

Μηχανική II

Κατασκευή Λαγκρανζιανής συνάρτησης πεδίων

Μάθαμε μέχρι στιγμής πώς να κατασκευάζουμε τη Λαγκρανζιανή ενός μηχανικού συστήματος το οποίο αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος μηχανικών μερών, υπολογίζοντας την κινητική ενέργεια του καθενός καθώς και τη δυναμική ενέργεια εξαιτίας της μεταξύ τους αλληλεπίδρασης ή εξαιτίας κάποιου εξωτερικού πεδίου. Θα δούμε στη συνέχεια πως μπορούμε να κατασκευάσουμε τη Λαγκρανζιανή ενός συνεχούς μέσου ή όπως θα έλεγε κανείς στη γλώσσα της φυσικής ενός πεδίου. Το πεδίο αυτό θα μπορούσε να είναι η εγκάρσια απομάκρυνση ενός κομματιού της χορδής μιας κιθάρας καθώς αυτή πάλλεται, η πυκνότητα ενός αέρα καθώς διαδίδεται μέσω αυτού ένα ηχητικό κύμα, η ταχύτητα των αερίων μαζών της ατμόσφαιρας της υδρογείου, ή ακόμη τα ηλεκτρικά και τα μαγνητικά πεδία μέσα σε ένα φούρνο μικροκυμάτων καθώς αυτός ψήνει ένα λουκάνικο. Από τα προαναφερθέντα παραδείγματα αντιλαμβάνεται κανείς ότι το πεδίο μπορεί να περιγράφεται από ένα μονόμετρο μέγεθος, ένα διανυσματικό μέγεθος, ή ακόμη γενικότερα ένα τανυστικό μέγεθος. Επίσης το μονόμετρο (ή διανυσματικό ή οτιδήποτε άλλο) αυτό μέγεθος θα πρέπει να είναι συνάρτηση της θέσης και του χρόνου: $\phi(\vec{x}, t)$. Δεν μπορεί λοιπόν η Λαγκρανζιανή ενός πεδίου παρά να είναι το ολοκλήρωμα σε ολόκληρο το χώρο, όπου απλώνεται το πεδίο, μιας Λαγκρανζιανής πυκνότητας: $L = \int_V \ell dV$. Η Λαγκρανζιανή

πυκνότητα ℓ πρέπει, κατ' αναλογία με τη Λαγκρανζιανή των μηχανικών συστημάτων, να είναι συνάρτηση του πεδίου και των μεταβολών αυτού με τη θέση και το χρόνο: $\ell = \ell(\phi(\vec{x}, t), \dot{\phi}(\vec{x}, t), \vec{\nabla}\phi(\vec{x}, t))$. Μέσα στη Λαγκρανζιανή αυτή πυκνότητα ℓ κρύβεται όμως όλη η δυναμική του πεδίου, όπως ακριβώς μέσα στη Λαγκρανζιανή ενός μηχανικού συστήματος κρύβεται η δυναμική που διέπει την κίνησή του.

Ας εξετάσουμε πώς προκύπτουν οι εξισώσεις «κίνησης» του πεδίου —το αντίστοιχο δηλαδή των εξισώσεων Euler-Lagrange— από την αρχή ελάχιστης δράσης εφαρμοζόμενης στο πεδίο. Αν το πεδίο εξελίσσεται με την πάροδο του χρόνου φυσικά, σύμφωνα με τη συνάρτηση $\tilde{\phi}(\vec{x}, t)$, τότε μια μικρή μεταβολή αυτής θα πρέπει να επιφέρει αλλαγή στη δράση δεύτερης τάξης σε σχέση με το μέγεθος της μεταβολής του πεδίου. Δηλαδή:

$$S - \tilde{S} = \int (\ell - \tilde{\ell}) dV dt = O(\varepsilon^2),$$

όπου

$$\ell = \ell(\tilde{\phi} + \varepsilon\eta, \dot{\tilde{\phi}} + \varepsilon\dot{\eta}, \vec{\nabla}(\tilde{\phi} + \varepsilon\eta)) = \tilde{\ell} + \varepsilon \left(\eta \frac{\partial \ell}{\partial \phi} + \dot{\eta} \frac{\partial \ell}{\partial \dot{\phi}} + (\vec{\nabla}\eta) \cdot \frac{\partial \ell}{\partial (\vec{\nabla}\phi)} \right).$$

