

Παράδειγμα 3ο: Τέλος, προκειμένου να φανεί η δύναμη και η ευρύτητα της Λαγκρανζιανής θεώρησης, θα εξετάσουμε ένα μη μηχανικό πεδίο: το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο δίχως την ύπαρξη φορτίων.

Προτού προβούμε όμως στην κατασκευή της Λαγκρανζιανής του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, το οποίο όπως γνωρίζουμε είναι ένα σχετικιστικό πεδίο (είναι μάλιστα το πεδίο εκείνο που έδωσε το έναυσμα για τη διαμόρφωση της σχετικιστικής μηχανικής) θα μελετήσουμε μια γενική αρχή που ισχύει για κάθε σχετικιστικό σύστημα. Συγκεκριμένα η δράση ενός σχετικιστικού συστήματος πρέπει να είναι μια αναλλοίωτη από αδρανειακό σε αδρανειακό σύστημα συνάρτηση. Αν δεν συνέβαινε αυτό τότε η τιμή της και επομένως η στασιμότητα αυτής θα άλλαζε από το ένα αδρανειακό σύστημα στο άλλο. Εξάλλου η δράση, όπως και η Λαγκρανζιανή πυκνότητα είναι βαθμωτά μεγέθη, και προκειμένου να μείνουν τέτοια στη σχετικιστική θεώρηση δεν μπορεί παρά να είναι σταθερές ποσότητες (όλα τα φυσικά μεγέθη στη σχετικότητα είναι είτε σταθερές ποσότητες, είτε τετρανύσματα, είτε γενικά τανυστές ανώτερης τάξης).

Για να γίνει πιο κατανοητό αυτό ας εξετάσουμε την περίπτωση ενός ελεύθερου σχετικιστικού σωματιδίου με μάζα ηρεμίας m . Η δράση γραμμένη σε συναλλοίωτη, όπως λέγεται μορφή, δηλαδή ανεξάρτητη από το αδρανειακό σύστημα όπου γίνονται οι μετρήσεις θα έχει τη μορφή

$$S = \int L d\tau,$$

όπου τ ο ιδιόχρονος του σωματιδίου. Γνωρίζουμε όμως ότι $d\tau = \sqrt{1 - (\dot{x})^2} dt$, όπου θεωρήσαμε την ταχύτητα του φωτός μονάδα. Η L σύμφωνα με τα προλεγόμενα πρέπει να είναι μια σταθερά, που για διαστατικούς λόγους επιλέγουμε να είναι $L = -m$ (το $-$ πρόσημο έχει τοποθετηθεί ώστε η φυσική διαδρομή να καθιστά τη δράση ελάχιστη και όχι μέγιστη). Σε ένα άλλο αδρανειακό σύστημα (για το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε τονούμενες ποσότητες) το οποίο κινείται ως προς το πρώτο με ταχύτητα V η δράση θα είναι (για να απλοποιήσουμε τις πράξεις θα θεωρήσουμε το μονοδιάστατο ανάλογο του προβλήματος):

$$S = \int L \sqrt{1 - (\dot{x}')^2} dt' = \int L \sqrt{1 - \left(\frac{\dot{x} - V}{1 - \dot{x}V} \right)^2} \gamma(dt - Vdx) = \int L \sqrt{1 - \left(\frac{\dot{x} - V}{1 - \dot{x}V} \right)^2} \gamma(1 - V\dot{x})dt = \int L \sqrt{1 - (\dot{x})^2} dt$$

ακριβώς ή ίδια δηλαδή με αυτήν του πρώτου συστήματος. Εδώ φαίνεται και το γεγονός ότι οποιαδήποτε άλλη επιλογή για τη Λαγκρανζιανή εκτός της σταθεράς θα οδηγούσε σε διαφορετική δράση στο τονούμενο σύστημα αναφοράς.

