεσης είναι

$$p = K\rho^{6/5} = \frac{27a^3 K^{5/2}}{(2\pi G)^{3/2}(a^2 + r^2)^3},$$

και ενώ το σώμα έχει άπειρες διαστάσεις (πουθενά δεν μηδενίζεται η πίεση ή η πυκνότητα) η συνολική μάζα είναι πεπερασμένη.

2 Η αρχή του Αρχιμήδη

Σύμφωνα με την αρχή του Αρχιμήδη όταν ένα σώμα εμβαπτίζεται πλήρως ή μερικώς σε ένα ομογενές ρευστό στο ομογενές πεδίο βαρύτητας, η άνωση που ασκείται στο σώμα αυτό είναι ίση με το βάρος του εκτοπιζομένου υγρού (να βρεθεί η αρχική διατύπωση).

Θα αποδείξουμε μία γενικευμένη αρχή Αρχιμήδη σε ένα γενικό ρευστό σε ισορροπία. Υποθέστε ότι ένα σώμα όγκου V και εξωτερικής επιφάνειας A εμβαπτίζεται σε ένα ρευστό και ότι το σώμα και το περιβάλλον ρευστό βρίσκονται σε ισορροπία. Η συνολική δύναμη που ασκείται από το ρευστό στο σώμα είναι

$$- \int_A p \vec{n} dS ,$$

όπου $\vec{n}$ το μοναδιαίο διάνυσμα να διεύθυνση την έξωθεν κάθετο στην επιφάνεια. Υποθέτουμε ότι στο ρευστό και το σώμα ασκείται ανα μονάδα μάζας η συντηρητική δύναμη $F = -\nabla\Phi$. Στη κατάσταση ισορροπίας το πεδίο της πίεσης ικανοποιεί τη συνθήκη ισορροπίας (2) και οι ισοδυναμικές επιφάνειες είναι και ισοβαρείς και ισόπυκνες. Οι ισοδυναμικές επιφάνειες της Φ μπορούν νοερά να επεκταθούν στην περιοχή που καταλαμβάνεται τώρα από το σώμα και να προσδιορισθεί με αυτόν τον τρόπο και η πυκνότητα του ρευστού (που είναι σταθερή επί αυτών) που αν καταλάμβανε το χώρο που καταλαμβάνει τώρα το σώμα θα οδηγούσε σε ισορροπία του ρευστού. Η συνολική δύναμη που θα ασκείτο στο ρευστό αν καταλάμβανε το χώρο του σώματος είναι

$$- \int_V \rho \nabla \Phi dV$$

όπου ρ η πυκνότητα του ρευστού και V ο όγκος ρευστού που καταλαμβάνει το σώμα. Αυτή η δύναμη εξισορροπείται από τη συνολική δύναμη πίεσης που ασκείται στην επιφάνεια του όγκου η οποία είναι ή ίδια είτε το σώμα υπάρχει είτε δεν υπάρχει.¹ Συνεπώς η άνωση στο σώμα θα είναι

$$- \int_V \rho \vec{F} dV = \int_V \rho \nabla \Phi dV .$$

Αυτή είναι η αρχή του Αρχιμήδη.

Ως παράδειγμα θεωρήστε ένα μη ομογενές ρευστό που περιστρέφεται στο ομογενές πεδίο βαρύτητας στη κατακόρυφη διεύθυνση z και περιστρέφεται περί το κατακόρυφο άξονα. Το δυναμικό στη περίπτωση αυτή είναι:

$$\Phi = gz - \frac{1}{2}\Omega^2(x^2 + y^2)$$

όπου $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ είναι η απόσταση από τον άξονα περιστροφής. Οι ισοδυναμικές επιφάνειες είναι παραβολοειδή εκ περιστροφής. Στη κατάσταση ισορροπίας η πίεση και η πυκνότητα είναι σταθερή επί των παραβολοειδών αυτών επιφανειών.