Με τον όρο $\frac{\partial \ell}{\partial (\vec{\nabla}\phi)}$, εννοούμε απλά το διάνυσμα με i-στη συνιστώσα το $\frac{\partial \ell}{\partial (\partial \phi / \partial x_i)}$.

Για να καθίσταται λοιπόν στάσιμη η δράση θα πρέπει το ολοκλήρωμα

$$\int \left(\eta \frac{\partial \ell}{\partial \phi} + \dot{\eta} \frac{\partial \ell}{\partial \dot{\phi}} + (\vec{\nabla} \eta) \cdot \frac{\partial \ell}{\partial (\vec{\nabla} \phi)} \right) dV dt$$

να είναι εκ ταυτότητας μηδέν και μάλιστα για οποιαδήποτε επιλογή της συνάρτησης παραλλαγής του πεδίου η . Η μόνη απαίτηση για τη συνάρτηση η είναι, όπως και στα διακριτά μηχανικά συστήματα, να μηδενίζεται στα άκρα, δηλαδή στο σύνορο τού υπό ολοκλήρωση όγκου την αρχική και την τελική χρονική στιγμή:

$$\eta(\text{σύνορο}, t) = \eta(\vec{x}, t_1) = \eta(\vec{x}, t_2) = 0.$$

Επαναλαμβάνοντας για άλλη μια φορά το συνηθισμένο τρυκ:

$$\int \dot{\eta} \frac{\partial \ell}{\partial \dot{\phi}} dV dt = \int dV d \left(\eta \frac{\partial \ell}{\partial \dot{\phi}} \right) - \int \eta \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \ell}{\partial \dot{\phi}} \right) dV dt$$

και

$$\int (\vec{\nabla} \eta) \cdot \frac{\partial \ell}{\partial (\vec{\nabla} \phi)} dV dt = \int \vec{\nabla} \cdot \left(\eta \frac{\partial \ell}{\partial (\vec{\nabla} \phi)} \right) dV dt - \int \eta \left(\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \ell}{\partial (\vec{\nabla} \phi)} \right) dV dt,$$

τα πρώτα ολοκληρώματα στο δεξιό σκέλος των δύο παραπάνω σχέσεων εξαφανίζονται εξαιτίας των συνοριακών ιδιοτήτων της η (το πρώτο λόγω των χρονικών συνοριακών συνθηκών, ενώ το δεύτερο μέσω του θεωρήματος Stokes λόγω των χωρικών συνοριακών συνθηκών). Επομένως θα πρέπει για κάθε η , που ικανοποιεί τις παραπάνω συνοριακές συνθήκες να είναι

$$\int \eta \left(\frac{\partial \ell}{\partial \phi} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \ell}{\partial \dot{\phi}} \right) - \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \ell}{\partial (\vec{\nabla} \phi)} \right) \right) dV dt = 0$$

δηλαδή

$$\frac{\partial \ell}{\partial \phi} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \ell}{\partial \dot{\phi}} \right) - \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \ell}{\partial (\vec{\nabla} \phi)} \right) = 0.$$

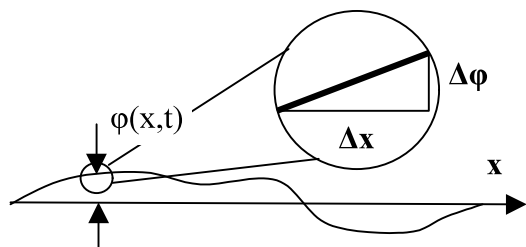
Αυτή είναι η εξίσωση Euler-Lagrange που περιγράφει τη δυναμική εξέλιξη του πεδίου. Αν το πεδίο δεν περιγράφεται από κάποιο μονόμετρο μέγεθος αλλά από κάποιο εν γένει τανυστικό μέγεθος η παραπάνω σχέση θα πρέπει να ικανοποιείται για κάθε συνιστώσα αυτού.