Καθοδηγούμενοι από το παραπάνω παράδειγμα για να γράψουμε τη Λαγκρανζιανή πυκνότητα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου θα ψάχναμε να βρούμε τις βαθμωτές και άρα αναλλοίωτες ποσότητες που μπορεί να κατασκευάσει κανείς για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο περιγράφονται απόλυτα ικανοποιητικά στη σχετικότητα από έναν αντισυμμετρικό τανυστή δευτέρας τάξης (που αλλού εξάλλου θα μπορούσαν να χωρέσουν οι έξι αλληλοεπηρεαζόμενες συνιστώσες του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου), τον $F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$, όπου

με τη συντομογραφία $_{,\nu}$ εννοούμε $\frac{\partial}{\partial x^\nu}$ [με $x^0 = t, (x^1, x^2, x^3) = \vec{x}$], και οι 4 ποσότητες A_μ είναι οι συνιστώσες του τετρανύσματος του δυναμικού: $A_0 = \phi$, και (A_1, A_2, A_3) είναι το αντίθετο του γνωστού ανυσματικού δυναμικού $-\vec{A}$, ο

στροβιλισμός του οποίου δίνει το μαγνητικό πεδίο. Οι μοναδικές βαθμωτές ποσότητες που μπορεί να κατασκευάσει κανείς με έναν τανυστή δεύτερης τάξης είναι οι ακόλουθες: F_a^a , $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$, $\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}F_{\kappa\lambda}F_{\mu\nu}$, όπου ο τανυστής ϵ στην τελευταία ποσότητα είναι ο πλήρως αντισυμμετρικός τανυστής τέταρτης τάξης (παρόμοιος με τον ϵ^{ijk} που έχουμε μάθει να χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό εξωτερικών γινομένων). Δεν είναι δύσκολο να δει κανείς ότι η πρώτη ποσότητα όσον αφορά αντισυμμετρικούς τανυστές είναι εκ ταυτότητας μηδέν (πρόκειται για το ίχνος ενός αντισυμμετρικού πίνακα). Επομένως η Λαγκρανζιανή πυκνότητα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου θα πρέπει στη γενικότερη μορφή της να είναι

$$\ell_{HM} = aF^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + b\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}F_{\kappa\lambda}F_{\mu\nu},$$

με a, b καθαρούς αριθμούς. Οι εξισώσεις Euler-Lagrange, θεωρώντας ως πεδίο το A_ρ θα έχουν τη μορφή:

$$\frac{\partial \ell}{\partial A_\mu} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \ell}{\partial \dot{A}_\mu} \right) - \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \ell}{\partial \vec{\nabla} A_\mu} \right) = 0.$$

Η σχετικιστική περιγραφή όμως αντιμετωπίζει το χώρο και το χρόνο ως αδιαχώριστες συνιστώσες του ενιαίου χωρόχρονου, επομένως θα ήταν πιο πρόπον και στην πράξη πιο οικονομικό να γράφουμε:

$$\frac{\partial \ell}{\partial A_\mu} - \frac{d}{dx^\nu} \left(\frac{\partial \ell}{\partial A_{\mu,\nu}} \right) = 0.$$

Ο δεύτερος και πιο πολύπλοκος όρος της Λαγκρανζιανής πυκνότητας που γράψαμε παραπάνω, δίνει όταν μπει στη μηχανή παραγωγίσεων της εξίσωσης Euler-Lagrange ταυτοτικά μηδέν (η απόδειξη αυτού είναι μια καλή και επίπονη άσκηση σε δείκτες). Συνεπώς δεν προσφέρει κάποια φυσική, σχετικά με την περιγραφή του πεδίου, ο όρος αυτός. Τέλος ο πρώτος όρος ο οποίος είναι και η σωστή Λαγκρανζιανή πυκνότητα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου οδηγεί μετά την εφαρμογή των εξισώσεων Euler-Lagrange επάνω της στη γνωστή κυματική εξίσωση για το φως (γενικά για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \right) A_\mu = 0.^1$$

Προσπαθήστε να καταλήξετε στην κυματική αυτή εξίσωση εκτελώντας τις παραγωγίσεις.

Άσκηση: Κατ' αναλογία με τη γενικευμένη ορμή των απλών μηχανικών συστημάτων γράψτε την ορμή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

¹ Θα πρέπει απλώς να επιβάλλει κανείς τη συνθήκη βαθμονόμησης $A_\mu^{\prime\mu}=0$ (τη επονομαζόμενη βαθμονόμηση Lorentz) για να καταλήξει κανείς στην παραπάνω απλή κυματική εξίσωση.