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι ένα σφαιρικό σώμα ομογενούς πυκνότητας εμβαπτίζεται στο ρευστό αυτό και ότι ισορροπεί σε αυτό - δεν έχει σχετική κίνηση ως προς το περιστρεφόμενο αυτό ρευστό. Εγείρεται το ερώτημα: μπορεί η άνωση που δέχεται το σώμα αυτό να εξισορροπήσει τη δύναμη (βαρυτική και κεντρόφυγο) που ασκείται στο σώμα αυτό, και εάν ναι σε ποιές θέσεις του σώματος είναι αυτό δυνατό. Είναι εμφανές ότι το σώμα αυτό δεν μπορεί να ισορροπήσει εκτός αν τοποθετηθεί συμμετρικά γύρω από τον άξονα περιστροφής. Διότι οι ισόπυκνες λόγω του φυγοκεντρικού δυναμικού κλίνουν προς τα πάνω οπότε η φυγόκεντρος δύναμη

$$\int_V \rho \frac{1}{2} \Omega^2 \nabla (x^2 + y^2) dV$$

¹ Εδώ γίνεται η παραδοχή ότι οι μοριακές δυνάμεις είναι μικρού βεληνεκούς, οπότε η πίεση που προκύπτει δεν επηρεάζεται από την ύπαρξη του σώματος. Αν οι μοριακές δυνάμεις ήταν μεγάλου βεληνεκούς τότε δεν θα ίσχυε η αρχή του Αρχιμήδη. Π.χ. θεωρήστε ένα αγωγίμο φορτισμένο ρευστό το οποίο διατρέχεται από ρεύματα τα οποία προκαλούν μαγνητικά πεδία. Οι μαγνητικές δυνάμεις είναι μεγάλου βεληνεκούς και η δύναμη που θα ασκηθεί σε ένα μονωτή δεν ισούται με τη δύναμη που ασκείται αν στη θέση του μονωτή ήταν το ρευστό.

είναι μεγαλύτερη στο ρευστό παρά σε ένα ομογενές σφαιρίδιο ίδιας μάζας με το ρευστό που εκτιπίζει. Συνεπώς αν αφήσουμε ένα ομογενές σφαιρίδιο σε κάποιο σημείο εκτός του άξονα συμμετρίας θα το δούμε να “κοιλάει” επί ενός παραβολοειδούς προς τον άξονα συμμετρίας. Το ίδιο θα συνέβαινε αν το σφαιρίδιο βρισκόταν στην ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού.

Από την άλλη πλευρά αν η σφαίρα ήταν ανοικοιγενούς πυκνότητας, πέστε ότι ήταν βαρύτερη στο ένα άκρο της, τότε είναι δυνατόν η κεντρόφυγος να είναι μεγαλύτερη από αυτή του ρευστού και η σφαίρα να καταλήξει στο τοίχωμα του περιστρεφόμενου δοχείου.

Άσκηση 1. Εξετάστε πως θα ισορροπίσει ένας σφαιρικός φελός στην επιφάνεια ενός περιστρεφόμενου ποτηριού που περιέχει νερό.

ΑΣΚΗΣΗ

Άσκηση 2. Ένα κλειστό δοχείο που περιέχει νερό περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα Ω γύρω από ένα οριζόντιο άξονα. Δείξτε ότι οι ισοβαρείς είναι κυκλικές κυλινδρικές επιφάνειες με κοινό άξονα στο ύψος g/Ω^2 πάνω από τον άξονα περιστροφής.

Άσκηση 3. Υπολογίστε την πίεση στο κέντρο σφαιρικού άστρου πυκνότητας $\rho(r) = \rho_0(1 - \beta r^2)$. Δείξτε ότι η μέση πυκνότητα σε αυτό το άστρο είναι διπλάσια της πυκνότητας στην επιφάνεια του άστρου και ότι η πίεση στο κέντρο είναι κατά $13/6$ μεγαλύτερη από τη κεντρική πίεση ενός άστρου ίδιας μάζας αλλά ομογενούς πυκνότητας.