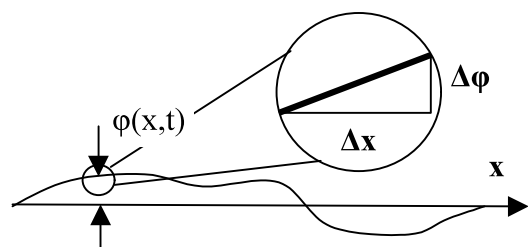


Παράδειγμα 1ο: Έστω ϕ η εγκάρσια απομάκρυνση (υποθέτουμε ότι συμβαίνει σε ένα μόνο επίπεδο) κάθε τμήματος μιας παλλόμενης χορδής κιθάρας (προσέξτε ότι η ϕ είναι συνάρτηση μίας μόνο χωρικής μεταβλητής, της x). Όπως έχουμε ήδη διαπιστώσει το δυσκολότερο μέρος ενός προβλήματος στη Λαγκρανζιανή θεώρηση είναι η κατασκευή της Λαγκρανζιανής, εδώ της Λαγκρανζιανής πυκνότητας, εφόσον πρόκειται περί πεδίου. Η εφαρμογή στη συνέχεια της εξίσωσης Euler-Lagrange είναι τετριμμένη και μας παρέχει άμεσα τις εξισώσεις κίνησης.



Η Λαγκρανζιανή πυκνότητα του προβλήματός μας θα είναι η διαφορά της πυκνότητας της κινητικής ενέργειας μείον την πυκνότητα της δυναμικής ενέργειας.

$$e_{\text{κιν}} = \frac{\frac{1}{2} \frac{M\Delta x}{L} (\dot{\phi})^2}{\Delta x} = \frac{1}{2} \frac{M}{L} (\dot{\phi})^2$$

και

$$e_{\text{δυν}} = \frac{\frac{1}{2} k(\Delta s)^2}{\Delta x} = \frac{1}{2} \frac{k}{\Delta x} ((\Delta\phi)^2 + (\Delta x)^2 - (\Delta x)^2) = \frac{1}{2} k(\Delta x) \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 = \frac{1}{2} T(\phi')^2,$$

όπου T η τάση με την οποία είναι τεντωμένη η χορδή. Εφαρμόζοντας τώρα την εξίσωση Euler-Lagrange στην Λαγκρανζιανή πυκνότητα που κατασκευάσαμε

$$\ell = \frac{1}{2} \frac{M}{L} (\dot{\phi})^2 - \frac{1}{2} T(\phi')^2 \text{ παίρνουμε:}$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \phi} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \ell}{\partial \dot{\phi}} \right) = \frac{M}{L} \ddot{\phi}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \ell}{\partial \phi'} \right) = -T\phi''$$

Δηλαδή καταλήγουμε στην κυματική εξίσωση για μια χορδή

$$\ddot{\phi} - u^2 \phi'' = 0,$$

όπου $u^2 = \frac{T}{M/L}$ η ταχύτητα διάδοσης μιας κυματικής διαταραχής στη χορδή. Το ότι

η παραπάνω διαφορική εξίσωση περιγράφει ένα κύμα μπορείτε να το διαπιστώσετε εύκολα αν δοκιμάσετε στη θέση της ϕ μια συνάρτηση της μορφής $\phi(x \pm ut)$, η οποία προφανώς περιγράφει τη διάδοση ενός κύματος προς τα αριστερά (+) ή τα δεξιά (-) κατά μήκος της χορδής με ταχύτητα u . Όσο για την ακριβή μορφή της συνάρτησης αυτό εξαρτάται από το πώς τράβηξε αρχικά ο κιθαριστής τη χορδή.

Αν δεν είχαμε θέσει τον περιορισμό να κινείται η χορδή σε ένα μόνο επίπεδο, η τελική μας διαφορική κυματική εξίσωση θα ίσχυε για κάθε εγκάρσια συνιστώσα της απομάκρυνσης χωριστά.