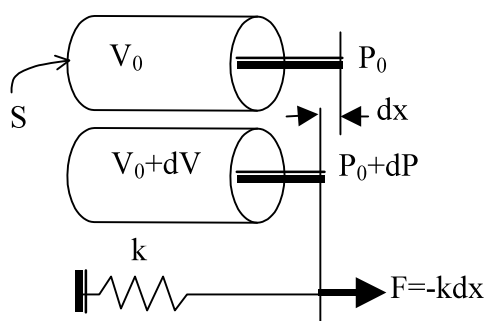


Παράδειγμα 2ο: Ας περάσουμε σε ένα κάπως πιο σύνθετο πρόβλημα, τη διάδοση των ακουστικών κυμάτων μέσα σε ένα αέριο. Το πεδίο του οποίου τη Λαγκρανζιανή πυκνότητα θα κατασκευάσουμε είναι η μετατόπιση $\vec{\xi}(\vec{x}, t)$ εξαιτίας του ήχου από μια μέση θέση ενός μικρού όγκου του αερίου. Να λοιπόν ένα παράδειγμα ενός διανυσματικού πεδίου. Θα θεωρήσουμε ότι η πυκνότητα του αερίου δίχως τη διαταραχή που προκαλεί ο ήχος είναι ρ_0 και η πίεση του αερίου P_0 .

Προφανώς η πυκνότητα κινητικής ενέργειας του αερίου θα είναι

$$e_{\text{κιν}} = \frac{1}{2} \rho_0 \left(\dot{\vec{\xi}} \right)^2 \equiv \frac{1}{2} \rho_0 \left(\dot{\xi} \right)^2$$

σε πρώτη προσέγγιση ως προς τις μεταβολές του πεδίου (ο όρος που περιέχει διαταραχές της πυκνότητας από τη μέση της τιμή θεωρείται αμελητέος). Η πυκνότητα



της δυναμικής ενέργειας δεν είναι τόσο οφθαλμοφανής. Για να την κατασκευάσουμε θα θεωρήσουμε πως το αέριο συμπεριφέρεται σαν ελατήριο σε σύκνωση ή αραιώση αυτού, και θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε τη σταθερά του ελατηρίου αυτού. Έστω V_0 ο όγκος ενός αερίου κλεισμένου σε δοχείο το οποίο κρατιέται σε πίεση P_0 . Αν θεωρήσουμε ότι οποιαδήποτε μεταβολή συμβαίνει σε αυτό είναι

αδιαβατική¹, τότε

$$d(PV^\gamma) = 0 \Rightarrow (dP)V_0^\gamma = -P_0\gamma V_0^{\gamma-1}(dV) \Rightarrow dP = -\frac{\gamma P_0}{V_0} dV.$$

Το αέριο συμπεριφέρεται ως ελατήριο που όταν πιέζεται κατά $dx = dV/S$ ασκεί δύναμη $F = -kdx$, δηλαδή πίεση $dP = F/S = -kdV/S^2$. Από τη σύγκριση των δύο τελευταίων σχέσεων προκύπτει ότι η σκληρότητα του ελατηρίου-αερίου είναι

$$k = \frac{\gamma P_0 S^2}{V_0}$$

Τώρα πλέον είναι εύκολο να γράψουμε την πυκνότητα της δυναμικής ενέργειας του αερίου.

$$e_{\text{διν}} = \frac{\frac{1}{2} k (\vec{\xi}(\vec{x} + \Delta\vec{x}) - \vec{\xi}(\vec{x}))^2}{V_0} = \frac{1}{2} \frac{\gamma P_0 S^2 (\Delta\vec{x})^2}{V_0^2} \left(\frac{\Delta\vec{\xi}}{\Delta\vec{x}} \right)^2 = \frac{1}{2} \gamma P_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi}).$$

Η Λαγκρανζιανή λοιπόν πυκνότητα για το αέριο είναι

$$\ell = \frac{1}{2} \rho_0 \left(\dot{\vec{\xi}} \right)^2 - \frac{1}{2} \gamma P_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi}).$$

¹ Η υπόθεση αυτή είναι απαραίτητη για τη μελέτη των ηχητικών κυμάτων αφού όπως μπορεί να δείξει κανείς σε φυσιολογικές συνθήκες η ταχύτητα του ηχητικού κύματος στην οποία καταλήγει κανείς είναι πολύ μεγαλύτερη από την ταχύτητα διάδοσης της θερμότητας μέσα στο αέριο (το αέριο δεν προλαβαίνει να κρατηθεί σε σταθερή θερμοκρασία). Ο Νεύτωνας οδηγήθηκε σε λάθος υπολογισμό της ταχύτητας διάδοσης του ήχου παραβλέποντας εσφαλμένα τη θεώρηση αυτή.

Και πάλι, σε αυτό το παράδειγμα, η εξίσωση Euler-Lagrange οδηγεί σε μια κυματική εξίσωση με ταχύτητα διάδοσης (την ταχύτητα του ήχου) $u^2 = \gamma P_0 / \rho_0$:

$$\ddot{\xi} - u^2 \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi}) = 0.$$

Θα μπορούσε κανείς να δει ακόμη πιο καθαρά την κυματική φύση της παραπάνω εξίσωσης αν δράσει με τον τελεστή ανάδελτα από αριστερά στην εξίσωση αυτή, και ονομάσει το νέο βαθμωτό πεδίο $-\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi} = \sigma$ (το σ δεν είναι τίποτε άλλο από την ποσοστιαία αύξηση της πυκνότητας σε κάθε σημείο του αερίου κάθε χρονική στιγμή). Το πεδίο αυτό της πυκνότητας ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\ddot{\sigma} - u^2 \vec{\nabla}^2 \sigma = 0.$$