Παράδειγμα 1ο: Έστω ϕ η εγκάρσια απομάκρυνση (υποθέτουμε ότι συμβαίνει σε ένα μόνο επίπεδο) κάθε τμήματος μιας παλλόμενης χορδής κιθάρας (προσέξτε ότι η ϕ είναι συνάρτηση μίας μόνο χωρικής μεταβλητής, της x). Όπως έχουμε ήδη διαπιστώσει το δυσκολότερο μέρος ενός προβλήματος στη Λαγκρανζιανή θεώρηση είναι η κατασκευή της Λαγκρανζιανής, εδώ της Λαγκρανζιανής πυκνότητας, εφόσον πρόκειται περί πεδίου. Η εφαρμογή στη συνέχεια της εξίσωσης Euler-Lagrange είναι τετριμμένη και μας παρέχει άμεσα τις εξισώσεις κίνησης.

Η Λαγκρανζιανή πυκνότητα του προβλήματός μας θα είναι η διαφορά της πυκνότητας της κινητικής ενέργειας μείον την πυκνότητα της δυναμικής ενέργειας.

$$e_{\text{κιν}} = \frac{\frac{1}{2} \frac{M \Delta x}{L} (\dot{\phi})^2}{\Delta x} = \frac{1}{2} \frac{M}{L} (\dot{\phi})^2$$

και



$$e_{\delta uv} = \frac{\frac{1}{2}k(\Delta s)^2}{\Delta x} = \frac{1}{2} \frac{k}{\Delta x} \left((\Delta \phi)^2 + (\Delta x)^2 - (\Delta x)^2 \right) = \frac{1}{2} k(\Delta x) \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 = \frac{1}{2} T(\phi')^2,$$

όπου T η τάση με την οποία είναι τεντωμένη η χορδή. Εφαρμόζοντας τώρα την εξίσωση Euler-Lagrange στην Λαγκρανζιανή πυκνότητα που κατασκευάσαμε

$$\ell = \frac{1}{2} \frac{M}{L} (\dot{\phi})^2 - \frac{1}{2} T(\phi')^2 \text{ παίρνουμε:}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \ell}{\partial \phi} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \ell}{\partial \dot{\phi}} \right) = \frac{M}{L} \ddot{\phi} \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \ell}{\partial \phi'} \right) = -T\phi'' \end{cases}$$

Δηλαδή καταλήγουμε στην κυματική εξίσωση για μια χορδή

$$\ddot{\phi} - u^2 \phi'' = 0,$$

όπου $u^2 = \frac{T}{M/L}$ η ταχύτητα διάδοσης μιας κυματικής διαταραχής στη χορδή. Το ότι

η παραπάνω διαφορική εξίσωση περιγράφει ένα κύμα μπορείτε να το διαπιστώσετε εύκολα αν δοκιμάσετε στη θέση της ϕ μια συνάρτηση της μορφής $\phi(x \pm ut)$, η οποία προφανώς περιγράφει τη διάδοση ενός κύματος προς τα αριστερά (+) ή τα δεξιά (-) κατά μήκος της χορδής με ταχύτητα u . Όσο για την ακριβή μορφή της συνάρτησης αυτό εξαρτάται από το πώς τράβηξε αρχικά ο κιθαριστής τη χορδή.

Αν δεν είχαμε θέσει τον περιορισμό να κινείται η χορδή σε ένα μόνο επίπεδο, η τελική μας διαφορική κυματική εξίσωση θα ίσχυε για κάθε εγκάρσια συνιστώσα της απομάκρυνσης χωριστά.